

## КИНЕТИКА РАСПАДА ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ИЗОТОПОВ ГЕЛИЯ

© Т.Н.Анцыгина, В.А.Слюсарев, К.А.Чишко

Физико-технический институт низких температур Академии наук Украины,  
310000 Харьков, Украина  
(Поступила в Редакцию 21 ноября 1995 г.)

Проведено теоретическое исследование эволюции гетерофазной структуры слабого твердого раствора  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$ . Вследствие распада исходной смеси изотопов образуется фаза, состоящая практически из чистого  $^3\text{He}$ . Изменение внешних условий (например, температуры при постоянном давлении) инициирует диффузионный массоперенос между областями второй фазы и матрицей, направление которого определяется условиями термодинамического равновесия в двухфазной системе. Показано, что процессы релаксации в твердом растворе  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$  контролируются подвижностью межфазных границ, скорость перемещения которых определяется параметрами квантовой диффузии примеси  $^3\text{He}$  в матрице  $^4\text{He}$ . Получены выражения, описывающие времена релаксации гетерофазной субструктуры для случаев, когда выделения второй фазы имеют форму сфер, цилиндров или пластин. Указанные времена представлены как функции температуры и концентрации примеси  $^3\text{He}$  в растворе. Проведено сравнение полученных теоретических результатов с известными из литературы экспериментальными данными по кинетике межфазной релаксации в твердых растворах изотопов гелия.

Твердые растворы изотопов гелия представляют собой молекулярные кристаллы с уникальными физическими свойствами, обусловленными квантовым характером большинства наблюдаемых в них эффектов. Вследствие ограниченной взаимной растворимости компонентов слабый твердый раствор  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$  при достаточно низких температурах претерпевает распад с образованием стабильных выделений второй фазы, состоящей практически из чистой компоненты  $^3\text{He}$ . Очевидно, что в таких условиях как первоначальное фазовое расслоение при охлаждении исходной смеси, так и эволюция образовавшейся гетерофазной структуры при вариациях температуры и давления в процессе эксперимента могут осуществляться лишь путем диффузионного массопереноса примесной компоненты. Здесь в полной мере проявляется специфика твердых растворов гелия, заключающаяся в квантовом характере диффузии примесонов, которая по существу представляет собой атермический процесс движения атомов  $^3\text{He}$  в узкой примесонной зоне. Тем не менее коэффициент диффузии примесонов оказывается неявной функцией температуры благодаря температурной зависимости остаточной концентрации примесной компоненты в распавшемся твердом растворе. Концентрационная же зависимость коэффициента

диффузии оказывается весьма существенной, что связано с влиянием деформационного потенциала, создаваемого примесями, на структуру примесной зоны. В результате кинетика расслоения в интересующих нас системах приобретает ряд особенностей, не наблюдаемых в классических смешанных кристаллах, где диффузия имеет выраженный термоактивированный характер и для слабого раствора практически не зависит от концентрации примеси.

В работе [1] были проведены экспериментальные исследования по кинетике фазового расслоения растворов  ${}^3\text{He}$  в  ${}^4\text{He}$ . Условия постановки эксперимента при этом существенно отличались от стандартных. Обычное рассмотрение [2] предполагает, что мы имеем дело с зарождением новой фазы в изначально пространственно однородной системе (что, например, имеет место при переходах типа газ-жидкость), где образование зародышей происходит флуктуационным путем, и далее, если размер зародыша превосходит некоторое критическое значение, происходит его рост за счет поглощения более мелких зародышей (процесс коалесценции [2]). При рассмотрении же неомогенных твердых растворов такая модель в большинстве случаев оказывается неадекватной реальной ситуации. В твердых растворах зародыши образуются преимущественно на дефектах кристаллической решетки, создающих поля внутренних напряжений в среде. При этом число зародышей остается практически фиксированным, и далее их рост или уменьшение происходят в зависимости от изменения внешних условий. И наконец, теория традиционно строится для систем с бесконечным объемом, потому запас растворенного вещества в них считается неограниченным. В реальных же экспериментах [1] полное количество примеси в образце является конечным, а концентрация примесных атомов в матрице изменяется в процессе эволюции включений второй фазы. Это обстоятельство должно, вообще говоря, существенно повлиять на кинетику роста новой фазы. Оно может быть практически учтено с помощью дополнительных условий, описывающих равновесие по количеству вещества между зародышами и матрицей.

Цель настоящей работы состоит в рассмотрении кинетики фазового расслоения твердых растворов изотопов гелия с учетом перечисленных выше факторов.

## 1. Постановка задачи. Свободная энергия твердого раствора

Будем предполагать, что гамильтониан исходной системы представим в рамках модели решеточного газа, где каждый узел может находиться в трех состояниях, а именно занят атомом  ${}^4\text{He}$  или атомом  ${}^3\text{He}$  в одном из двух состояний спина  $\alpha$ .

$$H = -\frac{U}{2} \sum_{\mathbf{f}, \delta, \alpha, \alpha'} n_{\mathbf{f}, \alpha} n_{\mathbf{f} + \delta, \alpha'} \quad (1)$$

Здесь значение  $n_{\mathbf{f}, \alpha}$  равно нулю или единице в зависимости от того, занят узел  $\mathbf{f}$  атомом  ${}^4\text{He}$  или  ${}^3\text{He}$ ;  $U > 0$  — энергия взаимодействия примесонов в соседних узлах,  $\delta$  — вектор, соединяющий ближайших

соседей. В дальнейшем нам будет удобно работать с большим каноническим ансамблем, т.е. статистическую сумму системы следует записать в виде

$$Z = \text{Sp} \exp \left[ -\beta \left( H - \mu \sum_{\mathbf{f}, \alpha} n_{\mathbf{f}, \alpha} \right) \right],$$

где  $\mu$  — химический потенциал,  $\beta = 1/T$ .

Введем величину  $s_{\mathbf{f}} = (1 - 2\sum_{\alpha} n_{\mathbf{f}, \alpha})$ , среднее значение которой играет роль параметра порядка в расслоившемся твердом растворе. Тогда статистическая сумма может быть переписана в виде

$$Z = \exp \left[ \frac{\beta N}{2} (\mu + Jz) \right] \text{Sp} \exp \left[ \frac{\beta J}{2} \sum_{\mathbf{f}, \delta} s_{\mathbf{f}} s_{\mathbf{f}+\delta} + \beta \tilde{h} \sum_{\mathbf{f}} s_{\mathbf{f}} \right].$$

Здесь  $J = U/4$ ,  $\tilde{h} = -\mu/2 - Jz$ ,  $z$  — координационное число,  $N$  — полное число узлов в решетке. Все дальнейшие расчеты будем выполнять в приближении самосогласованного поля, которое приводит к удовлетворительным результатам во всей области температур, за исключением окрестности точки  $T = T_c$ , где начинается расслоение раствора. В результате термодинамический потенциал  $\Omega$  системы в переменных  $T, \mu$  принимает вид

$$\Omega = -T \ln Z = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{f}, \delta} \sigma_{\mathbf{f}} \sigma_{\mathbf{f}+\delta} - T \sum_{\mathbf{f}} \ln \text{ch} \left[ \beta \left( h + J \sum_{\delta} \sigma_{\mathbf{f}+\delta} \right) \right] - \frac{N}{2} (3T \ln 2 + \mu + Jz), \quad (2)$$

где  $h = \tilde{h} - T \ln 2/2$ ,  $\sigma_{\mathbf{f}} = \langle s_{\mathbf{f}} \rangle$ , угловые скобки обозначают термодинамическое среднее. Непосредственное вычисление  $\sigma_{\mathbf{f}}$  дает

$$\sigma_{\mathbf{f}} = \text{th} \left[ \beta \left( h + J \sum_{\delta} \sigma_{\mathbf{f}+\delta} \right) \right]. \quad (3)$$

С учетом (3) выражение (2) может быть представлено в виде

$$\Omega = -\frac{J}{2} \sum_{\mathbf{f}, \delta} \sigma_{\mathbf{f}} \sigma_{\mathbf{f}+\delta} - h \sum_{\mathbf{f}} \sigma_{\mathbf{f}} - \frac{N}{2} (\mu + Jz) - TS, \quad (4)$$

где  $S$  — энтропия, равная

$$S = \frac{1}{2} \left\{ 3N \ln 2 - \sum_{\mathbf{f}} \left[ (1 + \sigma_{\mathbf{f}}) \ln(1 + \sigma_{\mathbf{f}}) + (1 - \sigma_{\mathbf{f}}) \ln(1 - \sigma_{\mathbf{f}}) \right] \right\}. \quad (5)$$

Отметим, что дополнительное слагаемое в энтропии (первый член в фигурных скобках (5)) связан со спецификой рассматриваемой системы, а именно с тем, что каждый узел может быть заполнен примесью

с одним из двух значений спина, но двойное заполнение узла запрещено.

Дальнейшие вычисления выполним в предположении, что  $\sigma_f$  является функцией, медленно меняющейся на расстояниях порядка параметра решетки  $a$ . В континуальном пределе, ограничиваясь низшими производными по координатам от  $\sigma(\mathbf{r})$  и учитывая соотношение

$$\sum_{\delta} \delta_{\alpha} \delta_{\beta} = \frac{z}{3} \Delta_{\alpha\beta},$$

справедливое для кубических решеток, получаем

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega,$$

$$\Omega_0 = \int \frac{d\mathbf{r}}{\omega_0} f_0(\sigma), \quad \Delta\Omega = \frac{C}{2} \int \frac{d\mathbf{r}}{\omega_0} (\nabla\sigma)^2. \quad (6)$$

Здесь  $C = Jza^2/3$ ,  $\omega_0$  — объем элементарной ячейки матрицы, а

$$f_0 = -\frac{Jz}{2}\sigma^2 - h\sigma - \frac{1}{2}(\mu + Jz) - Ts, \quad (7)$$

$$s = \frac{1}{2} \left\{ 3 \ln 2 - (1 + \sigma) \ln(1 + \sigma) - (1 - \sigma) \ln(1 - \sigma) \right\}. \quad (8)$$

Строго говоря, записать обусловленную пространственным изменением  $\sigma$  добавку  $\Delta\Omega$  в виде (6) можно лишь при температурах, близких к температуре расслоения  $T_c$ , где ширина межфазной границы  $2\lambda$  велика по сравнению с межатомным расстоянием. При температурах  $T \ll T_c$  такое описание может, конечно, рассматриваться только как модельное, поскольку в этом случае в разложение следовало бы добавить и производные высших порядков. Аналогичная ситуация возникает, например, в теории сверхпроводимости при попытке распространить уравнения Гинзбурга–Ландау на произвольные температуры, когда учитываются только вторые производные по координатам, а по параметру порядка сохраняется произвольная нелинейность. Несмотря на то что с точки зрения последовательного микроскопического рассмотрения обосновать подобное обобщение невозможно, из чисто прагматических соображений оно может оказаться полезным [3]. Подобная ситуация имеет место также и в теории дислокаций, где исходное рассмотрение проводится в рамках континуальной теории упругости, а затем учитывается дискретность решетки (модели Френкеля–Конторовой, Пайерлса–Набарро) [4].

В состоянии полного термодинамического равновесия, когда параметр порядка не зависит от координат и времени, соотношение (3) переходит в уравнение Вейсса

$$\sigma = \text{th} \left[ \beta(h + Jz\sigma) \right]. \quad (9)$$

Ниже критической температуры  $T_c$  решение уравнения (9) имеет разрыв при  $h = 0$ , что как раз и означает возникновение двух фаз в системе. При  $T < T_c$  положительные решения для  $\sigma$  соответствуют фазе,

обедненной  ${}^3\text{He}$ , а отрицательные — обогащенной. Таким образом, в расслоившемся растворе, который в дальнейшем и будет рассматриваться, следует положить  $h = 0$ . Из условия существования нетривиальных решений уравнения (9) находится связь величины  $J$  с критической температурой  $T_c$ :  $Jz = T_c$ . Как легко видеть, при  $h = 0$  функция  $f_0$  становится четной по  $\sigma$ .

Выражение (7) в принципе должно быть дополнено слагаемым, отражающим реальную асимметрию кривой расслоения. Такое слагаемое, однако, представляет собой малую добавку к свободной энергии системы. Поэтому мы его учитывать не будем, тем более что в [5] имеются весьма противоречивые данные относительно его конкретной величины.

## 2. Поведение параметра порядка в окрестности межфазной границы

В состоянии термодинамического равновесия  $\delta\Omega/\delta\sigma = 0$ , и мы приходим к следующему уравнению:

$$C\Delta\sigma + T_c\sigma - \frac{T}{2} \ln \frac{1+\sigma}{1-\sigma} = 0. \quad (10)$$

В пространственно однородном случае (10) сводится к уравнению (9). В пространственно неоднородном случае оно описывает поведение  $\sigma$ , в частности, в области межфазной границы. Поверхность зародышей достаточно большого размера можно считать локально плоской. Тогда входящая в (10) величина  $\Delta\sigma = d^2\sigma/dx^2$ , если нормаль к поверхности раздела фаз выбрана вдоль оси  $x$ . Возникающее при этом уравнение может быть проинтегрировано, однако результат получается в неявном виде. Действительно, первый интеграл (10) с учетом граничного условия  $d\sigma/dx = 0$  при  $|\sigma| \rightarrow \sigma_0$  ( $\sigma_0$  — значение параметра порядка в объеме расслоившихся фаз) равен

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = \frac{2}{C} [f_0(\sigma) - f_0(\sigma_0)]. \quad (11)$$

В результате из (11) находим

$$\frac{x - x_0}{a} = \sqrt{\frac{T_c}{6}} \int_0^\sigma \frac{dy}{\sqrt{f_0(y) - f_0(\sigma_0)}}, \quad (12)$$

где  $x_0$  — координата центра межфазной границы, причем концентрированная фаза занимает полупространство  $x \leq x_0$ . Из неявного выражения (12) могут быть получены следующие асимптотики:

$$\sigma \simeq \sqrt{3} \frac{(x - x_0)}{a} \sqrt{\frac{T}{T_c} \ln \frac{1}{1 - \sigma_0^2} - \sigma_0^2}, \quad x \rightarrow x_0,$$

$$\sigma \simeq \sigma_0 \left[ 1 - \exp \left( -\sqrt{\frac{3}{p}} \frac{(x - x_0)}{a} \right) \right], \quad |x - x_0| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Здесь

$$p(T) \equiv \left[ \frac{T}{T_c(1 - \sigma_0^2)} - 1 \right]^{-1} = -\frac{T}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dT} = -\frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T} > 0. \quad (14)$$

Величина  $p(T)$  положительна, поскольку параметр порядка уменьшается с ростом температуры.

Явное же выражение для  $\sigma(x)$  может быть получено только вблизи  $T_c$ , когда удастся выполнить разложение по  $\sigma$ . Ограничившись в уравнении (10) членами третьего порядка, приходим к следующему выражению:

$$\sigma = \sigma_0 \operatorname{th} \frac{x - x_0}{\lambda}, \quad (15)$$

где  $\sigma_0 = \sqrt{3\tau}$ ,  $\lambda = a\sqrt{2}/\sigma_0$ ,  $\tau = 1 - T/T_c \ll 1$ . При произвольных температурах достаточно хорошее приближение для  $\sigma$  может быть также получено с помощью приема, использованного Бардиным [6] при рассмотрении ряда пространственно неоднородных задач теории сверхпроводимости. Идея Бардина весьма проста: в области быстрого изменения  $\sigma$  его абсолютное значение мало и уравнение (10) может быть линеаризовано. В области, где  $\sigma \simeq \sigma_0$ , его градиент становится малым, и в уравнении (10) можно пренебречь первым слагаемым. Решение линеаризованного уравнения имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 \sin \frac{x - x_0}{l}. \quad (16)$$

Здесь  $\sigma_0$  при произвольных температурах должно определяться из (9), а  $l$  задается соотношением  $l = a/\sqrt{3\tau}$ , причем  $\tau$  теперь не предполагается малым. Решение (16) в точках  $x = x_0 \pm \pi l/2$  гладко сшивается с пространственно однородными решениями уравнения (9), отвечающими концентрациям атомов  ${}^3\text{He}$  в объемах разбавленной и концентрированной фаз соответственно. Таким образом, эффективная ширина межфазной границы оказывается равной  $\pi l$ . Отметим, что при  $\tau \ll 1$  оценка ширины переходного слоя, полученная на основе приближения Бардина, практически совпадает с найденной с помощью (15). Выражение (16) дает удовлетворительное описание для параметра порядка внутри переходного слоя, однако становится неприменимым вблизи его границ. Физически приближение Бардина приводит к тому, что межфазной границе по существу навязывается фиксированная ширина и игнорируется наличие «хвостов» при приближении к границе со стороны массивных фаз.

Таким образом, для описания поведения  $\sigma$  вдали от центра переходного слоя было бы естественным воспользоваться асимптотикой (13). Она, однако, оказывается нефизической при температурах, малых по сравнению с  $T_c$ , поскольку в этом интервале  $p$ , а вместе с ним и ширина межфазной границы экспоненциально стремятся к нулю. Это происходит потому, что (13) формально является решением уравнения (10), которое справедливо лишь при  $T \sim T_c$ , когда  $\sigma$  не слишком сильно изменяется на расстояниях порядка межатомных.

Исправить положение можно одним из двух способов. Первый способ состоит в прямом учете дискретности решетки путем построения численными методами решения соответствующего конечно-разностного уравнения. Второй способ, естественный в рамках используемого нами континуального приближения, требует при низких температурах учета в уравнении (10) наряду со второй также и производных высших порядков. При этом, однако, возникает процедура, неудобная в вычислительном отношении. Можно попытаться решить указанную проблему, предположив, что коэффициент  $C$  в (10) является функцией  $\sigma$  и, следовательно, температуры. Приведенные далее рассуждения оправдывают предлагаемый подход.

Допустим, что в (10) мы удерживаем также производную четвертого порядка  $d^4\sigma/dx^4$ , рассматривая ее как малое возмущение. Тогда можно записать

$$\frac{d^4\sigma}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2\sigma}{dx^2} \right) = \frac{1}{C} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} = \frac{1}{C} \left[ \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma^2} \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{\partial^3 f_0}{\partial \sigma^3} \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^2 \right].$$

С учетом (11) получаем окончательно

$$\frac{d^4\sigma}{dx^4} = \tilde{C}(\sigma) \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \Psi(\sigma).$$

Здесь

$$\tilde{C}(\sigma) = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma^2},$$

$$\Psi(\sigma) = \frac{2}{C^2} \left[ f_0(\sigma) - f_0(\sigma_0) \right].$$

Таким образом, учет четвертой производной приводит к появлению зависимости  $C$  от  $\sigma$ , а также к перенормировке локальных слагаемых в (10). В принципе указанную процедуру можно распространить и на производные высших порядков. Величину  $\tilde{C}(\sigma)$  естественно было бы связать с поверхностной энергией межфазной границы. Такой подход был бы весьма интересен в том смысле, что он не только позволил бы учесть дискретность решетки с любой наперед заданной точностью, но и дал бы возможность скомпенсировать ошибки, привнесенные использованием приближения самосогласованного поля, поскольку коэффициент  $\tilde{C}(\sigma)$  оказался бы связанным с принципиально измеримой в эксперименте величиной поверхностного натяжения межфазной границы. К сожалению, эта программа не может быть реализована из-за отсутствия в литературе экспериментальных данных для указанной величины.

Таким образом, мы приходим к необходимости непосредственно учета дискретности решетки, т.е. к проблеме численного решения конечно-разностного аналога уравнения (10)

$$J \sum_{\delta} \sigma_{\mathbf{f}+\delta} = \frac{T}{2} \ln \frac{1 + \sigma_{\mathbf{f}}}{1 - \sigma_{\mathbf{f}}}. \quad (17)$$

Для конкретного проведения соответствующих машинных расчетов, выполняемых методом итераций, удобнее, однако, решать не (17), а эквивалентное ему уравнение (3) при  $h = 0$ . Оказалось, что для  $T \geq 0.1T_c$  результат прекрасно описывается аналитической зависимостью (15), в которой в качестве величины  $\lambda$  следует формально выбрать функцию

$$\lambda = \sqrt{2}a \frac{T}{T_c} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

В дальнейшем будем пользоваться именно этим выражением. Подчеркнем еще раз, что соотношение (18) имеет физический смысл ширины межфазной границы только вблизи  $T \simeq T_c$ , где справедливо континуальное уравнение (10). В решение же (15)  $\lambda$  входит как параметр, выражающийся через коэффициенты уравнения и определяющий размеры области, где  $\sigma$  оказывается быстро меняющейся функцией координат. В низкотемпературном пределе (15) следует рассматривать лишь как удачную аналитическую аппроксимацию численного решения, где  $\lambda$  является формальным параметром, подбираемым из условий наилучшего приближения. Таким образом, нет ничего удивительного в том, что при некоторых температурах величина  $\lambda$  становится меньше параметра решетки  $a$ . Это всего лишь означает, что для этой области температур в континуальном приближении межфазная граница может рассматриваться как геометрическая поверхность.

### 3. Кинетика межфазной границы

Перейдем теперь к изучению движения межфазной границы. Для этого нужно получить уравнение, описывающее временное изменение пространственно неоднородного параметра порядка в условиях неполного термодинамического равновесия. Прежде всего обратим внимание на то, что взаимодействие примесей друг с другом даже при концентрациях порядка нескольких десятых процента, вообще говоря, нельзя считать слабым, поскольку ширина примесонной зоны мала по сравнению с энергией взаимодействия. В этом случае движение подсистемы атомов  ${}^3\text{He}$  естественно описывать в гидродинамическом приближении. Перейдем в функционале  $\Omega$  к переменной  $n = (1 - \sigma)/2$ , имеющей смысл концентрации примесей  ${}^3\text{He}$  в точке  $\mathbf{r}$ . Тогда эффективный гамильтониан примесонной подсистемы можно представить в виде, аналогичном гамильтониану, применяемому для описания квантовой жидкости [7].

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{r} \frac{m n \mathbf{v}^2}{2\omega_0} + \Omega, \quad (19)$$

где  $m$  — масса атома  ${}^3\text{He}$ ,  $\mathbf{v}$  — поле скоростей примесонной подсистемы. Первое слагаемое в (19) есть кинетическая энергия системы примесей, а второе играет роль внутренней энергии как функционала  $n$ . Подобное описание было предложено для квантовой жидкости бозевского типа [8]. Использование его для фермиевской подсистемы в рассматриваемом случае оправдано тем, что нас интересуют только коллективные движения, связанные с общей плотностью жидкости, и специфика фермиевского спектра при этом не проявляется. Кроме того,



примесонная подсистема может считаться невырожденной, поскольку плотность примесонов достаточно мала. Тем самым разница между статистиками Бозе и Ферми оказывается несущественной. Единственное отличие от [8] состоит в том, что нас интересует случай ненулевых температур, и поэтому в (19) внутренняя энергия заменена на соответствующий термодинамический потенциал. Такая замена оправдана тем, что в состоянии равновесия в статическом случае ( $\mathbf{v} = 0$ ) из динамических уравнений должно следовать условие  $\partial\Omega/\partial\sigma = 0$ .

Будем считать движение подсистемы примесонов потенциальным, положив  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . При этом  $n$  и  $\varphi$  являются канонически сопряженными величинами, причем  $n$  играет роль координаты, а  $\varphi$  — импульса. Уравнения, описывающие кинетику примесонной подсистемы, в гамильтоновой формулировке таковы:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{m} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{m} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta n}. \quad (21)$$

Уравнение (20) имеет вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0. \quad (22)$$

Уравнение (21) после взятия градиента от обеих его частей принимает вид уравнения Эйлера для бездиссипативной системы. Учтем теперь, что имеет место релаксация скорости. Формально это можно сделать введением в (20), (21) соответствующих производных от диссипативной функции. Вид самой этой функции зависит от конкретных механизмов релаксации, но при малых скоростях потока можно ограничиться членами, квадратичными по  $\mathbf{v}$ . Таким образом, в уравнении движения появится дополнительное слагаемое  $-\mathbf{v}/\tau_v$ , где  $\tau_v$  — время релаксации скорости, зависящее, вообще говоря, от концентрации  $n$  (связь времени релаксации с экспериментально измеримым коэффициентом диффузии  $D$  будет обсуждена далее). В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{m} \frac{\delta \Omega}{\delta n} \right) = -\frac{\mathbf{v}}{\tau_v}. \quad (23)$$

Конечно, в (23) в общем случае могут присутствовать также навье-стоксовские члены, пропорциональные  $\partial v_i / \partial x_k$ , однако ими можно пренебречь, поскольку градиенты скорости малы везде, за исключением, быть может, узкой области вблизи межфазной границы.

Здесь уместно заметить следующее. Широко распространено мнение, что в пренебрежении процессами переброса и взаимодействием с фононами полный ток квазичастиц (каковыми в нашем случае являются примесоны) сохраняется. Фактически же, даже если сохраняется полный квазиимпульс системы, полный ток не обязан сохраняться, если закон дисперсии квазичастиц не квадратичен. Кроме того, существенное различие в скорости  $N$ - и  $U$ -процессов имеет место вблизи дна зоны. В нашем случае, когда температура твердого раствора

много больше ширины примесонной зоны, все состояния в зоне равновероятны, и скорости обоих процессов, таким образом, практически одинаковы.

Поскольку скорости и ускорения квазичастиц малы, первыми двумя слагаемыми в уравнении (23) можно пренебречь. Таким образом, получаем

$$\mathbf{v} = -\frac{\tau_v}{m} \nabla \frac{\delta\Omega}{\delta n}. \quad (24)$$

Это уравнение представляет собой по существу стандартное кинетическое соотношение, справедливое при малых отклонениях от равновесия и выражающее пропорциональность потока частиц градиенту химического потенциала. Такой результат служит дополнительным подтверждением корректного выбора вида гамильтониана (19).

Подставляя (24) в уравнение (22) и возвращаясь к переменной  $\sigma$ , получаем следующее уравнение для параметра порядка:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_\sigma = 0, \quad (25)$$

где плотность тока параметра порядка  $\mathbf{j}_\sigma$  равна

$$\mathbf{j}_\sigma = -\Gamma(\sigma) \nabla \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad \Gamma(\sigma) = 2\frac{T_v}{m} (1 - \sigma), \quad (26)$$

и определяется степенью отклонения от равновесия примесонной подсистемы в области межфазной границы. Такого типа уравнение для сохраняющегося параметра порядка вблизи температуры перехода было предложено в монографии [9] на основе феноменологических соображений. Приведенные нами аргументы показывают, что соответствующее уравнение остается справедливым во всей области температур.

Наиболее медленным процессом при установлении равновесия является обмен энергией между примесной и фоновой подсистемами. На последней стадии установления равновесия в растворе как фоновая, так и примесная подсистемы сами по себе находятся в равновесных состояниях, которые характеризуются, однако, разными температурами. Температуру фоновой подсистемы будем считать равной  $T$ , температуру примесонов обозначим через  $\Theta$ . То, что такое рассмотрение разумно, можно видеть на примере фоновой и электронной подсистем в металлах. Даже в том случае, когда обмен энергией между подсистемами не является самым медленным процессом, последовательное описание релаксации с использованием кинетических уравнений [10] приводит практически к тем же результатам, что и подход [11], основанный на введении различных температур квазиравновесия.

Таким образом, конфигурация межфазной границы описывается уравнением (10), где температура заменена параметром  $\Theta$ , в то время как в выражении для термодинамического потенциала  $\Omega$  должна фигурировать температура  $T$ . Фактически, мы имеем неполное равновесие, когда  $\delta\Omega/\delta\sigma$  не равно нулю,

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = -C \frac{d^2\sigma}{dx^2} - T_c\sigma - T \frac{\delta S}{\delta\sigma}, \quad (27)$$

где  $S = \omega_0^{-1} \int s dr$ , а  $s$  определяется выражением (8). Учитывая, что при  $T = \Theta$  для примесонной подсистемы  $\delta\Omega/\delta\sigma = 0$ , получаем из (26)

$$j_\sigma = \Gamma(\sigma)(T - \Theta) \nabla \frac{\delta S}{\delta \sigma}. \quad (28)$$

Для дальнейшего рассмотрения нам необходимо установить связь между  $\Gamma(\sigma)$  и коэффициентом диффузии  $D$ , который является величиной, непосредственно измеримой в эксперименте. Разлагая уравнение (25) по малому отклонению  $\delta\sigma$  от равновесного значения  $\sigma = \sigma_0$  в объеме расслоившихся фаз и пренебрегая производными, порядок которых выше, чем второй, получаем в линейном по  $\delta\sigma$  приближении

$$\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} - \nabla (D \nabla \delta\sigma) = 0.$$

Это уравнение совпадает с обычным линейным уравнением диффузии, где роль коэффициента диффузии  $D$  играет комбинация

$$D = \frac{T_c}{p(\Theta)} \Gamma(\sigma). \quad (29)$$

Из (29) видно, что условие  $D > 0$  выполняется, поскольку  $p(\Theta) > 0$ . Соотношение (29) определяет связь кинетического коэффициента  $\Gamma$  с экспериментально измеримым коэффициентом диффузии  $D$ .

Полуэмпирическое выражение для  $D$ , справедливое в широком интервале температур и концентраций, было получено в работах [12,13]

$$D = \frac{zI^2 a^2}{3\hbar} \left\{ \frac{Q(n)}{\Omega_{\text{im}} + \Omega_{\text{ph}}(T)} + \frac{\Omega_{\text{ph}}(T)[1 - Q(n)]}{(\delta\varepsilon)^2 + \Omega_{\text{ph}}^2(T)} \right\}. \quad (30)$$

Здесь  $\Omega_{\text{im}} = AnU_0^{2/3}I^{1/3}$ ,  $\Omega_{\text{ph}}(T) = B(T/\Theta_D)^9$  ( $\Theta_D$  — температура Дебая) [12] представляют собой усредненные по зоне частоты рассеяния, связанные с взаимодействием примесей соответственно между собой и с фоновой подсистемой,  $I$  — амплитуда туннелирования,  $\delta\varepsilon = \alpha U_0 n^{4/3}$  — эффективный сбой уровней, обусловленный взаимодействием примесей,  $U_0$  — энергетический параметр, характеризующий интенсивность взаимодействия примесоннов,  $A$ ,  $B$  и  $\alpha$  — безразмерные численные коэффициенты. Входящая в (30) функция критического поведения  $Q(n)$  характеризует степень взаимной локализации примесоннов и имеет вид

$$Q(n) = \theta(n_c - n) \left[ (n_c - n)/n_c \right]^\nu, \quad (31)$$

где  $\nu$  — критический индекс,  $\theta(x)$  — функция Хэвисайда, а  $n_c$  — критическая концентрация, при которой запирается зонное движение примесоннов и наступает их пространственная локализация [14]. Первое слагаемое в (30), отличное от нуля при  $n < n_c$ , отвечает когерентной квантовой диффузии, обусловленной зонным характером перемещения примесоннов по решетке. Второй член в (30) связан с некогерентной диффузией, стимулированной двухфононными процессами, и,

таким образом, при концентрациях  $n > n_c$  конечное значение коэффициента диффузии обеспечивается только посредством столкновений с фоновыми. Отметим сразу же, что величина  $n_c \sim Iz/U_0 \ll 1$  в силу того, что параметр  $U_0$  на три порядка превосходит  $I$ . В дальнейших расчетах мы существенно используем это обстоятельство. Экспериментально определенные значения остальных параметров, входящих в (30), представлены в обзоре [14].

Учитывая, что при температуре Дебая, почти на два порядка превышающей температуру  $T_c$ , величина  $\Omega_{ph} \ll \Omega_{im}$ , выражение для  $D(n)$  можно упростить

$$D(n) = \frac{D_0}{n} \left(1 - \frac{n}{n_c}\right)^\nu, \quad D_0 = \frac{Iza^2}{3\hbar A} \left(\frac{I}{U_0}\right)^{2/3}. \quad (32)$$

Обратимся к решению уравнения (25). С учетом (28), (29) оно определяет параметр порядка как функцию координат. Будем искать решение в виде  $\sigma(x) = \bar{\sigma} + \sigma_1$ , где  $\sigma_1$  предполагается малой добавкой к функции  $\bar{\sigma}$ , задающей равновесную конфигурацию границы при температуре  $\Theta$ ,

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \varphi(u), \quad u = \frac{x - x_0}{\lambda}.$$

Здесь  $\sigma_0$  — параметр порядка в объеме расслоившихся фаз, связанный с температурой примесонной подсистемы соотношением

$$\frac{T_c}{\Theta} = \frac{1}{2\sigma_0} \ln \frac{1 + \sigma_0}{1 - \sigma_0}. \quad (33)$$

Введенная функция  $\varphi(u)$  характеризует структуру межфазной границы и удовлетворяет естественным граничным условиям  $\varphi(u) \rightarrow \text{sign} u$  при  $|u| \rightarrow \infty$ . Линеаризуя (25) вблизи  $\sigma = \bar{\sigma}$ , для  $\sigma_1$  получаем неоднородное линейное уравнение. Решение соответствующего ему однородного уравнения должно быть ортогонально его правой части во избежание возникновения секулярных членов. Нетрудно убедиться, что решением такого однородного уравнения является функция  $\partial\varphi/\partial u$ . В результате условие разрешимости уравнения для  $\sigma_1$  имеет вид

$$\int du \frac{\partial\varphi}{\partial u} \left[ \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial t} + \delta\Theta \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(\bar{\sigma}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta S}{\delta\sigma} \Big|_{\sigma=\bar{\sigma}} \right] = 0, \quad (34)$$

где  $\delta\Theta = T - \Theta$ . Учтем, что

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial t} = -V \frac{\sigma_0}{\lambda} \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\sigma_0}{\lambda^2} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial\sigma_0}{\partial t} \varphi,$$

где  $V = dx_0/dt$  — скорость перемещения межфазной границы. Интегралы, связанные с последними двумя слагаемыми, тождественно обращаются в нуль. Структура первого слагаемого в (34) такова, что в интеграл от него вносят одинаковый вклад все точки промежутка интегрирования. По этой причине практически не имеет значения, каким

приближением пользоваться для его вычисления. Так, например, приближение Бардина дает для численного коэффициента  $b = \int du (\partial\varphi/\partial u)^2$  в этом слагаемом значение  $b = \pi/2$ . Если же воспользоваться выражением (15), то  $b = 4/3$ . Различие между обоими результатами составляет около 15%.

Сложнее обстоят дела со вторым слагаемым в (34). Основной вклад в него вносит та часть межфазной области, которая контактирует с матрицей. Это связано с быстрым убыванием  $\Gamma(\sigma)$  по мере уменьшения  $\sigma$  (роста  $n$ ) и практическим обращением  $\Gamma$  в нуль при незначительном углублении внутрь концентрированной фазы. После интегрирования по частям в (34), выбирая в качестве переменной интегрирования  $\tilde{\sigma}$  (в дальнейшем для краткости будем опускать тильду), приходим к соотношению

$$V = -\frac{\lambda\delta\Theta}{\sigma_0^2 b} \int \frac{d\sigma}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} \Gamma(\sigma). \quad (35)$$

Как было отмечено ранее, левая часть соотношения (27) обращается в нуль при  $T = \Theta$ . Это позволяет представить вторую производную  $\partial^2\sigma/\partial x^2$  в виде

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = \frac{3}{a^2} \left( \frac{\Theta}{2T_c} \ln \frac{1+\sigma}{1-\sigma} - \sigma \right). \quad (36)$$

Подставляя (36) в (35), возвращаясь к переменной  $n$  и учитывая соотношения (29) и (32), находим

$$V = \frac{3}{2b} p(\Theta) \frac{D_0\lambda}{a^2} \frac{\delta\Theta}{T_c} \int_{n_c}^{n_-} \frac{dn}{n^2} \left(1 - \frac{n}{n_c}\right)^\nu \left(\frac{\Theta}{2T_c} \ln \frac{1}{n} - 1\right), \quad (37)$$

где  $n_-$  — концентрация примесей  $^3\text{He}$  в разбавленной фазе. При выводе (37) мы учли, что  $n_-, n_c \ll 1$ .

Примем теперь во внимание, что температура начала расслоения слабого раствора  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$  всегда меньше  $T_c$ , что непосредственно следует из вида кривой равновесия. Поскольку же реальный эксперимент, как правило, осуществляется при температурах, много меньших температуры расслоения, то тем более мы можем считать, что всегда выполняется условие  $T, \Theta \ll T_c$ . В этом случае из (9) следует

$$n_- \simeq \exp\left(-2\frac{T_c}{\Theta}\right). \quad (38)$$

Используя (38), выражение (37) можно свести к виду

$$V = -\frac{3}{4bn_c} p(\Theta) \frac{D_0\lambda}{a^2} \frac{\delta\Theta}{T_c} \frac{\Theta}{T_c} \int_1^\alpha \frac{dx}{x^2} \left(1-x\right)^\nu \ln \frac{\alpha}{x}, \quad (39)$$

где  $\alpha = n_-/n_c$ . В интересующем нас случае низких температур, как видно из (38), всегда выполняется условие  $\alpha \ll 1$ . В этом пределе,

проведя интегрирование по частям, интеграл в (39) можно оценить как  $\sim 1/\alpha$ . При этом весьма существенным оказывается то обстоятельство, что значение критического индекса  $\nu \simeq 1.7$  превосходит единицу. Тем самым, как будет видно далее, обеспечивается правильная концентрационная зависимость времени релаксации гетерофазной субструктуры твердого раствора  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$ . В результате для скорости движения границы (39) находим

$$V = -\frac{3}{4b} p(\Theta) \frac{D_0 \lambda}{n_- a^2} \frac{\Theta}{T_c} \frac{\delta \Theta}{T_c}. \quad (40)$$

Обратим внимание на то, что скорость границы как функция температуры в выражении (40) определяется помимо множителя  $T/T_c$  также температурной зависимостью входящих в него параметров  $p$ ,  $n_-$  и  $\lambda$ .

#### 4. Эволюция гетерофазной субструктуры в распавшихся твердых растворах изотопов гелия. Сравнение с экспериментом

Как уже отмечалось, мы исходим из предположения о гетерогенном зарождении второй фазы, т.е. считаем, что зародыши возникают не флуктуационным путем, а образуются на дефектах кристаллической решетки, число которых фиксировано. Основанием для такого предположения является то, что эксперимент не дает каких-либо указаний на изменение числа зародышей с изменением внешних условий (температуры, давления и др.) [15]. В самом деле, из экспериментальных данных следует, что количество новой фазы экспоненциально изменяется со временем после вывода системы из состояния термодинамического равновесия, в то время как при гомогенном (термофлуктуационном) зарождении следовало бы ожидать степенного изменения доли второй фазы со временем [2, 16].

Отметим, что образования зародышей сферической формы естественно ожидать, когда центрами зарождения их являются точечные дефекты: вакансии или междоузлия. В случае, если центрами зарождения являются дислокации, возникают зародыши цилиндрической формы. Если же центрами образования зародышей являются двойники или границы зерен, то естественно ожидать образования зародышей плоской формы. В случае сферического или цилиндрического зародыша скорость межфазной границы  $V$  представляет собой изменение радиуса зародыша в единицу времени, в то время как для плоского зародыша эта величина описывает приращение полутолщины пластины новой фазы.

При сделанных предположениях (см. (7)–(9)) кривая расслоения симметрична относительно замены  $n \rightarrow 1-n$ . Это означает, что в любой момент времени концентрация  $^4\text{He}$  в зародыше обогащенной  $^3\text{He}$  фазы такая же, как и концентрация  $^3\text{He}$  в матрице. Поэтому условие сохранения полного числа атомов  $^3\text{He}$  в предположении, что размеры всех зародышей одинаковы, может быть записано в виде

$$n_3 = n + (1 - 2n)c_d v_d(R), \quad (41)$$

где  $n_3$  — средняя концентрация примеси в растворе,  $R$  — характерный размер зародыша. В зависимости от формы зародышей под  $c_d$  и  $v_d$  следует понимать: для сферических зародышей радиуса  $R$  под  $c_3$  — число

зародышей в единице объема раствора,  $v_3 = 4\pi R^3/3$ ; для цилиндрических зародышей радиуса  $R$  под  $c_2$  — число зародышей, пересекающих единичную площадку в сечении образца,  $v_2 = \pi R^2$ ; для плоских зародышей толщиной  $2R$  под  $c_1$  — число зародышей на единицу длины образца в направлении, перпендикулярном поверхностям зародышей,  $v_1 = R$ . При выводе (41) мы считали, что плотность частиц  ${}^3\text{He}$  постоянна в объеме зародыша, а число атомов примеси в переходном слое пренебрежимо мало по сравнению с числом частиц в зародыше. Далее удобно ввести эффективное расстояние  $L$  между зародышами, положив  $c_d = v_d^{-1}(L)$ . Величина  $v_d(L)$ , очевидно, имеет смысл эффективного  $d$ -мерного объема, приходящегося на один зародыш.

Принимая во внимание связь между концентрацией примесей  ${}^3\text{He}$  внутри расслоившихся фаз и  $\sigma_0$ , можно выразить из (33) параметр порядка через объем зародыша

$$\sigma_0 = \frac{1 - 2n_3}{1 - 2(R/L)^d}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (33) и учитывая (38), получаем связь между температурой примесонной подсистемы  $\Theta$  и объемом зародыша. В результате соотношение (35) преобразуется в замкнутое уравнение, описывающее эволюцию зародыша. При этом доля частиц  ${}^3\text{He}$ , сконденсировавшихся в новой фазе, в любой момент времени пропорциональна величине  $v_d(1 + \sigma)/2$ .

Уравнение, описывающее эволюцию зародышей, в общем случае может быть решено только численными методами. Примем во внимание, что в реальных экспериментах [15] процессы установления равновесия в гетерофазных растворах изотопов гелия исследуются при малых приращениях температуры системы  $\delta\Theta \ll T$ . Обозначим через  $R_0$  равновесное значение размера зародыша, соответствующее температуре  $T$ . Рассмотрим решение указанного уравнения, линеаризовав его по малым отклонениям параметра  $R$  от его равновесного значения, для чего положим  $R = R_0 + \delta R$ . В результате находим, что рост размера зародыша, определяемый скоростью движения межфазной границы, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta R}{dt} = -\frac{\delta R}{\tau},$$

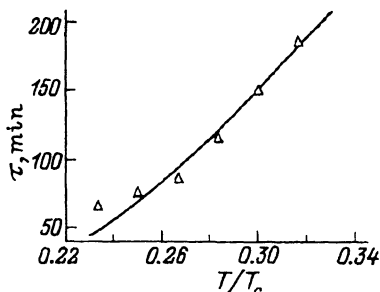
где время  $\tau$  может быть найдено с учетом выражения (40) для скорости межфазной границы, движение которой и приводит к изменению числа частиц в новой фазе

$$\tau = \frac{2b}{3d} \left( \frac{a^2 R_0}{\lambda D_0} \right) \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \frac{n_-}{n_3}. \quad (43)$$

Этим же временем релаксации определяется также и относительное изменение числа атомов  ${}^3\text{He}$ , принадлежащих второй фазе. Обратим внимание на то, что форма зародыша весьма слабо сказывается на величине времени релаксации, поскольку она входит в (43) только через

Температурная зависимость времени релаксации гетерофазной структуры твердых растворов изотопов гелия.

Сплошная кривая — теория, точки — экспериментальные данные [15].



фактор  $1/d$ . Таким образом, в реальном эксперименте, по всей вероятности, будет сложно определить конфигурацию зародышей, исходя только из измерений времени релаксации  $\tau$ , тем более что в соотношении (43)  $R_0$  должно определяться числом зародышей в единице объема раствора, которое предполагается заданным и неизменным в процессе измерений. Действительное значение полученного результата может состоять в том, что измеренное время релаксации позволяет оценить величину  $R_0$ , а также связанное с ним среднее расстояние между зародышами концентрированной фазы.

Перейдем теперь к сравнению полученных результатов с экспериментом [15], в котором производились измерения температурной зависимости времени  $\tau$ , определяющего скорость роста зародыша новой фазы. Для удобства дальнейших обсуждений перепишем (43), явно выделив температурную зависимость. Для этого воспользуемся (38) и соотношением (18), в котором положим  $T \ll T_c$ . В результате получаем

$$\tau = \frac{b\sqrt{2}}{3dn_3} \left( \frac{aR_0}{D_0} \right) \left( \frac{T_c}{T} \right)^3 \exp \left( -2 \frac{T_c}{T} \right). \quad (44)$$

При обработке опытных данных авторы [15] используют эмпирическую аппроксимационную формулу из работы [17], согласно которой

$$\tau = kD^{-1}\tilde{L}^2, \quad (45)$$

где  $k$  — константа порядка единицы, а  $\tilde{L}$  интерпретировалось как среднее расстояние между зародышами  $L$ . Сравнивая (45) с (43) и принимая во внимание связь величин  $R_0$  и  $L$  при  $T \ll T_c$  ( $R_0/L \simeq n_3^{1/d}$ ), можно видеть, что в качестве эффективного расстояния между зародышами  $\tilde{L}$  следует взять комбинацию

$$\tilde{L} = a \frac{T_c}{T} \left[ \frac{2b}{3d} n_3^{1/d-1} \frac{L}{\lambda} \right]^{1/2},$$

которая оказывается функцией температуры, среднего расстояния между зародышами  $L$  и средней концентрации примеси  $n_3$  в образце.

Результат сравнения теоретического расчета (44) с экспериментальными данными [15] иллюстрируется рисунком. При нанесении на рисунок экспериментальных значений  $\tau$  как функции безразмерной



температуры  $T/T_c$  мы выбрали  $T_c = 0.6$  К. Это сделано потому, что фигурирующее в наших расчетах значение  $T_c$  является по существу мерой интенсивности взаимодействия в примесонной подсистеме, введенной в приближении самосогласованного поля. Указанное значение отличается от экспериментально регистрируемого, равного 0.4 К, заметный вклад в величину которого вносят флуктуации, не учитываемые в приближении самосогласованного поля. Достаточно точная оценка реальной критической температуры дается формулой [18,19]

$$T_c = \frac{Jz}{W},$$

где  $W$  — интеграл Ватсона. Совершенно очевидно, что для корректного сопоставления теоретических зависимостей, найденных как функции безразмерной температуры  $T/T_c$ , с экспериментальными данными, поручаемыми для реальных температур  $T$ , последние должны быть нормированы на ту критическую температуру  $T_c$ , которая следует из используемой теоретической модели (либо, что менее удобно, теоретические кривые должны быть пересчитаны для шкалы реальных температур с учетом экспериментально измеренного значения  $T_c$ ). Как видно из рисунка, соотношение (44) вполне удовлетворительно описывает результаты эксперимента.

Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют сделать вывод о том, что достаточно сложные концентрационные и температурные зависимости времен релаксации гетерофазной субструктуры распавшихся твердых растворов изотопов гелия определяются прежде всего соответствующими зависимостями коэффициента диффузии атомов  $^3\text{He}$  в матрице  $^4\text{He}$ , а также структурой и кинетикой перемещения межфазных границ. Во всяком случае ясно, что эмпирические зависимости, предложенные в [17], не могут быть использованы для адекватной интерпретации экспериментально наблюдаемого поведения интересующих нас систем. Правильная физическая модель эволюции двухфазного квантового твердого раствора обязательно должна включать в себя последовательный учет подвижности межфазных границ; и такая схема, частично реализованная в настоящей работе, позволила достичь хорошего согласия с экспериментом.

Отметим теперь, что проведенное нами рассмотрение в действительности несколько упрощено по сравнению с реальной ситуацией, характерной именно для твердых растворов изотопов гелия. Ввиду того что при концентрациях примесной компоненты  $^3\text{He}$  в матрице  $^4\text{He}$ , превышающих некоторое критическое значение  $n_c \sim 7\%$ , коэффициент диффузии становится чрезвычайно малым, есть основания предположить, что процесс роста зародыша при понижении температуры проходит два этапа. На первом этапе образуется «рыхлая» область с повышенной концентрацией ( $n > n_c$ )  $^3\text{He}$ . Второй этап состоит в уплотнении этой области исключительно за счет диффузии, стимулированной двухфононными процессами. Такой процесс происходит достаточно медленно, поскольку соответствующий коэффициент диффузии теперь будет определяться величиной  $\Omega_{\text{ph}}$ , входящей в (30). Очевидно, что при таком характере роста включений второй фазы времена релаксации гетерофазной структуры должны быть на три-четыре порядка больше, чем те, которые следуют из формул (43), (44).

При повышении температуры процесс, по-видимому, развивается в обратном порядке: вначале наблюдается медленное возникновение «рыхлой» фазы, которая затем достаточно быстро рассасывается за счет квантового туннелирования примесонов. В некотором смысле этот процесс аналогичен тому, который обсуждается в астрофизике как модель эволюции сверхновых звезд [20]. Взрывное рассасывание зародыша может приводить к выбрасыванию в матрицу квазиодномерных «усов» типа упоминавшихся в [21] фрактальных структур. Любопытно отметить, что образование квазиодномерных выделений второй фазы не является, по-видимому, столь уж экзотическим. Сходный механизм формирования нитевидных кристаллов наблюдался, например, в [22], где исследована кинетика восстановления металлического серебра при проявлении экспонированных фотослоев. Прямые электронно-микроскопические наблюдения [22] показывают, что выделение атомарного серебра при проявлении эмульсионного кристалла происходит у «корня» растущей из кристалла серебряной нити. Причиной этого авторы [22] считают различие объемов ионов и нейтральных атомов серебра. В растворах изотопов гелия подобный эффект может быть вызван существенным различием эффективных атомных объемов атомов  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ , обусловленным различной амплитудой нулевых колебаний изотопов.

Авторы выражают благодарность В.А.Майданову, Э.Я.Рудаевскому и В.А.Шварцу за многочисленные плодотворные дискуссии.

Работа частично поддержана Международным научным фондом (ISF) в рамках гранта U2N000.

#### Список литературы

- [1] Михеев В.А., Рудаевский Э.Я., Чаговец В.К., Шешин Г.А. ФНТ 17, 4, 444 (1991).
- [2] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М. (1979). 527 с.
- [3] Галайко В.П. ФММ 21, 4, 496 (1966).
- [4] Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М. (1972). 499 с.
- [5] Edwards D.O., Pettersen M.S. J. Low. Temp. Phys. 87, 3/4, 473 (1992).
- [6] Бардин Дж. В. кн.: Физика низких температур. М. (1959). 381 с.
- [7] Халатников И.М. Теория сверхтекучести. М. (1971). 320 с.
- [8] Ландау Л.Д. Собрание трудов. М. (1969). Т. 1. С. 352.
- [9] Покровский А.З., Паташинский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М. (1982). 381 с.
- [10] Полевич В.В., Слюсарев В.А. Тр. ФТИАН АН УССР, 6, 3 (1970).
- [11] Лифшиц И.М., Каганов М.И., Танатаров Л.В. ЖЭТФ 31, 2(8), 232 (1956).
- [12] Каган Ю.М., Максимов Л.А. ЖЭТФ 84, 2, 792 (1983).
- [13] Kagan Yu.M., Maksimov L.A. Phys. Lett. A95, 5, 242 (1983).
- [14] Михеев В.А., Михин Н.П., Майданов В.А. ФНТ 9, 9, 901 (1983).
- [15] Шварц В.А., Михин Н.П., Рудаевский Э.Я., Усенко А.М., Токарь Ю.А., Михеев В.А. ФНТ 21, 7, 717 (1995).
- [16] Лифшиц И.М., Слезов В.В. ФТТ 1, 9, 1401 (1959).
- [17] Iwasa I., Suzuki H. Proc. 17 Int. Conf. Low Temp. Phys. (1984). V. 1. P. 531.
- [18] Frölich J., Simon B., Spenser T. Commun. Math. Phys. 50, 1, 79 (1976).
- [19] Dyson F.J., Lieb E.H., Simon B. J. Stat. Phys. 18, 1/2, 335 (1978).
- [20] Шваршильд М. Стрoение и эволюция звезд. М. (1961). 423 с.
- [21] Анцигина Т.Н., Слюсарев В.А., Чишко К.А. ФНТ 21, 6, 583 (1995).
- [22] Неблит К.Б. Фотография, ее материалы и процессы. М. (1958). 673 с.