

УДК 537.61

©1995

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ СИЛЬНО НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ ДВУМЕРНЫХ ИЗИНГОВСКИХ СИСТЕМ

О.Н.Марков, В.В.Прудников

Омский государственный университет
 (Поступила в Редакцию 26 июля 1994 г.)

Осуществлено компьютерное моделирование процессов критической релаксации намагнитченности в двумерной модели Изинга с замороженными в узлах решетки немагнитными атомами примеси. Рассмотрена квадратная решетка с размерами 400^2 с концентрацией спинов $p = 1.0; 0.95; 0.9; 0.85; 0.8; 0.75; 0.7$. Для определения динамического критического индекса z использован метод Монте-Карло совместно с методом динамической ренормгруппы. Получены значения $z(p)$: $z(1) = 2.24 \pm 0.07$, $z(0.95) = 2.24 \pm 0.06$, $z(0.9) = 2.24 \pm 0.06$, $z(0.85) = 2.38 \pm 0.05$, $z(0.8) = 2.51 \pm 0.06$, $z(0.75) = 2.66 \pm 0.07$, $z(0.7) = 2.88 \pm 0.06$. Выявлено сингулярное скейлинговое поведение индекса $z = A' |\ln(p-p_c)| + B'$ с константами $A' = 0.56 \pm 0.07$, $B' = 1.62 \pm 0.07$.

В соответствии с гипотезой динамического скейлинга [1] при приближении температуры T системы к критической температуре T_c такие характеристики критического поведения как время релаксации τ и корреляционная длина ξ_T термических долгоживущих возбуждений системы оказываются связанными соотношением

$$\ln \tau = f(\ln \xi_T), \quad (1)$$

где $f(x)$ является обобщенной однородной функцией своего аргумента x . Для большинства изученных к настоящему времени критических явлений время релаксации систем удовлетворяло соотношению (1) с функцией $f(x) = zx$ с не зависящей от температуры константой z , называемой динамическим критическим индексом. В результате при $T \rightarrow T_c$ система характеризовалась критическим замедлением времени релаксации с

$$\tau \sim \xi_T^z \sim |T - T_c|^{-z\nu_T}, \quad (2)$$

где ν_T — критический индекс корреляционной длины, задающий ее расходимость при критической температуре. Как показали исследования, численные значения критических индексов, зависят от пространственной размерности системы d и числа компонент параметра порядка, являются универсальными для целого ряда систем. Разбиение систем, демонстрирующих фазовые превращения самой различной природы, на классы универсальности равновесного и динамического критического поведения позволило придать теории фазовых переходов и

критических явлений необычайную стройность. Изучение критического поведения неупорядоченных магнитных систем со случайно распределенными немагнитными атомами примеси позволило расширить представление о факторах, влияющих на систематизацию по классам универсальности. Исследования показали [2], что присутствие замороженных примесей изменяет свойства магнетиков, теплоемкость которых в однородном состоянии испытывает расхожимость в критической точке с индексом $\alpha > 0$. Данному критерию удовлетворяют только трехмерные системы, эффективный гамильтониан которых вблизи критической точки изоморфен модели Изинга. Ренормгрупповой анализ с использованием ε -разложения [3] выявил, что критическое поведение неупорядоченной модели Изинга характеризуется новым набором критических индексов, значения которых не зависят от концентрации точечных примесей $c_{i\text{mp}}$ в области с $c_{i\text{mp}} \ll 1 - p_c$, где p_c — порог спиновой перколяции. В работе [4] проведен анализ равновесного, а в работе одного из авторов [5] — динамического критического поведения разбавленных магнетиков непосредственно для трехмерных систем. Эксперимент [6] подтвердил численное отличие критических индексов для примесных систем от их значений для однородных магнетиков и показал хорошее согласие с теоретическими результатами.

Особенный интерес для исследователей представляют неупорядоченные низкоразмерные магнетики, описываемые моделью Изинга. Из-за равенства нулю индекса теплоемкости α однородной модели влияние беспорядка, вносимого присутствием примеси, становится неопределенным. Детальное рассмотрение этого случая [7] позволило прийти к выводу, что влияние примеси затрагивает только поведение теплоемкости, в то время как остальные термодинамические и корреляционные функции не изменяют своего критического поведения. Теоретико-полевое рассмотрение релаксационного режима критической динамики неупорядоченных двумерных изинговски подобных магнетиков показало [5], что оно не отличается от динамики однородной модели в области с $c_{i\text{mp}} \ll 1 - p_c$ и характеризуется индексом $z = 2.277$. Однако остался невыясненным вопрос: являются ли критические индексы неупорядоченных систем универсальными, т.е. не зависящими от концентрации примеси вплоть до порога перколяции, или существует линия фиксированных точек, определяющая непрерывное изменение критических индексов с концентрацией.

В критическом поведении неупорядоченных систем необходимо особенно отметить область высоких концентраций примеси, близких к порогу перколяции. В ряде работ [8,9] были высказаны идеи нарушения при перколяционной концентрации спинов стандартной формы динамического скейлинга (1) с $f(x) = zx$ и универсальным динамическим индексом z . Предполагается, что при $p = p_c$ реализуется сингулярное динамическое скейлинговое поведение (1) с $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. При этом может быть введен зависящий от температуры эффективный динамический индекс $z(\tau \sim \xi^z)$ в виде

$$z = A \ln \xi_T + B \quad (3)$$

с $z \rightarrow \infty$ при $\xi_T \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$, $p = p_c$). Подобная форма индекса z позволяет объяснить anomalously большое его значение, измеренное при рассеянии нейтронов [10] в $\text{Rb}_2(\text{Mg}_{0.41}\text{Co}_{0.59})\text{F}_4$. К настоящему времени в

ряде работ по компьютерному моделированию критической динамики неупорядоченных систем при $p = p_0$ и вблизи порога перколяции [11,12] получено подтверждение квадратичной формы скейлинговой функции $f(x)$ для логарифма времени релаксации.

В предлагаемой работе осуществлено компьютерное моделирование методом Монте-Карло критической динамики двумерной модели Изинга как в однородном случае, так и с концентрацией спинов $p = 0.95, 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, 0.7$. Данное исследование критической динамики неупорядоченных систем впервые проведено в столь широком интервале изменения концентрации примеси, что позволило ответить на вопрос о степени универсальности динамического индекса двумерной модели Изинга и области концентраций, в которой начинают проявляться динамические эффекты аномального перколяционного поведения.

Неупорядоченная модель Изинга задавалась как система спинов $S_i = \pm 1$ с концентрацией p , связанных с $N = pL^2$ ($L = 400$) узлами квадратной решетки. Это дает $p2^N$ возможных конфигураций $\{S\}$ с энергией

$$E = -J \sum_{i,j} p_i p_j S_i S_j, \quad (4)$$

где суммирование осуществляется по всем ближайшим парам спинов, J характеризует энергию их взаимодействия, p_i — случайные переменные, описываемые функцией распределения

$$P(p_i) = p\delta(p_i - 1) + (1 - p)\delta(p_i) \quad (5)$$

и характеризующие распределенные по узлам решетки замороженные немагнитные атомы примеси (пустые узлы). Рассматривалась ферромагнитная система с $J > 0$.

Динамику модели Изинга принято описывать функцией условной вероятности $P_S(t) \equiv P(\{S\}, t)$, для которой задается кинетическое уравнение Глаубера

$$\frac{dP_S}{dt} = -P_S(t) \sum_{S'} W(S \rightarrow S') + \sum_{S'} W(S' \rightarrow S) P_{S'}(t), \quad (6)$$

где $W(S \rightarrow S')$ определяет вероятность перехода системы из микроскопического состояния, задаваемого конфигурацией спинов $\{S\}$, к состоянию с конфигурацией $\{S'\}$. Чтобы марковский процесс, описываемый уравнением (6), обладал свойством сходимости к равновесному состоянию гиббсовского ансамбля с $P_S = \exp(-E_S/kT)$, необходимо потребовать выполнения условия детального баланса $W(S \rightarrow S')P_S = W(S' \rightarrow S)P_{S'}$. Данное соотношение не определяет функцию W однозначно. Обычно W выбирают в виде функции Метрополиса

$$W(S \rightarrow S') = \begin{cases} \exp(-\Delta E_{SS'}/kT), & \Delta E_{SS'} > 0, \\ 1, & \Delta E_{SS'} \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

или в виде функции Глаубера

$$W(S \rightarrow S') = \frac{\exp(-\Delta E_{SS'}/kT)}{1 + \exp(-\Delta E_{SS'}/kT)}. \quad (8)$$

Соотношение $\langle A(t) \rangle = \sum_S A_S P_S(t)$ задает динамическую эволюцию величины A_S посредством зависимости $P_S(t)$ — решения уравнения (6).

Использование алгоритма Метрополиса, состоящего в случайном выборе спина S_i и его перевороте с вероятностью, задаваемой функцией W в (7), позволяет непосредственно реализовать динамику модели

Изинга с релаксацией намагниченности $m_S(t) = \frac{N}{i} \sum_i (S_i/N)$ к равновес-

ному значению, определяемому температурой термостата T . Можно связать шкалу времени t со шкалой $\{S\}$ последовательных конфигураций, считая, что N случайных выборок узлов системы осуществляется за единицу времени. Данная единица времени соответствует шагу Монте-Карло на спин. При моделировании критической динамики начальное состояние системы выбирается, когда все спины параллельны ($m_S = 1$), а температура системы равна критической. Критическая температура T_c для неупорядоченных систем является функцией концентрации примеси, понижаясь с ее ростом и обращаясь в нуль при пороговой концентрации $c_{imp} = 1 - p_c$. Для квадратной решетки изинговских спинов $p_c \cong 0.59$, а $T_c(p)$ равны [13]: $T_c(1.0) \cong 2.2692$, $T_c(0.95) \cong 2.0883$, $T_c(0.9) \cong 1.9004$, $T_c(0.85) \cong 1.7071$, $T_c(0.8) \cong 1.5079$, $T_c(0.75) \cong 1.2921$, $T_c(0.7) \cong 1.0751$ в единицах J/k . В данной работе для определения динамического индекса z использован метод Монте-Карло совместно с методом динамической ренормгруппы [14]. Для этого осуществлялась процедура блочного разбиения системы, когда блок b^d соседних спинов заменялся одним спином с направлением, определяемым направлением большинства спинов в блоке. Переопределенная система спинов образует новую решетку с намагниченностью m_b . Если намагниченность исходной решетки в процессе релаксации достигает некоторого значения m_1 за время t_1 , а переопределенная система достигает того же значения m_1 за время t_b , то использование двух систем после блочного разбиения с размерами блоков b и b' и определение промежутков времени t_b и $t_{b'}$, по истечении которых их намагниченности m_b и $m_{b'}$ достигнут одного и того же значения m_1 , позволяет определить динамический индекс z из соотношения

$$t_b/t_{b'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^z \quad \text{или} \quad z = \frac{\ln(t_b/t_{b'})}{\ln(b/b')} \quad (9)$$

в пределе достаточно больших b и $b' \rightarrow \infty$. Этот алгоритм был применен нами к однородной и примесным системам с размерами 400^2 и приведенными выше концентрациями спинов. Размер системы позволял осуществить разбиение на блоки с размерами $b = 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40$. Процедура блочного разбиения исходной спиновой и примесной конфигураций осуществлялась на основе критерия спиновой связности. Так, блок с размерами b^d считался спиновым и заменялся эффективным спином с направлением, определяемым направлением большинства спинов в блоке, если в блоке существовал спиновой кластер, связывающий противоположные грани блока. В противном случае блок считался примесным и заменялся пустым узлом в перенормированной решетке. Для систем с $p \geq 0.9$ осуществлялась процедура моделирования релаксации из 1000 шагов Монте-Карло на спин

при 10–20 прогонках с различными конфигурациями примесей, по которым и проводилось усреднение зависимостей $m_b(t)$. Для систем с $p = 0.85; 0.8; 0.75; 0.7$ процедура моделирования релаксации состояла соответственно из 2000, 4000, 8000, 16 000 шагов Монте-Карло на спин при 30 прогонках с различными конфигурациями примесей. Последнее обусловлено тем, что по мере приближения к порогу перколяции возрастают флуктуации в распределении примесей по решетке, а это требует и увеличения числа примесных конфигураций для усреднения зависимостей $m_b(t)$. Для примера на рис. 1 (a–c) приведены графики изменения исходной и перенормированных намагниченностей $m_b(t)$ от времени, усредненные по примесным конфигурациям, при концентрациях спинов $p = 1; 0.9; 0.75$ соответственно.

Компьютерный эксперимент по моделированию релаксационных свойств двумерной однородной модели Изинга, выполненный в [15], показал, что вблизи критической температуры изменение намагниченности характеризуется эффективной экспоненциальной зависимостью. Анализ кривых релаксации $m_1(t)$, проведенный нами при критической температуре $T_c(p)$ позволил выявить их степенную зависимость $m_1(t) \sim t^{-a}$. В интервале изменения m_1 от 0.8 до 0.67 были получены следующие значения показателей $a(p)$: $a(1) = a(0.95) = 0.056 \pm 0.006$; $a(0.9) = 0.055 \pm 0.006$; $a(0.85) = 0.050 \pm 0.008$; $a(0.8) = 0.043 \pm 0.008$; $a(0.75) = 0.037 \pm 0.008$; $a(0.7) = 0.031 \pm 0.010$. Если использовать из-

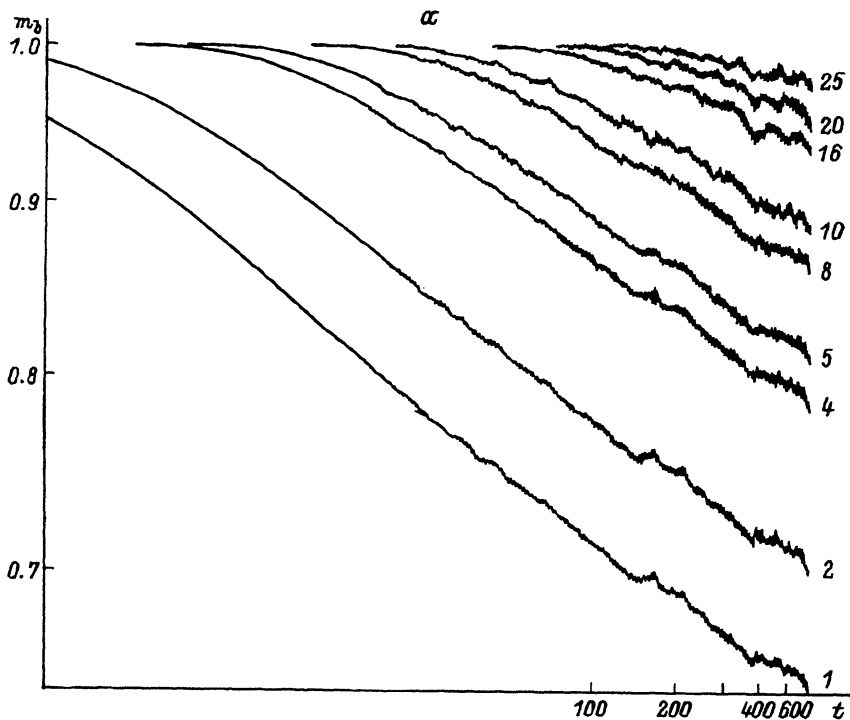


Рис. 1. Изменение исходной m_1 и перенормированных m_b намагниченностей от времени для однородной (a) и неупорядоченной модели Изинга с концентрацией спинов $p = 0.9$ (b), 0.75 (c).

Числа у кривых — значения b .

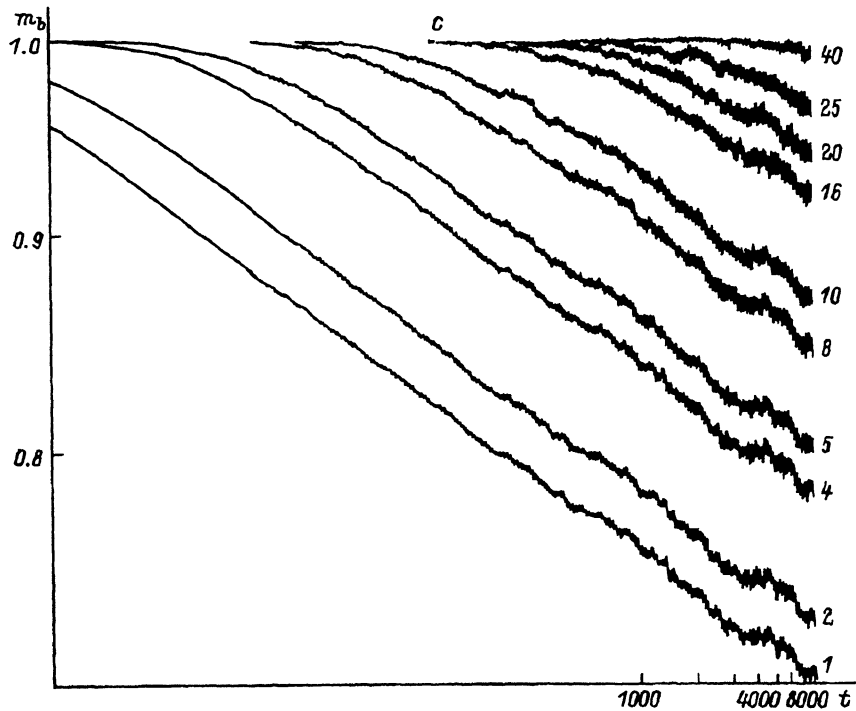
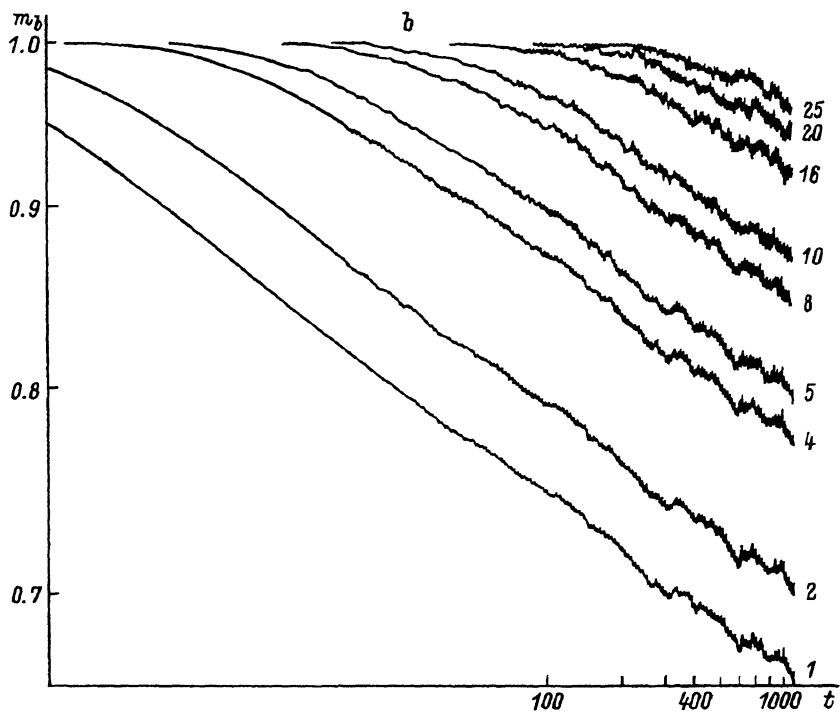


Рис. 1 (продолжение).

вестную скейлинговую форму для намагниченности

$$m(h, \theta) = \theta^\beta \tilde{m}(h/\theta^\Delta), \quad (10)$$

где $\theta = (T_c - T)/T_c$ — приведенная температура, h — внешнее магнитное поле, β и Δ критические индексы, то она может быть обобщена на случай временной зависимости в следующей форме

$$n(h, \theta, t) = \theta^\beta M(h/\theta^\Delta, t/\tau) = \theta^\beta M(h/\theta^\Delta, t/\theta^{-z\nu}) = t^{-\beta/z\nu} \tilde{M}(ht^{\Delta/z\nu}, \theta t^{1/z\nu}) \quad (11)$$

с использованием асимптотической зависимости времени релаксации $\tau \sim |\theta|^{-z\nu}$. Отсюда при $h = 0$ и $\theta = 0$ степенной характер релаксации отражается в виде следующего асимптотического соотношения

$$m(t) \sim t^{-\beta/z\nu}. \quad (12)$$

Согласно результатам компьютерного моделирования равновесного критического поведения неупорядоченной двумерной модели Изинга, полученным в работе [13], $\beta/\nu = 0.125 \pm 0.005$ ($p = 1.0$; 0.95; 0.9), 0.120 ± 0.010 ($p = 0.85$), 0.110 ± 0.010 ($p = 0.8$), 0.100 ± 0.020 ($p = 0.75$). Используя данные значения β/ν и показателей $a(p) = \beta/z\nu$ можно определить следующие значения динамического индекса $z(p)$: $z = 2.23 \pm 0.33$ ($p = 1.0$; 0.95); 2.27 ± 0.34 ($p = 0.9$); 2.40 ± 0.58 ($p = 0.85$); 2.56 ± 0.72 ($p = 0.8$); 2.70 ± 1.13 ($p = 0.75$). Высокая погрешность значений индекса z обусловлена прежде всего малостью средних значений показателей $a(p)$ и высокой относительной погрешностью их определения.

Для независимого определения значений индексов z лучше использовать соотношение (9). Однако выявленный степенной характер релаксации намагниченности при критической температуре позволил нам (в отличие от работ [14,15]) использовать другую, с нашей точки зрения более обоснованную процедуру обработки кривых для перенормированных намагниченностей $m_b(t)$ [16]. Так, кривые $m_b(t)$, построенные в двойном логарифмическом масштабе, аппроксимировались прямыми $\lg m_b = k_b \lg t + n_b$ по методу наименьших квадратов в интервалах изменения Δm_b , наиболее соответствующих степенному характеру их изменения. Затем осуществлялась процедура усреднения коэффициентов k_b с выделением среднего k_{av} и последующего определения параметров n_b прямых $\lg m_b = k_{av} \lg t + n_b$ путем их проведения через точки пересечения с прямыми $\lg m_b = k_b \lg t + n_b$ в середине интервалов Δm_b . В результате формула для определения z переходит в выражение

$$z = \frac{n_b' - n_b}{k_{av} \lg(b/b')}. \quad (13)$$

На основе соотношений (13) были получены наборы значений индекса z_b , соответствующих различным b (см. таблицу). Процедура ренорм-группового преобразования для примесных систем выходит на обоснованную асимптотику поведения m_b как функции параметра блочного разбиения b при больших значениях b , чем для однородной системы, поэтому нами были выделены для анализа значения индекса z_b , соответствующие $b \geq 4$ для однородной системы и $b \geq 5$ ($p = 0.95$), $b \geq 8$

Значения динамического индекса z_b , полученные по формуле (13),
и экстраполированные значения $z_{b=\infty}$ для системы 400^2 с различными концентрациями спинов p

b	p							
	1.0	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	
4	2.456 ± 0.068							
5	2.454 ± 0.061	2.439 ± 0.053						
8	2.401 ± 0.047	2.394 ± 0.048	2.433 ± 0.042					
10	2.357 ± 0.036	2.366 ± 0.034	2.417 ± 0.034	2.473 ± 0.040				
16	2.305 ± 0.046	2.334 ± 0.026	2.389 ± 0.041	2.469 ± 0.028	2.565 ± 0.048	2.805 ± 0.051		
20	2.285 ± 0.031	2.291 ± 0.032	2.332 ± 0.031	2.461 ± 0.016	2.557 ± 0.042	2.803 ± 0.056	2.954 ± 0.057	
25	2.242 ± 0.029	2.252 ± 0.023	2.269 ± 0.032	2.385 ± 0.029	2.547 ± 0.035	2.788 ± 0.054	2.942 ± 0.048	
40					2.532 ± 0.036	2.703 ± 0.035	2.912 ± 0.053	
$z_{b=\infty}$	2.24 ± 0.07	2.24 ± 0.06	2.24 ± 0.06	2.38 ± 0.05	2.51 ± 0.06	2.66 ± 0.07	2.88 ± 0.06	

($p = 0.9$), $b \geq 10$ ($p = 0.85$), $b \geq 16$ ($p = 0.8; 0.75$), $b \geq 20$ ($p = 0.7$) для примесных систем. Выделенная тенденция зависимости z от b позволила осуществить процедуру экстраполяции на случай $b \rightarrow \infty$, предпологая зависимость $z_b = z_{b=\infty} + \text{const} \cdot b^{-1}$. В результате были получены следующие значения $z(p)$: $z(1) = 2.24 \pm 0.07$, $z(0.95) = 2.24 \pm 0.06$, $z(0.9) = 2.24 \pm 0.06$, $z(0.85) = 2.38 \pm 0.05$, $z(0.8) = 2.51 \pm 0.06$, $z(0.75) = 2.66 \pm 0.07$, $z(0.7) = 2.88 \pm 0.06$. Относительно высокая погрешность значений $z(1)$ и $z(0.95)$ обусловлена более широким набором z_b , использованным для получения экстраполированного индекса $z_{b=\infty}$, в то время как увеличение погрешности для $z(p)$ с $p \leq 0.8$ связано с ростом флуктуаций в распределении примесей и увеличенным в связи с этим числом усредняемых примесных конфигураций.

Сравнивая значения индекса z , полученные на основе ренормгрупповой процедуры, с определенными посредством выделения показателей степенного характера релаксации намагниченности при $T = T_c(p)$, видно, что они находятся в достаточно хорошем согласии друг с другом. Однако более высокая точность получаемых значений динамического индекса z и независимость от определения статических индексов β и ν делает применение метода динамической ренормгруппы наиболее предпочтительным. Кроме того, есть основание полагать, что процедура динамической ренормгруппы позволяет получать значения z в меньшей степени зависящие от конечности размера L моделируемой системы при ее достаточно большой величине, чем процедура анализа кривой $m_1(t)$ критической релаксации намагниченности.

Анализ полученных значений индекса $z(p)$ показывает, что для концентраций $p \geq 0.9$ критическая динамика неупорядоченной двумерной модели Изинга принадлежит к тому же классу универсальности, что и критическая динамика однородной модели с индексом $z = 2.24 \pm 0.07$. Полученное значение индекса хорошо согласуется с результатами теоретико-полевого подхода [5] с $z = 2.277$ и ряда других работ по динамике однородной двумерной модели Изинга: $z = 2.22 \pm 0.13$ [17], 2.23 [18], 2.22 [19], 2.24 ± 0.04 [20], хотя существуют и иные результаты с $z = 2.125 \pm 0.010$ [21], 2.14 ± 0.02 [15], 2.13 ± 0.03 [22].

Для систем с концентрациями спинов $p \leq 0.85$ было обнаружено увеличение динамического индекса z по мере уменьшения p (рис. 2). Данные изменения $z(p)$ могут быть интерпретированы как результат проявления кроссоверных эффектов перколяционного поведения. Было выявлено, что зависимость индекса z от p для $p = 0.7, 0.75, 0.8, 0.85$

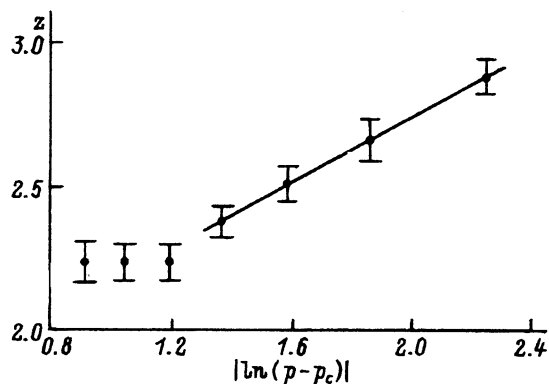


Рис. 2. Зависимость динамического критического индекса z от концентрации спинов p в логарифмическом масштабе $|\ln(p - p_c)|$. Прямая задает аппроксимацию зависимости $z(p)$ логарифмической функцией $A'|\ln(p - p_c)| + B'$.

хорошо описывается логарифмической функцией

$$z = A' |\ln(p - p_c)| + B' \quad (14)$$

с $A' = 0.56 \pm 0.07$, $B' = 1.62 \pm 0.07$. Полученная зависимость (14) может быть сопоставлена с аномальной скейлинговой зависимостью (3) для эффективного динамического индекса z при $\xi_T \cong \xi_p = \xi_0(p - p_c)^{-\nu_p}$ и $A' = A\nu_p$, $B' = B + A \ln \xi_0$, где ν_p — индекс корреляционной длины ξ_p для явления перколяции. Равенство $\xi_T \cong \xi_p$ соответствует условиям проводимого компьютерного эксперимента при $T = T_c(p)$ и p близких к p_c , так как при использовании ряда известных соотношений для модели Изинга может быть получено, что $\xi_T/\xi_p \cong \exp[2J\nu_T(T - T_c)/kTT_c]$ при $p \rightarrow p_c$ и $T \rightarrow T_c(p)$. Сравнение с результатами исследования методом Монте-Карло зависимости времени релаксации τ от температуры [11] при $p = p_c$ ($A = 0.62 \pm 0.12$) и от концентрации p при $p < p_c$ [12] ($A = 0.48$) показывает, что получаемое нами значение $A = 0.42 \pm 0.07$ при $\nu_p = 4/3$ хорошо согласуется с результатами работы [12].

Таким образом, в данной работе получено подтверждение сингулярного динамического скейлингового поведения вблизи порога перколяции, эффекты которого начинают проявляться для двумерной модели Изинга при концентрациях спинов $p \leq 0.85$. В данном явлении нашло свое отражение общее свойство динамического поведения примесных систем в длинноволновом пределе, которое в отличие от статического характеризуется другими законами сохранения в рассеянии спиновых флуктуаций на примесях. В результате в критической динамике присутствие примесей сказывается сильнее, чем при описании равновесных свойств в критической точке.

Список литературы

- [1] Hohenberg P.C., Halperin B.I. // *Rev. Mod. Phys.* **49**, 3, 435 (1977).
- [2] Harris A.B. *J. Phys.* **7**, 9, 1671 (1974).
- [3] Хмельницкий Д.Е. *ЖЭТФ* **68**, 5, 1960 (1975).
- [4] Jug G. *Phys. Rev.* **27**, 1, 609 (1983).
- [5] Прудников В.В., Вакилов А.Н. *ЖЭТФ* **101**, 6, 1853 (1992).
- [6] Birgeneau R.J., Cowley R.A., Shirane J. *Phys. Rev.* **B27**, 10, 6747 (1983).
- [7] Dotsenko V.S., Dotsenko V.S. *J. Phys.* **15**, 9, L557 (1982).
- [8] Henley C.K. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 18, 2030 (1985).
- [9] Harris C.K., Stinchcombe R.B. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 9, 869 (1986).
- [10] Aeppli G., Guggenheim H., Uemura Y. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 9, 942 (1984).
- [11] Jain S. *J. Phys. A* **19**, 11, L667 (1986).
- [12] Biswal B., Chowdhury D. *Phys. Rev.* **A43**, 8, 4179 (1991).
- [13] Heuer H.-O. *Europhys. Lett.* **16**, 5, 503 (1991).
- [14] Jan N., Moseley L.L., Stauffer D. *J. Stat. Phys.* **33**, 1, 1 (1983).
- [15] Kalle C. *J. Phys. A* **17**, 14, L801 (1984).
- [16] Прудников В.В., Вакилов А.Н. *ЖЭТФ* **103**, 3, 962 (1993).
- [17] Tobochnik J., Sarker S., Cordery R. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 29, 1417 (1981).
- [18] Katz S.L., Gunton J.D., Liu C.P. *Phys. Rev.* **B25**, 10, 6008 (1982).
- [19] Lage E.J.S. *J. Rhy. C* **19**, 4, L91 (1986).
- [20] Poole P.H. and Jan N. *J. Phys. A* **23**, 8, L453 (1990).
- [21] Racz Z. and Collins M.F. *Phys. Rev.* **B13**, 6, 3074 (1976).
- [22] Williams J.K. *J. Phys. A* **18**, 1, 49 (1985).