

©1995

ОСОБЕННОСТИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

Е. Д. Эйдельман

Санкт-Петербургский химико-фармацевтический институт
 Поступило в Редакцию 12 мая 1994 г.

Анализируется новый термоэлектрический механизм, который, как и известные архимедовский и термокапиллярный, может приводить к неустойчивости подогреваемой жидкости и возникновению ячеистого движения. Рассмотрение ведется на примере жидких кристаллов (ЖК) различных типов. Проведено сравнение с возможными механизмами возникновения термической конвекции, а также с термоэлектрическим механизмом возбуждения в жидких полупроводниках. Выявлено, что при сохранении возможностей уже известных в термоэлектрической конвекции (возможность конвекции при подогреве сверху, со свободной поверхности, преобладание в тонких слоях и т.п.), выявленных при анализе явления в жидких полупроводниках (полуметаллах), возможны и новые. В нематических жидких кристаллах (НЖК) возбуждение термоэлектричеством существенно облегчается из-за наличия упругих свойств, передающих кручение, и анизотропию диссипации. В смектических жидких кристаллах (СЖК) возможно взаимодействие второго звука, присутщего слоистым средам с термоэлектрическим полем, приводящее к колебательному характеру нарастания при возбуждении вместо обычного апериодического. В холестерических жидких кристаллах (ХЖК) возможно новое проявление термоэлектричества, связанное с зависимостью шага холестерической спирали, а следовательно, и диэлектрической проницаемости такой среды от температуры. Изучено, как это явление взаимодействует с релеевским и обычным термоэлектрическим механизмами возбуждения. Оказалось, что такое взаимодействие приводит к конвекции с осциллирующим нарастанием, причем с очень резкой (пропорциональной пятнадцатой степени) зависимостью частоты колебаний от толщины слоя холестерика.

1. Целью работы является анализ взаимодействия гидродинамических и электрических свойств жидких кристаллов (ЖК) при возбуждении в них термической конвекции. ЖК обладают, как правило, полупроводниковыми свойствами. В частности, в них существенны и термоэлектрические свойства (γ — коэффициент термоэдс), которые могут существенно изменять условия возбуждения термической конвекции [1]. Нагрев $A = |\nabla T|$ — разность температур на горячей и холодной поверхностях жидкости — может приводить к возникновению ячеистого движения в достаточно тонких слоях (толщиной h) при подогреве сверху, если безразмерное число

$$\mathcal{E} = I^2 = \frac{\varepsilon \gamma^2 A^2 h^2}{\rho \nu \kappa}, \quad (1)$$

(ε , ν , κ — соответственно коэффициенты диэлектрической проницаемости, кинематической вязкости и температуропроводности, ρ — плот-

ность жидкости) превышает некоторое критическое значение $\mathcal{E}^* > 40$. Такой эффект невозможен под действием лишь сил или поверхностного натяжения.

С другой стороны [2,3], гидродинамические свойства ЖК (наличие директора \mathbf{n}) сами по себе также влияют на условия возбуждения. Анизотропия свойств присуща всем разновидностям ЖК. Все коэффициенты (ν , κ , ε и др.) становятся тензорными величинами. Качественно же зачастую достаточно наряду с изотропной частью ввести анизотропную (ν_a , κ_a , ε_a и т.д.). Причем, например, температуропроводность запишется как

$$\kappa_{ij} = \kappa \delta_{ij} + \kappa_a n_i n_j. \quad (2)$$

Следствием того, что ЖК могут передавать не только давление, но и кручение (упругий коэффициент кручения G), является появление параметра $\nu_a \kappa_a / G$, который может существенно понизить порог возникновения неустойчивости. Такой эффект исследовался на примере нематических жидких кристаллов (НЖК) [4]. Сметические жидкие кристаллы (СЖК) типа A характеризуются слоистой структурой (упругий коэффициент деформации слоев B). Это приводит к тому, что нарастание конвекции в такой среде происходит не аperiodически, как в ньютоновской жидкости или в НЖК, а осциллируя [5], с частотой, $B^{1/2}/h$. Наконец, в холестерических жидких кристаллах (ХЖК) из-за наличия зависимости характеристик среды (спиральности) от нагревания возможны изменения как в величине порога возбуждения [6], так и в характере нарастания [7].

Далее исследуется взаимодействие этих свойств (электрических [1] и гидродинамических [4-7]) различных типов ЖК.

2. Взаимодействие термоэлектрических и гидродинамических свойств в НЖК рассмотрим сначала качественно.

Флуктуация температуры T_1 , возникающая при отклонении температуры от равновесной, сопровождается появлением электрического поля $\gamma \nabla T_1$ и связанного с этим полем объемного заряда с плотностью $\varepsilon \gamma \Delta T_1$. Присутствие этого заряда в термоэлектрическом («внешнем») поле γA приводит к возникновению плотности силы электрической природы $\varepsilon \gamma^2 A \nabla T_1$. Сила же в свою очередь, преодолевая силы вязкости, приводит к движению жидкой среды со скоростью $v \simeq \varepsilon \gamma^2 A T_1 / (\rho \nu)$.

С другой стороны, в анизотропной жидкости (в НЖК) поток тепла $\kappa \nabla T_1$, возникающий из-за флуктуации температуры, расходуется на работу, связанную с отклонением направления молекул (на отклонение директора ∇n). Этот расход будет равен $\kappa_a A |\nabla n_1|$. Само же отклонение директора возникает из-за движения в среде с анизотропной вязкостью, где передается кручение и изгиб. Поэтому $G |\nabla n_1| \simeq \nu_a v$.

Таким образом, поток тепла расходуется на конвективный перенос $v A$ и повороты директора $v A \kappa_a \nu_a / G$. Поскольку этот поток создан движением, порожденным электрическими силами, то получаем условие, при котором работа этих сил преодолет диссипацию

$$\frac{\varepsilon \gamma^2 A^2 h^2}{\rho \nu \kappa} \left(1 + \frac{\kappa_a \nu_a}{G} \right) \gtrsim 1. \quad (3)$$

Отсюда видно, что термоэлектрическое число \mathcal{E} получает добавку того же вида [4], что и число Рэлея.

Конечно, оценка (3) дает лишь необходимое условие возбуждения (условие Буссинеска [8]). Для получения достаточного условия требуется решить краевую задачу.

Уравнения гидродинамики НЖК с учетом термоэлектрического эффекта, линеаризованные по малым отклонениям скорости v , температуры $T_1 = T - T_0$, давления $p_1 = p - p_0$, плотности $\rho_1 = \rho - \rho_0$ и директора $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} - \mathbf{n}_0$, имеют [2,3] вид:

уравнение движения

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{1ij} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \rho_1 g_i = \varepsilon_{ij} \gamma_{jk} \gamma_{km} \nabla T_1 \frac{\partial T_0}{\partial x_m}, \quad (4)$$

уравнение переноса тепла

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa_{ij} \frac{\partial T_1}{\partial x_j} + \kappa_{1ij} \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) = -v_i \frac{\partial T_0}{\partial x_i}, \quad (5)$$

уравнение директора

$$\frac{\partial \Pi_{1ij}}{\partial x_j} + (\nu_2 + \nu_3) n_{0j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + (\nu_2 - \nu_3) n_{0j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = m_1 n_{0i}. \quad (6)$$

Кроме введенных ранее применены обозначения

$$-\sigma_{ij} = \nu_1 n_i n_j n_k n_m d_{km} + \nu_2 n_j N_i + \nu_3 n_i N_j + \nu_4 d_{ij} + \nu_5 n_i n_k d_{kj} + \nu_6 n_j n_k d_{ki} \quad (7)$$

— тензор вязкости, в который входит тензор

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

и вектор

$$N_i = v_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} n_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l}, \quad (9)$$

а также

$$\Pi_{ij} = \partial F / \partial \left(\frac{\partial n_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

— тензор кручения, в который входит свободная энергия кручения

$$F = \frac{1}{2} G \left[\left(\frac{\partial n_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\varepsilon_{ijk} n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_j} \right)^2 + \left(n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_i} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Наконец, $m_1 n_{0i}$ — молекулярное поле, величина направленная по директору \mathbf{n}_0 , которую в дальнейшем можно исключить умножением уравнения директора (6) векторно на \mathbf{n}_0 .

В уравнениях применена тензорная нотация с обычным правилом суммирования и общепринятыми обозначениями единичных симметричного δ_{ij} и антисимметричного ε_{ijk} тензоров.

Среда считается несжимаемой ($\operatorname{div} v = 0$), и поэтому можно считать, что $\rho_1 = -\beta\rho_0 T_1$ (β — коэффициент теплового расширения). В уравнении переноса тепла (5) в таком приближении можно пренебречь влиянием дивергенции на диссипацию, а в уравнении дивергенции (6) — влиянием потоков тепла на дивергенцию. Все коэффициенты вязкости, кроме $\nu_4 = \nu$, отражают наличие анизотропии и по порядку величины равны ν_a . Между коэффициентами вязкости имеется [2] связь $\nu_2 + \nu_3 = \nu_6 - \nu_5$. Другие тензорные коэффициенты ε_{ij} , γ_{ij} имеют ту же форму, что и коэффициент температуропроводности, и могут быть записаны в форме аналогичной формуле (2).

Направим ось z по направлению n_0 . Задача решалась как в случае, когда в равновесии дивергенция n_0 перпендикулярна слою (тогда $A = \partial T_0 / \partial z$), так и когда n_0 направлен вдоль слоя по оси x (тогда $A = \partial T_0 / \partial x$). В обоих случаях из условия, при котором дивергенция есть единичный вектор с $n_0^2 = 1$, следует, что отклонением дивергенции от равновесного в направлении n_0 можно пренебречь.

Тогда оказывается (после исключения градиентных членов в уравнении движения (4) взятием оператора $\operatorname{grad} \operatorname{rot}$), что уравнения для v_y и n_{1y} отщепляются. Поэтому дивергенция можно выразить через угол θ , показывающий отклонение дивергенции от равновесного направления, и считать, что $n_1 = n_{1x} = \sin \theta \simeq \theta$.

В результате уравнение дивергенции примет вид

$$G\Delta\theta = (\nu_2 + \nu_3) \frac{\partial v_z}{\partial x} + (\nu_2 - \nu_3) \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (12)$$

а уравнение переноса тепла

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \right) T_1 \pm v_x \frac{\partial T_0}{\partial x} \pm v_z \frac{\partial T_0}{\partial z} = \kappa_a \left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \pm \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]. \quad (13)$$

Верхний знак соответствует подогреву снизу, а нижний — сверху, т.е. соответственно против или по направлению силы тяжести (совпадение или несовпадение n_0 с направлением g значения не имеет). Преобразование уравнения движения очевидно, но само уравнение становится громоздким.

Последовательное исключение переменных показывает, что уравнение для одной величины (v_z или v_x) получается восьмой степени и содержит лишь четные пространственные производные.

Для полного решения необходимы еще граничные условия. Эти условия также будут однородны.

Таким образом, задача о возбуждении термоэлектрической конвекции в НЖК — это двойная задача на собственные значения. Однородной системе уравнений соответствуют однородные же граничные условия.

Среди различных типов граничных условий, которыми можно дополнить записанную выше систему уравнений, обязательно должны быть условия типа «условий свободных и изотермических границ». Условия на компоненту скорости, перпендикулярную слою и T_1 (шесть условий [8]), дополняются еще двумя условиями $n_1 = 0$ на граничных поверхностях. Теперь, как обычно [8], можно показать, что последовательное рассмотрение уравнений на границах приводит к условию,

при котором все четные производные от v_z (или v_x) по z (или x) исчезают. Это имеет место, так как уравнение содержит лишь четные производные по координате вдоль оси нормальной к слою.

Как и в изотропной жидкости, в НЖК неустойчивость нарастает в момент возникновения аperiодически, а симметрия (трансляционная) слоя позволяет указать зависимость решения от координат, откладываемых по осям вдоль слоя.

В результате оказывается, что при любой направленности n_0 решение можно записать в виде пропорциональном

$$\sin(k_x x) \sin(k_z z) \sin(k_y y), \quad (14)$$

где компонента волнового вектора k в направлении поперек слоя равна π/h , а компонента вдоль $k_{\perp} = \pi/\lambda$. Величина $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, а λ и h — размеры ячейки в соответствующих направлениях.

Условие возбуждения тогда принимает вид зависимости нагрева A от k_{\perp}^2/k_z^2 или k_{\perp}^2/k_x^2 . Минимизация такой зависимости определяет разность температур горячей T_h и холодной T_c поверхностей, необходимую для возбуждения (ведь $A = (T_h - T_c)/h$) неустойчивости при некотором критическом значении λ/h . Решение задачи на собственные значения тем самым обходится.

Опуская громоздкие вычисления, запишем сразу условие возбуждения

$$\pm R_a + \pi^2 \mathcal{E}_a (1+b) = \pi^4 \frac{1+b}{b} \frac{1+b+P_a b}{1+P_r b} [b^2(1+P_2) + b(2+P_1 - P_2 + P_3) + 1 + P_3], \quad (15)$$

где b равно k_{\perp}^2/k_z^2 или k_{\perp}^2/k_x^2 соответственно при направлении n_0 поперек или вдоль слоя.

В это условие вошли безразмерные числа типа числа Рэлея и термоэлектрические числа — характеристики условия возбуждения

$$R_a = R(1 + \Gamma) \simeq \frac{\beta g A h^4}{G} \frac{\kappa_a \nu_a}{\kappa \nu}, \quad (16)$$

$$\Gamma_a^2 = \mathcal{E}_a = \mathcal{E}(1 + \Gamma) \simeq \frac{\varepsilon \gamma^2 A^2 h^2}{\rho G} \frac{\kappa_a \nu_a}{\kappa \nu}. \quad (17)$$

Γ — число, характеризующее особые свойства НЖК.

$$\Gamma = \Gamma_1 \frac{k_x^2 - k_z^2}{k^2} + \Gamma_2 \frac{k_x^2 + k_z^2}{k^2}, \quad (18)$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{\kappa_a \nu_2}{G}, \quad \Gamma_2 = \frac{\kappa_a \nu_3}{G}. \quad (19)$$

В условие возбуждения (15) вошли числа типа числа Прандтля

$$P_a = \frac{\kappa_a}{\kappa}, \quad P_1 = \frac{2\nu_1}{\nu}, \quad P_2 = \frac{\nu_2 - \nu_5}{\nu}, \quad P_3 = \frac{\nu_3 + \nu_6}{\nu}, \quad P_r = \frac{\nu_2}{\nu_3}. \quad (20)$$

Для изотропной жидкой среды условие возбуждения переходит в условие

$$-(1+b)^3 \pm \frac{R}{\pi^4} b + \frac{\mathcal{E}}{\pi^2} b(1+b) = 0, \quad (21)$$

исследованное в [1] как условие возбуждения в жидкости при учете термоэлектрического эффекта. Напомним, что в слоях с толщиной гораздо большей чем

$$h_{RI} = \left(\frac{\nu \kappa \varepsilon \gamma^2}{\rho \beta^2 g^2} \right)^{1/6} \quad (22)$$

конвекция возбуждается лишь при подогреве снизу, когда число R превышает критическое значение $R^* = 27\pi^4/4 \simeq 690$ при соотношении размеров возбуждаемой ячейки $\lambda_R^*/h \simeq 3$. В достаточно тонких слоях с $h \ll h_{RI}$ возможно возбуждение и при подогреве сверху, если число \mathcal{E} превышает значение $\mathcal{E}^* = 4\pi^2 \simeq 40$ при $\lambda_I^*/h \simeq 2$.

Используя значения, взятые из [2], получаем плотность $\rho \simeq 1 \text{ г/см}^3$, полагая все коэффициенты вязкости одного порядка и равными примерно $10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ (причем их сумму и разность также нужно считать величинами того же порядка). Аналогично оценивается и коэффициент температуропроводности κ , величину же κ_a нужно брать на порядок меньше. Поэтому числа типа числа Прандтля также можно считать имеющими одинаковый порядок. При качественных оценках полагалось $P_r \simeq P_1 \simeq |P_2| \simeq P_3 \simeq 1$, $P_a \simeq 0.1$. При численных расчетах эти величины считались меняющимися от 0.1 до 10. Оценки и расчеты показали, что критические значения R_a^* и \mathcal{E}_a^* из-за изменения этих чисел меняются незначительно (не на порядок), причем могут как увеличиваться, так и уменьшаться. Величины λ^*/h оказались еще устойчивее, их изменение составляет не более 20% (фактически еще меньше).

Гораздо сильнее влияние кручения. Полагая $G \simeq 10^{-6} \text{ см}^4/\text{с}$, получим, что числа $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \simeq \Gamma$, характерные именно для НЖК, имеют порядок $1 \div 100$, т.е. являются большими параметрами. Их влияние приводит к изменению критических значений нагрева A^* (ведь в данной среде НЖК меняется из-за внешнего воздействия только $T_h - T_c$) на порядки, причем всегда в сторону уменьшения. Соотношение же размеров ячейки λ^*/h из-за действия упругих сил вообще не меняется, так как эта величина определяется при минимизации из условия $\partial A/\partial b = 0$ и от величины Γ_1, Γ_2 практически не зависит.

Критические значения безразмерных чисел определяющих порог возбуждения неустойчивости в НЖК будут:

при подогреве снизу

$$R_a^* \simeq 1000, \quad R^* \simeq 1000/\Gamma \simeq 100, \quad A_R^* \simeq 100 \frac{\kappa \nu}{\beta g h^4}, \quad (23)$$

а при подогреве сверху

$$\mathcal{E}_a^* \simeq 50, \quad \mathcal{E}^* \simeq 50/\Gamma \simeq 5, \quad A_I^* \simeq \left(5 \frac{\rho \kappa \nu}{\varepsilon \gamma^2 h^2} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

т.е. возможно возбуждение при значительно меньших нагревах, чем те, которые необходимы для возбуждения ячейистого движения в ньютоновской жидкости с теми же параметрами и в слое той же толщины.

Соотношение же размеров ячейки, возникающей в момент возбуждения в НЖК при этом, такое же, как и в обычной жидкости.

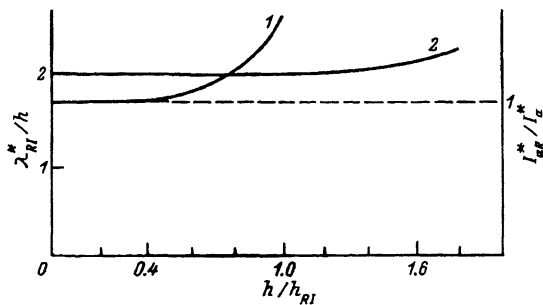


Рис. 1. Стабилизирующее действие сил плавучести на возбуждение ячеек конвекции в НЖК термоэлектрическим эффектом при подогреве сверху.

1 — значения термоэлектрического числа $I_{a,R}^*$, задающего порог возбуждения в этих случаях ($I_a^* = 2\pi$), 2 — значения продольного размера ячейки λ_{RI}^* в момент возбуждения в НЖК. Обе кривые построены в зависимости от толщины h слоя НЖК (h_{RI} — такая толщина слоя, при которой действие сил плавучести и термоэлектрических сил уравновешиваются).

Условия возбуждения при совместном действии на НЖК сил плавучести и термоэлектрических сил можно исследовать на основе уравнения (15) и соотношения

$$R_a/I_a = (h/h_{RI})^3 \quad (25)$$

между числами, задающими возбуждение.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 1–3 и фактически совпадают с результатами, изложенными в [1].

Таким образом, анизотропия теплопроводности существенно изменяет условия возбуждения термоэлектрической конвекции в НЖК, а именно, практически не меняя размеров ячейки, приводит к сильному уменьшению нагрева, необходимого для возникновения движения в НЖК, по сравнению с нагревом, необходимым для приведения в изотропной жидкости.

3. Подобно НЖК, жидкокристаллические вещества смектического типа также могут проявлять особые свойства при возбуждении в них термоэлектрической конвекции. Далее будут рассматриваться СЖК только с параллельными и эквидистантными слоями типа А (СЖКА) [2,3].

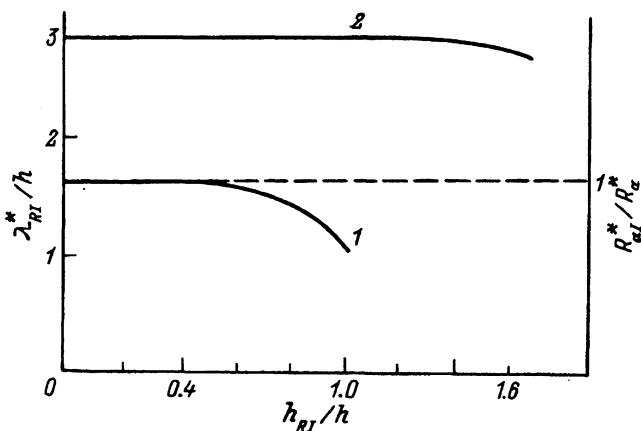


Рис. 2. Дестабилизирующее действие термоэлектрических сил на возбуждение ячеек конвекции в НЖК силами плавучести при подогреве снизу.

1 — значение числа, аналогичного числу Релея, R_{aI}^* , задающего порог возбуждения ($R_a^* = 27\pi^4/4$). Остальные обозначения те же, что и на рис. 1.

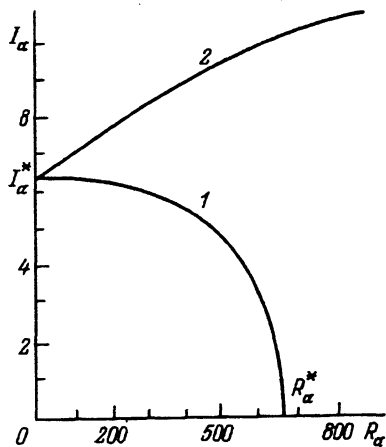


Рис. 3. Кривые нейтральной устойчивости для слоя НЖК, в котором действуют силы плавучести и термоэлектрические силы.

R_α — аналог числа Рэлея в НЖК, I_α — термоэлектрическое число (точные значения R_α^* и I_α^* см. в подписи к рис. 1). 1 — подогрев снизу, 2 — подогрев сверху. Характер кривых не зависит от типа граничных условий.

Пусть на такое начальное состояние наложено малое по амплитуде, но длинноволновое по сравнению с толщиной слоя возмущение. Фактически это означает, что и при наложении возмущения направление директора остается неизменным и $n_1 = 0$. В невозмущенном состоянии единичный по величине директор направлен по оси z нормально как к слоям смектика, так и к жидкому слою в целом. Кроме директора удобно ввести и еще одну характеристику — смещение слоев смектика u . Рассматриваются только длинные (по сравнению с толщиной жидкого слоя h) возмущения директора. В среде с такой слоистой структурой, как известно, невозможно кручение, а из-за несжимаемости невозможен изгиб в направлении вдоль слоя, в результате в свободной энергии деформации (11) остается только первое слагаемое. Однако в эту свободную энергию необходимо добавить упругую энергию сжатия слоев, равную

$$\frac{1}{2} B \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \quad (26)$$

где B — особая упругая постоянная, связанная со скоростью второго звука $s = B^{1/2}$. Именно этот вклад в свободную энергию определяет специфические особенности СЖКА.

В уравнении движения (4) в соответствии с этим появится справа новая упругая сила $\rho_0 B \delta_{iz} \partial^2 u / \partial z^2$, направленная перпендикулярно к слою. Со смещением слоев должен быть связан и вклад в теплопроводность [5]. А именно в анизотропную часть коэффициента температуропроводности (2) необходимо включить еще и

$$(\kappa_{s1} \delta_{iz} \delta_{kz} + \kappa_{s2} \delta_{ik}) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (27)$$

В уравнении переноса тепла (5) тогда появится слева член $\mp \kappa_s A \partial^2 u / \partial z^2$, связанный с диссипацией энергии при сжатии слоев (обозначено $\kappa_s = \kappa_{s1} + \kappa_{s2}$).

При отсутствии «просачивания» — проникновения слоев смектика сквозь друг друга — уравнения задачи будут представлять собой те же уравнения движения (4) и передачи тепла (5) или (13) с включением

в них новых, указанных выше членов. Чтобы избежать громоздкости, будем пренебрегать и величиной изгиба слоев. Учет этой величины (с коэффициентом G) привел бы к тем же результатам, которые были получены в разделе 2 для нематиков. Такое приближение хорошо согласуется с принятым выше условием $n_1 = 0$.

Уравнение же директора ((6) или (12)) в такой среде в рассматриваемом приближении может быть заменено соотношением

$$v_z = \partial u / \partial t.$$

Граничные условия для слоя среды СЖКА полностью совпадают с условиями на границе НЖК, ведь ясно, что граница слоя жидкости в целом обязательно совпадает с границей самого последнего слоя СЖКА.

Поскольку в уравнения системы, описывающие возбуждение неустойчивости в СЖКА, добавились (по сравнению с уравнениями для НЖК) лишь четные производные, то снова возможно решение с вещественными k_{\perp} и k_z . Важно, однако, то, что нарастание возникающих флуктуаций происходит, осциллируя с некоторой частотой ω . Условие обращения в нуль мнимой части частоты есть условие возбуждения.

Из системы (4), (5) с соответствующими изменениями легко получить дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 k^2 + i\omega\nu k^4 - Bk_{\perp}^2 k_z^2)(\omega + i\kappa k^2 + i\kappa_s k_z^2)k^2 + \omega \left(\pm \beta g A k_{\perp}^2 + \varepsilon \gamma^2 A^2 k_{\perp}^2 \frac{k^2}{\rho} \right) = 0. \quad (28)$$

Если бы была учтена анизотропия вязкости в соответствии с формулами (7)–(9), то в записанном уравнении необходимо было бы вместо νk^4 написать

$$\nu_4 k^4 + \nu_1 k_{\perp}^2 k_z^2 + \nu_5 k^2 k_{\perp}^2 + 0.5\nu_6 k^2 k_z^2. \quad (29)$$

Очевидно, рассматриваемая неустойчивость — проявление нарастания (или затухания) внутренних волн второго звука в СЖКА. Если k_{\perp} и k_z — величины одного порядка, то частота осцилляций при возбуждении мало отличается от известной [2] частоты второго звука $\omega_s = sk_{\perp}k_z/k$ и ее можно представить как $\omega = \omega_s + i\delta' + \delta$, где δ и δ' — некоторые поправки. Из дисперсионного уравнения (28) в этом случае получаем значение

$$\delta' = (\beta g A k_{\perp}^2 \pm \varepsilon \gamma^2 A^2 k_{\perp}^2 k^2 / \rho) / (\omega_s k^2) \quad (30)$$

и $\delta = \nu k^2$. Очевидно, что условие возбуждения в этом случае $\delta' = 0$ приводит к неустойчивости, возможной лишь при подогреве сверху (нижний знак в (30)) и лишь пока термоэлектрический механизм действует сильнее и не стабилизируется обычным рэлеевским. Таким образом, взаимодействие внутренних волн (второго звука) в СЖКА с термоэлектрическим полем может приводить к новому виду неустойчивости при подогреве сверху. Она наступает, когда безразмерное число

$$I_s = \frac{\varepsilon \gamma^2 A}{\beta g \rho h^2} \quad (31)$$

достигает значения $I_s^* = \pi^{-2}$. Возбуждение приводит к движению с $k_{\perp} = 0$, т.е. в виде волн (валов).

Однако используя значения (см. [1,2]) $\gamma = 10 \div 100 \mu\text{V/K}$, $\varepsilon = 10^{-10} \text{ F/m}$, $\beta = 10^{-5} \div 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, найдем, что приемлемые значения нагрева $A = 10^2 \div 10^3 \text{ K/m}$ достижимы лишь в микронных слоях смектика, что невозможно.

Сосредоточимся поэтому на другой возможности возбуждения, возникающей при подогреве. В условиях возбуждения, когда частота вещественна, отделим в уравнении (28) вещественную и мнимую части. Тогда условия существования неустойчивости запишутся как

$$\pm \frac{R}{\pi^4} + \frac{\varepsilon}{\pi^2}(1+b) = \frac{(1+b)^3}{b} + \frac{Bh^2}{\kappa(\kappa+\nu)\pi^2}, \quad (32)$$

а возмущения нарастают с частотой

$$\omega = \frac{B}{h^2} \frac{\kappa}{\kappa+\nu} \pi^2 \frac{b}{1+b}. \quad (33)$$

Величина κ учитывает наличие κ_s .

Таким образом, фактически условия возбуждения термической конвекции в СЖКА мало отличаются от условий возбуждения в обычном жидком полупроводнике [1]. Но возбуждение происходит колебательно, а не аperiodически.

Условие минимизации в толстых слоях (см. (22)) при подогреве снизу дает

$$R_s^* \simeq R^* + \frac{Bh^2\pi^2}{\kappa(\kappa+\nu)}, \quad \lambda^*/h \simeq 2. \quad (34)$$

Таким образом, в этих условиях происходит существенное изменение (затруднение) условий возбуждения рэлеевской конвекции. Фактически в любых реальных слоях ($h > 10^{-6} \text{ m}$) имеем

$$\frac{Bh^2\pi^2}{\kappa(\kappa+\nu)} \gg R^* \simeq 10^3, \quad (35)$$

поскольку $s \simeq 10^3 \text{ m/s}$ [2].

В тонких слоях при подогреве сверху

$$\varepsilon_s^* \simeq \varepsilon^* + \frac{Bh^2}{\kappa(\kappa+\nu)} \gg \varepsilon^*, \quad \lambda^*/h \simeq 3, \quad (36)$$

возбуждение также затрудняется и, можно сказать, вообще фактически невозможно.

При подогреве снизу в слоях с толщиной $h \gtrsim 10 \mu\text{m}$ возбуждение все же возможно при реально достижимых нагревах $A \gtrsim 10^2 \text{ K/cm}$. При этом флуктуации нарастают с частотой $\omega \simeq 1 \div 10 \text{ Hz}$. В заключение этого раздела отметим, что в [5] допущена ошибка в знаке постоянной B . Поэтому результаты, приведенные там, должны быть пересмотрены, хотя вывод об осциллирующем характере возбуждения сохраняется полностью. Причем возбуждение осцилляций связано не с наличием псевдовектора [8], а с возможностью распространения второго звука.

4. Переходя к исследованию взаимодействия гидродинамических и электрических явлений при возбуждении термоэлектрической конвекции в ХЖК, отметим, что в этих средах возможны все явления, исследованные в разделе 2 на примере нематиков. Обратимся, однако, к явлениям, характерным именно для холестериков.

В ХЖК возможно возбуждение осциллирующей при нарастании конвекции. Как обычно [8], причиной такой возможности является именно наличие аксиального вектора, связанного с направлением осей спиралей молекул ХЖК. Величина такого вектора определяется обратным шагом спирали q , сильно зависящей от температуры. Эта зависимость может быть столь сильной [2], что не только $h|\nabla q|/q \gg 1$, но и

$$\frac{hA}{T} \frac{d \ln q}{d \ln T} \simeq 1, \quad (37)$$

хотя $hA/T \ll 1$ — малая величина.

Сильное изменение шага спирали приводит к сильной же зависимости тензора диэлектрической проницаемости от температуры. В плоскости слоя имеем [6]

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik} + (\varepsilon_a)_{ik},$$

где

$$(\varepsilon_a)_{ix} = 0, \quad (\varepsilon_a)_{zy} = \frac{1}{2} a \varepsilon \sin(2qx),$$

$$(\varepsilon_a)_{zz} = -(\varepsilon_a)_{yy} = \frac{1}{2} a \varepsilon \cos(2qx). \quad (38)$$

Именно эта зависимость $\varepsilon_{ik}(T)$ и проявляется как новый термоэлектрический эффект, приводящий в результате к аномальным свойствам конвекции в ХЖК. Величина a характеризует степень анизотропии диэлектрической проницаемости. Из-за наличия температурной зависимости $q(T)$ в холестерике появляется сила $E_i E_j \nabla \varepsilon_{ij}$, где E_i — электрическое поле, состоящее из равновесного термоэлектрического γA (направлено по оси z) и поля малых отклонений $E_1 = -\nabla \varphi$.

Качественно эффект можно понять, сравнивая новую электрическую силу с диссипацией, подобно тому, как это сделано для НЖК в разделе 2. Но такие рассуждения в данном конкретном случае мало что дают. Дело в том, что новая сила является величиной сильно изменяющейся на малых расстояниях, равных по порядку величины значению q^{-1} , т.е. на расстояниях, сравнимых с размерами молекулы холестерика. Поэтому макроскопический эффект возбуждения определяется лишь после усреднения. Такое усреднение вносит в условие возбуждения существенный (порядковый) безразмерный множитель, который не может быть определен при качественном рассмотрении.

Действительно, флуктуация температуры T_1 приводит к флуктуации обратного шага спирали $q_1 = T_1 dq/dT$.

С величиной dq/dT можно образовать различные безразмерные величины, например

$$\frac{A}{q} \frac{dq}{dT}, \quad Ah^2 \frac{dq}{dT}, \quad \frac{Ah}{q} \frac{dq}{dT}. \quad (39)$$

Безразмерное число — характеристика условий возбуждения термоэлектрической конвекции — из-за температурной зависимости молекулы ХЖК имеет вид

$$\varepsilon_c = \varepsilon \frac{a^2 A^2 h^2}{q} \left(\frac{dq}{dT} \right)^2 = \frac{\varepsilon \gamma^2 a^2 A^4 h^5}{\rho \nu \chi q} \left(\frac{dq}{dT} \right)^2. \quad (40)$$

В него входит, как это видно из записанной формулы, два из возможных в соответствии с (39) множителей.

При достижении этим числом критического значения ε_c^* возникает неустойчивость, обусловленная температурной зависимостью шага спирали молекулы ХЖК. Размеры возникающей ячейки определяются условием минимальности ε_c . Кроме того, оказывается, что нарастание такой неустойчивости происходит не аperiодически, а осциллируя.

Перейдем к формальному доказательству этих (а попутно и других) результатов. Введем следующие упрощения. Во-первых, не будем учитывать анизотропию ни вязкости, ни температуропроводности. В действительности из-за полного подобия гидродинамики нематиков и холестериков это означает потерю в результате множителя $\Gamma \simeq \nu_a \chi_a / G \simeq 10^2$, который можно учесть подобно тому, как это сделано в соотношениях (16) и (17). Во-вторых, пренебрежем флуктуациями заряда, возникающими из-за малого изменения температуры. Влияние такого заряда (и возникающей в поле γA силы) рассматривалось и выше в [1]. Фактически его можно учесть формальной заменой в результате числа Рэлея R на $\pm R + \varepsilon k^2$. Последствия этого подробно изучены выше в разделе 2. В-третьих, как уже указывалось, шаг спирали сильно зависит от температуры. Так, $d \ln q / d \ln T \gtrsim 10^3$ (см. [2] и ссылки в ней). Поэтому не будут учитываться малые отклонения спирали из-за других причин. Можно положить

$$q = q_0 + z \frac{dq}{dT} A + \frac{dq}{dT} T_1. \quad (41)$$

Это позволяет пренебречь влиянием шага спирали на директор и считать, что характер спиральности сохраняется. В этом приближении можно не включать уравнение для директора в систему уравнений, но, конечно, то, что рассматривается ЖК с директором $n_x = 0$, $n_y = \sin(qx)$, $n_z = \cos(qx)$, появляется, например, в конкретном виде тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik} + \varepsilon a n_i n_k$, согласующийся как с видом зависимости (38), так и с принятым видом для тензорных коэффициентов (2). В-четвертых, для простоты пренебрежем зависимостью всех величин малых отклонений от y . Фактически это приближение уже использовалось выше. Для перехода к общему случаю достаточно в результатах заменить k_x на k_{\perp} .

Система уравнений для ХЖК состоит из уравнения движения (4), в котором правая часть заменена на новую силу — $0.5 E_i E_j \nabla \varepsilon_{ij}$. Уравнение переноса тепла остается прежним, хотя и сильно упрощается (также, как и уравнение движения) из-за принятых приближений. Однако теперь в систему уравнений необходимо добавить уравнение электростатики (Пуассона)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{ij} E_j) = 0. \quad (42)$$

После подстановки в электрическую силу и в это уравнение конкретного вида тензора диэлектрической проницаемости в соответствии с формулой (38) проводится линеаризация. При преобразованиях необходимо все время иметь в виду, что $hA/T \ll 1$, и отбрасывать соответствующие слагаемые. Сравнивать нужно слагаемые, имеющие одинаковый порядок производных по z . Затем последовательно исключаем переменные малые отклонения и усредняем по масштабу q^{-1} , т.е. вычисляем от уравнений величину интеграла по z от 0 до $2\pi/q$, деленного на $2\pi/q$. Величины малых отклонений и все их производные заменяются усредненными, а фактически считаются в микромасштабе $2\pi/q$ постоянными. Условие $qh \gg 1$, разделяющее масштабы, позволяет свертки (интегралы от произведений) заменить произведениями средних (постоянных в микромасштабе) величин везде, кроме чисел, содержащих гармонические функции от qx . В результате получится уравнение с постоянными коэффициентами, которое решается, как обычно, в экспоненциальном виде.

В безразмерной форме (единица длины h , времени h^2/ν) получается условие возбуждения

$$[(i\omega - k^2)(i\omega P - k^2) \pm Rk_x^2] k^2 = \mathcal{E}_c \left[-ik_z^2 k_x + 2Ah \frac{d}{dT} \left(\ln \left(\frac{dq}{dT} \right) \right) k_x k_z \right]. \quad (43)$$

Величина $k_x = 2\pi h/\lambda$ вещественна в силу трансляционной симметрии в модели слоя. Вещественность k_z должна обеспечиваться граничными условиями. Левая часть уравнения и первое слагаемое справа происходят от четных производных по z , поэтому для них возможна постановка граничных условий типа свободных изотермических границ. Тогда $k_z = \pi$. Второе слагаемое справа содержит множитель hA/T и оставлено как поправка именно из-за того, что происходит от членов уравнения с другой четностью (с нечетной) производной по z . Как уже отмечалось, для учета сделанных упрощений нужно число Рэлея R заменить на $(R \pm \mathcal{E}k^2)G$. Кроме того, число Прандтля обозначено $P = \nu/\chi$.

Второе слагаемое справа в условии возбуждения (43) пропорционально A^5 . Оно показывает влияние нового эффекта (из-за температурной зависимости шага спирали) на обычную (в том числе и, возможно, из-за полупроводниковых свойств) стационарную конвекцию.

Очевидно, что эффекты из-за нарушения квазинейтральности ([¹] и раздел 2) и из-за изменения шага молекулярной спирали должны суммироваться, и поэтому в ХЖК вполне применимы сделанные в [¹] и в разделе 2 выводы о стационарной конвекции: такой механизм при подогреве снизу облегчает условия возбуждения, существенен в тонких слоях (меньше h_{RI}), а при подогреве сверху действует до тех пор, пока не будет подавлен силами плавучести или силами поверхностного натяжения.

Перейдем к анализу новых эффектов. Разделяя в условии возбуждения действительную и мнимую части, найдем, что конвекция возникает ($I_m(\omega) = 0$) с обычными рэлеевскими (возможно измененными

нарушением квазинейтральности и силами упругого кручения) условиями, но осциллируя с частотой (безразмерной)

$$\omega = \frac{k_z^2 k_x}{k^6 (1+P)} \mathcal{E}_c. \quad (44)$$

Таким образом, эффект, возникающий из-за зависимости шага спирали молекул ХЖК от температуры, на условия возбуждения практически не влияет, но возбуждается не апериодически, а осциллируя.

Оценим частоту осцилляций. Считая конвекцию близкой к рэлеевской (подогрев снизу, толстые слои), т.е. при $k_1^2/k_z^2 \simeq 0.5$, $k_z = \pi$, $R = R^* \simeq 700$. В размерном виде частота определяется соотношением

$$\omega = \frac{\nu}{h^2} \frac{27\pi^4}{4\sqrt{2}} a^2 \left(\frac{d \ln q}{d \ln T} \right)^2 \frac{qh}{(\beta Ah)^2} \left(\frac{\kappa \nu}{gh^3} \right)^4 \frac{\varepsilon \gamma^2}{\rho \beta^2 h^2 (\kappa + \nu)}. \quad (45)$$

Подставляя значения параметров $[1,2]$ $a \simeq 0.1$, $\kappa \simeq \nu \simeq 10^{-6} \div 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\gamma \simeq 10 \div 1 \mu\text{В}/\text{К}$, $\beta T \simeq 0.1$, $T \simeq 300 \text{ К}$, $\rho \simeq 3 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\varepsilon \simeq 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ Ф}/\text{м}$, $q \simeq 10^{-7} \text{ м}$, $d \ln q/d \ln T \simeq 10^3$, найдем, что $\omega \simeq 1 \text{ Гц}$ при $h = 0.1 \text{ см}$ и $\omega \simeq 10^{15} \text{ Гц}$ при $h = 0.01 \text{ см}$, т.е. частота очень сильно ($\sim h^{-15}$) обратно пропорционально пятнадцатой степени зависит от толщины слоя.

В тонких слоях при подогреве сверху конвекция определяется параметрами $k_1^2/k_z^2 \simeq 1$, $k_z = \pi$, $\mathcal{E}^* \simeq 40$. Частота, с которой происходят осцилляции при возбуждении, имеет вид

$$\omega = \frac{\nu}{h^2} 4\pi^2 a^2 qh \left(\frac{d \ln q}{d \ln T} \right)^2 \frac{\rho \kappa \nu}{\varepsilon \gamma^2 A^2 h^2} \frac{\kappa}{\kappa + \nu}. \quad (46)$$

Оценки (с теми же значениями величин) показывают, что опять $\omega \simeq 1 \text{ Гц}$ при $h = 0.1 \text{ см}$, но зависимость от толщины слоя гораздо слабее (обратно пропорциональна третьей степени).

Легко учесть и изменения в условиях возбуждения. Вместо обычного соотношения (21) имеем

$$\pm \frac{R_a}{\pi^4} + \frac{\mathcal{E}_a}{\pi^2} (1+b) = \frac{1+b}{b} \left[(1+b)^2 - \frac{\omega^2 P}{\pi^4} \right]. \quad (47)$$

При подогреве снизу (в толстых слоях), подставляя ω , в соответствии с (44) получим

$$\frac{(1+b)^3}{b} = \frac{\mathcal{E}_c^2 \Gamma^2 P}{\pi^{10} (1+b)^5 (1+P)^2} + \frac{R_a}{\pi^4}. \quad (48)$$

Первый член справа (новый эффект) преобладает при толщине слоя

$$h < h_{Rc} \simeq \left[27q \left(\frac{\kappa \nu}{g} \right)^4 \left(\frac{d \ln q}{d \ln T} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon^2 \gamma^4 a^4}{\rho^2 \kappa \nu (\kappa + \nu)^2 \beta^8 T^4} \right)^{1/2} \right]^{1/11}. \quad (49)$$

Как и следовало ожидать, в тонких слоях с толщиной $h < h_{Rc} \simeq 10^{-5} \text{ м}$, т.е. в слоях примерно той же толщины, что и h_{Rl} . Минимизация $\partial \mathcal{E}_c / \partial b = 0$ дает $b = 1/7$ (вместо рэлеевской $b = 0.5$), т.е. в момент

возбуждения (и после) в этих условиях возникает ячейка, гораздо более вытянутая вдоль осей спиралей. Оценивая $k_x \simeq \pi/\sqrt{7}$, получим, что движение возникает при достижении числом \mathcal{E}_c критического значения $\mathcal{E}_c^* \simeq 2.6$ или при подогреве

$$A > A_c^* \simeq \left[\frac{\rho \kappa \nu T^4 (\nu + \kappa)^2}{\Gamma^2 \varepsilon^2 \gamma^2 a^4 q^2 h^{10}} \left(\frac{d \ln q}{d \ln T} \right)^{-4} \right]^{1/8}. \quad (50)$$

Видно, что A_c^* пропорционально $h^{-5/4}$, т.е. зависит от толщины слоя гораздо слабее, чем обычно (обычно h^{-4}).

При подогреве сверху (нижний знак в (47)) и в достаточно тонких слоях условие возбуждения ячеистого движения «обычным» [1] и «холестерическим» термоэлектричеством запишется так же, как в предыдущем случае (см. (48)), но вместо R_a/π^4 будет стоять $\mathcal{E}_a(1+b)/\pi^2$.

Новый («холестерический») эффект преобладает в слоях с толщиной

$$h < h_{cI} \simeq \frac{\varepsilon \gamma^2 a^2 T^2}{\rho \kappa \nu q} \left(\frac{\nu}{\nu + \kappa} \right)^{1/2} \left(\frac{d \ln q}{d \ln T} \right)^{-2}. \quad (51)$$

Оценки показывают, что и эта величина порядка $h_{cI} \simeq 10^{-5}$ м.

Поскольку причины неустойчивости теперь нельзя разделить, выбирая соответствующую толщину слоя, то для нахождения критического значения \mathcal{E}_a^* лучше решать, находить и минимизировать \mathcal{E}_a из уравнения

$$\frac{(1+b)^8}{b} = \frac{\mathcal{E}_a^4}{\pi^{10}} \frac{h^2}{h_{cI}^2} + \frac{\mathcal{E}_a}{\pi^2} (1+b)^6. \quad (52)$$

Решение этого уравнения позволяет найти поправку к $\mathcal{E}_a^* \simeq 40$. Фактически в слоях с толщиной $h \gtrsim q^{-1}$ поправка и изменение соотношения размеров ячейки (от $b^* \simeq 1$) будут малы.

В заключение отметим, что все рассмотренные в этой работе эффекты могут быть привлечены для объяснения явлений, которые на опыте наблюдаются при сильных нагревах ($T_h - T_c \simeq 10^2$ К) тонких ($h \lesssim 10^{-4}$ м) слоев ЖК [2].

Автор благодарит И.В. Иоффе и Б.И. Лембрикова за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] Эйдельман Е.Д. // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 1633.
- [2] Де Жен. П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.
- [3] Чандрасекар С. Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980.
- [4] Иоффе И.В., Лембриков Б.И., Эйдельман Е.Д. // Письма в ЖТФ. 1976. Т. 2. С. 921.
- [5] Иоффе И.В., Эйдельман Е.Д. // ЖТФ. 1979. Т. 49. С. 2291.
- [6] Иоффе И.В., Эйдельман Е.Д. // ЖТФ. 1981. Т. 51. С. 1702.
- [7] Эйдельман Е.Д. // ЖТФ. 1990. Т. 60. С. 214.
- [8] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: University Press, 1961.