

УДК 537.622

©1994

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС КОЛЛЕКТИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАГНЕТИКАХ

В.В.Зверев, В.Л.Сафонов

Изучается процесс перехода к динамическому хаосу вынужденных коллективных колебаний в системе параметрически возбужденных волн в магнетиках. Численное моделирование при добавлении амплитудной шумовой модуляции показывает размывание бифуркационных диаграмм и появление окон регулярности в области хаоса. Найдено динамическое отображение, которое сходно с отображением Икеды, известным в нелинейной оптике.

В последние годы достигнуто существенное продвижение в понимании основных закономерностей поведения нелинейных динамических систем. Это потребовало пересмотра многих стереотипов теории колебаний и поставило в центр внимания качественно новое явление — автостохастизацию (хаотизацию) движения в низкоразмерных нелинейных колебательных системах [1,2]. К частным проявлениям автостохастизации можно отнести сложные автоколебания поглощаемой СВЧ мощности в ферромагнетиках [3–13] в антиферромагнетиках [11,12] (см. также обзор [13]). В настоящей работе рассмотрены некоторые простые модели, позволяющие описать хаотические магнитные колебания.

Спиновые и магнитоупругие волны в магнетиках служат удобным объектом для изучения нелинейных волновых процессов в распределенных средах [3–25]. Одним из наиболее эффективных способов возбуждения спиновых волн служит метод параллельной накачки [14,15] (СВЧ поле $h \cos \omega_p t$ параллельно постоянному магнитному полю H_0). В этом случае переменная составляющая магнитного поля, приложенного к исследуемому образцу, при превышении порога параметрического резонанса ($h > h_c$) возбуждает в среде узкий волновой пакет, состоящий из пар волн половинной частоты с противоположно направленными волновыми векторами $\omega_k = \omega_{-k} = \omega_p/2$. После переходного процесса обычно устанавливается стационарное состояние, обеспечивающее стабильный поток энергии от поля накачки через возбужденную волновую систему в термостат. Амплитуда возбужденных волн определяется фазовым механизмом ограничения, при котором вынужденные колебания среды «отстраиваются» по фазе от поля накачки, и механизмом нелинейного затухания волн [16,17]. В простейшем приближении, удовлетворительно описывающем эксперимент при небольших надкритичностях, динамика может быть представлена всего двумя величинами — числом параметрических волн n_k и фазой рассо-

гласования θ_k (т.е. одна степень свободы). В стационарном состоянии эти величины не зависят от времени.

Обычно считается, что роль остальных степеней свободы сводится к обеспечению механизмов диссипации. Однако при $h \gg h_c$ в динамический процесс, очевидно, вовлекаются волны и с другими k . В этом случае в соответствии с общими принципами нелинейной механики [1,2] возникают стационарные (регулярные или хаотические) автоколебания, переходящие с ростом h в развитую спин-волновую турбулентность.

Если к исследуемому образцу приложить еще одно параллельное H_0 переменное магнитное поле $H_m \cos \omega_m t$, модулирующее спектр спиновых волн ($\omega_m \sim \gamma_k$, γ_k — скорость релаксации волны), то будет наблюдаться возбуждение так называемых коллективных колебаний [21,22], проявляющихся через осцилляции величин n_k и θ_k относительно их стационарных значений. Интересно отметить, что в этом случае возбужденная магнитная система проявляет себя как нелинейный элемент, смещающий первоначально не связанные между собой колебания поля СВЧ накачки и поля РЧ модуляции. Указанное обстоятельство легло в основу модуляционного метода исследования параметрических спиновых волн [19,23–25], который является одним из наиболее информативных методов в данной области. С его помощью существенно повышается точность определения h_c , а при $h > h_c$ можно определить такие важные характеристики параметрической системы, как коэффициент нелинейного волнового взаимодействия и параметр нелинейного затухания волн. Отметим, что в условиях модуляции приближенная модель, базирующаяся на использовании лишь двух коллективных переменных n_k и θ_k , является нелинейной системой с 3/2 степенями свободы, т.е. имеет минимальную размерность, при которой уже возможен переход от регулярного движения к хаотическому [1,2]. Настоящая работа посвящена рассмотрению этого наиболее простого случая хаоса спиновых волн.

1. Модель с непрерывным временем

В качестве исходных уравнений, следуя [16,23–25], мы рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma_k} \frac{d}{dt} \theta_k + b \sin \theta_k &= a \cos \omega_m t + \Delta - N_k, \\ \frac{1}{2\gamma_k} \frac{d}{dt} \ln N_k &= b \cos \theta_k - 1 - \kappa N_k. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $b \equiv h/h_{c0}$ — показатель надкритичности; h_{c0} — порог параметрического резонанса в отсутствие модуляции; $\Delta \equiv (\omega_p/2 - \omega_k)/\gamma_k$; $a \equiv -(\partial\omega_k/\partial H_0)H_m/\gamma_k$; $N_k \equiv n_k(2T_k + S_k)/\gamma_k$; T_k, S_k — коэффициенты нелинейного взаимодействия волн, ответственные за перенормировку спектра спиновых волн и накачки; κ — параметр нелинейного затухания.

Решая систему (1) численно, нетрудно найти сочетание значений параметров, при которых происходит переход от регулярных колебаний к хаотическим. Возникновение в спектре колебаний намагниченности наряду с частотной составляющей ω_m субгармоники $\omega_m/2$ было

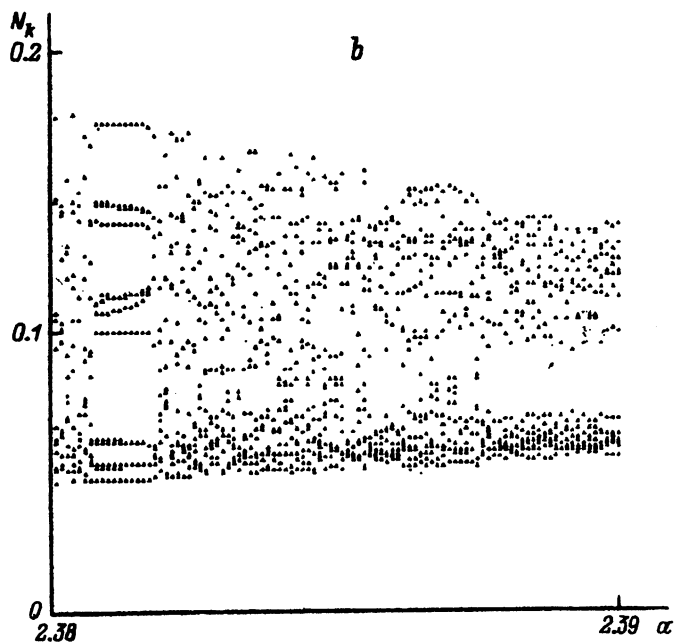
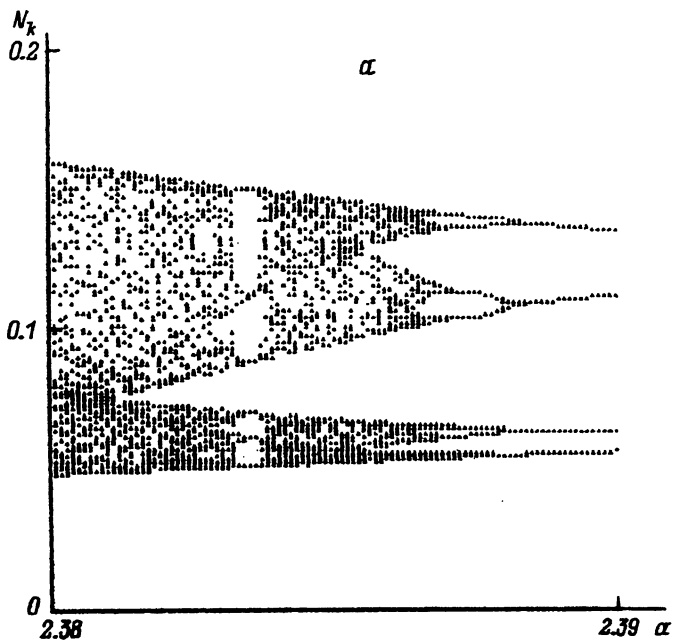


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы модели с непрерывным временем.
a — без шумового воздействия, *b* — с шумом.

обнаружено в [22] на электронных спиновых волнах в ферромагнетике ЖИГ. В дальнейшем это явление, названное двойным параметрическим резонансом магнонов, наблюдалось на ядерных спиновых волнах [24;26] и электронных спиновых волнах [27] в антиферромагнетиках $MnCO_3$ и $CsMnF_3$. Наиболее подробно удвоение периода колебаний и последующий переход к хаосу изучались (численно и экспериментально) в работе [24].

На рис. 1,а изображен фрагмент бифуркационной диаграммы, соответствующей переходу к хаосу через последовательность удвоений периода (сценарий Фейгенбаума [28]). По вертикали отложены значения N_k , взятые через период модуляции, а по горизонтали — амплитуда a . Значения параметров $b = 2.01$, $\Omega_m \equiv \omega_m/2\gamma_k = 1$, $\Delta = 0$ и $\kappa = 0.2$ типичны для эксперимента с параметрическими ядерными спиновыми волнами [24]. Наибольшему значению амплитуды $a = 2.39$ соответствует 8-тактный цикл; серия удвоений периода, возникающая при уменьшении a , легко прослеживается вплоть до 32-тактного цикла.

Исследуя хаотизацию движения в реальной физической системе, нельзя игнорировать проблему влияния флуктуаций на характер движения. Как отмечалось многими авторами [29,30], описание динамических систем без учета флуктуаций непоследовательно, поскольку диссипативные процессы, обусловленные взаимодействием с тепловым резервуаром, имеют статистическую природу (квантовый шум [31]). В области неустойчивых режимов движения флуктуации способны существенно видоизменить характер движения в целом. Естественный способ их учета состоит в использовании генератора случайных чисел и введении шума непосредственно в процедуру численного интегрирования. Низкая эффективность такого подхода, требующего больших затрат машинного времени, стимулирует, однако, поиск упрощенных качественных моделей, допускающих хотя бы частичное решение аналитическими методами. Ниже мы опишем такую модель, а затем вернемся к вопросу об учете флуктуаций.

2. Динамическое отображение

Будем искать приближенное решение уравнений (1) при $b \gg 1$, считая, что модуляция производится последовательностью прямоугольных импульсов, и используя асимптотический подход. Для этого в (1) положим $a = 0$ и будем сшивать в точках разрыва решения, найденные для постоянных значений Δ , соответствующих верхнему и нижнему уровням модулирующего сигнала. Пренебрежем для простоты нелинейным затуханием магнонов $\kappa = 0$ и сделаем замену $\nu_k \equiv \ln N_k$. Далее перейдем к рассмотрению уравнений для отклонений $\delta\theta_k = \theta_k - \theta_k^{(0)}$ и $\delta\nu_k = \nu_k - \nu_k^{(0)}$ от стационарного ($d/dt = 0$) решения системы (1).

Линеаризованная система уравнений для отклонений может быть записана в форме

$$\delta\ddot{\theta}_k + b^{-1}\delta\dot{\theta}_k + \Omega^2\delta\theta_k = 0, \quad (2)$$

$$\delta\dot{\nu}_k = \delta\theta_k(b^2 - 1)^{1/2}/b, \quad (3)$$

$$\Omega^2 \equiv (b^2 - 1)^{1/2} \left[\Delta + (b^2 - 1)^{1/2} \right] / b^2 \approx \Delta/b + 1 \sim 1. \quad (4)$$

Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по «быстрому» времени $\tau \equiv 2\gamma_k bt$. Отметим, что (2) имеет вид уравнения линейного осциллятора с малым трением. При $\delta\theta_k \ll 1$ и $\delta\nu_k \ll 1$ процесс релаксации осцилляций и нелинейные процессы являются медленными (в масштабе времени Ω^{-1}). Это позволяет использовать метод медленно меняющихся параметров и метод усреднения [32].

Нетривиальное нелинейное поведение спин-волновой системы имеет место в том случае, если релаксационные и нелинейные процессы протекают в одном масштабе времени. Действительно, при слишком быстрой релаксации нелинейности не успевают как-либо проявиться. В отсутствие же релаксации не сможет реализоваться нелинейный эффект, состоящий в появлении зависимости прироста фазы колебаний от их амплитуды.

Пренебрегая в (2), (3) величинами порядка $b^{-1} \ll 1$, получим

$$\delta\theta_k = A \cos(\Omega\tau + \beta), \quad \delta\nu_k = \Omega^{-1} A \sin(\Omega\tau + \beta).$$

Считая A и β медленными функциями времени, найдем из (1) дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют, и усредним правые части этих уравнений по периоду осцилляции. В результате имеем

$$\dot{A} = -J_1(A)/b, \quad (5)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\Omega}{A} \left[\Omega I_1 \left(\frac{A}{\Omega} \right) + J_1(A) - A \right], \quad (6)$$

где $J_1(x)$ и $I_1(x)$ — функции Бесселя.

Сохраним в разложениях правых частей (5), (6) по степеням A линейные и квадратичные члены. Вводя для удобства обозначение $u = \delta\theta_k + i\Omega\delta\nu_k$, запишем приближенное решение в виде

$$u(\tau) = u_0 \chi R(\Delta\tau, |u_0|^2) \exp \left[i\Omega\Delta\tau - iGH(\Delta\tau, |u_0|^2) |u_0|^2 \right]. \quad (7)$$

Здесь

$$R(\Delta\tau, |u_0|^2) = \left[1 + \frac{1}{8} |u_0|^2 (\chi^2 - 1) \right]^{-1/2},$$

$$G = \frac{b}{16} (\Omega^{-1} - \Omega) (\chi^2 - 1),$$

$$H(\Delta\tau, |u_0|^2) = -16 |u_0|^2 (\chi^2 - 1)^{-1} \ln R(\Delta\tau, |u_0|^2),$$

$$\chi(\Delta\tau) = \chi \equiv \exp[-(\tau - \tau_0)/2b], \quad u_0 \equiv u(\tau_0).$$

Заметим, что учитывать в (5), (6) последующие члены разложения по A нецелесообразно. В области притяжения стационарной точки (эту область, согласно (5), можно оценить как область первой полуволны функции J_1) правая часть (5) удовлетворительно аппроксимируется квадратичным выражением. Более грубое приближение, соответствующее сохранению в (5) только линейного члена, получается при замене в (7) $R = H = 1$.

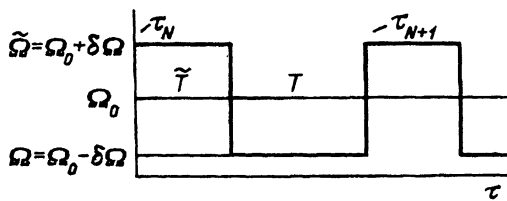


Рис. 2. Прямоугольная модуляция.

Если в момент времени τ величина Δ меняется скачком, решение (7) необходимо дополнить условием сращивания в точке разрыва. Из

$$\theta_k(\tau + 0) = \theta_k(\tau - 0), \quad \nu_k(\tau + 0) = \nu_k(\tau - 0)$$

следует

$$u(\tau + 0) = \text{Re } u(\tau - 0) + i(\Omega_+/ \Omega_-) \text{Im } u(\tau - 0) - 2i\Omega_+ \ln(\Omega_+ / \Omega_-), \quad (8)$$

где

$$\Omega_{\pm} \equiv \Omega(\tau \pm 0).$$

Зададим параметры прямоугольных импульсов, как это показано на рис. 2: T, \tilde{T} — длительности интервалов; $\Omega, \tilde{\Omega}$ — соответствующие частоты, определяемые значениями Δ (см. (4)). Обозначая $u_N \equiv u(\tau_N)$, запишем динамическое отображение

$$u_{N+1} = S(\Omega, \tilde{\Omega}) L(T, \Omega) S(\tilde{\Omega}, \Omega) L(\tilde{T}, \tilde{\Omega}) u_N, \quad (9)$$

где

$$S(\Omega_1, \Omega_2)u = (1 + \Omega_2 / \Omega_1) \frac{u}{2} + (1 - \Omega_2 / \Omega_1) \frac{u^*}{2} - 2i\Omega_2 \ln(\Omega_2 / \Omega_1), \quad (10)$$

$$L(\tau, \Omega)u = \frac{u}{|u|} W(\tau, |u|^2) \exp \left[i\Omega\tau + iB(\tau, |u|^2) \right], \quad (11)$$

$$W(\tau, |u|^2) = |u|\chi(\tau)R(\tau, |u|^2), \quad B(\tau, |u|^2) = G|u|^2 H(\tau, |u|^2),$$

звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Покажем, что при итерировании отображения (9) не возникает эффекта накопления, который приводил бы к росту первоначально малого $|u(\tau)|$ и нарушению предположения о малости отклонения от стационарной точки. Для простоты ограничимся случаем $R = H = 1$. Из определения операций S и L следует оценка

$$|u_{N+1}| \leq \lambda |u_N| + \psi,$$

где

$$\lambda = \chi(T)\chi(\tilde{T}) < 1, \quad \psi = 2[\Omega\chi(T) + \tilde{\Omega}] \ln(\tilde{\Omega} / \Omega).$$

Сравним две неотрицательные последовательности. Пусть первая состоит из чисел $|u_N|$, где u_N получены итерированием отображения (9), а вторая — из чисел ξ_N , связанных одномерным отображением $\xi_{N+1} = \lambda\xi_N + \psi$. Тогда

$$|u_N| \leq \xi_N < \xi_{\infty} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = \psi(1 - \lambda)^{-1}.$$

Верхняя грань ξ_∞ последовательности $|u_N|$ будет малой величиной, если отношение частот $\tilde{\Omega}/\Omega$ близко к единице (т.е. глубина модуляции достаточно мала).

Отображение (9) можно привести к более простому виду, приняв условие $|\tilde{\Omega} - \Omega| \ll 1$. Пусть

$$\tilde{\Omega} = \Omega_0 + \delta\Omega, \quad \Omega = \Omega_0 - \delta\Omega,$$

где $\Omega_0 = (1 + \Delta_0/b)^{1/2}$, Δ_0 — постоянная часть параметра Δ (Δ_0/b не мало). Учитывая, что $|u| \sim \delta\Omega \ll 1$, оставим в (10) только члены низшего (первого) порядка. В то же время сохраним нелинейный член в показателе экспоненты в (11), так как малость величины $|u|^2$ здесь компенсируется тем, что $G \sim b \gg 1$. В результате имеем

$$v_{N+1} = -1 + \chi \bar{v}_N \exp \left\{ i \left[(\Omega_0 - \delta\Omega)T - g|\bar{v}_N|^2 \right] \right\}, \quad (12)$$

$$\bar{v}_N = 1 + \tilde{\chi} v_N \exp \left\{ i \left[(\Omega_0 + \delta\Omega)\tilde{T} - \tilde{g}|v_N|^2 \right] \right\}.$$

Здесь $v_N = (4i\delta\Omega)^{-1}u_N$ ($|v_N|$ не мало), $\chi = \exp(-T/2b)$, $g = (\Omega_0 - \Omega_0^{-1})(1 - \chi^2)\delta\Omega^2b$ (обозначения с тильдой получаются в результате замены $T, \chi, g \rightarrow \tilde{T}, \tilde{\chi}, \tilde{g}$).

Полученное отображение сходно с хорошо изученным в нелинейной оптике отображением Икеды [33,34]

$$w_{N+1} = 1 + \chi w_N \exp \left[i(\varphi - g|w_N|^2) \right]. \quad (13)$$

Численный расчет показывает, что для $\chi \geq 0.3$ хаотизация в системах (12), (13) возникает уже при $g \sim 3 \div 5$. Это означает, что должны быть выполнены условия $T \sim \tilde{T} \sim b$ и $(\delta\Omega)^2b \sim 1$.

В работах [35,36] было показано, что качественно верное описание процесса хаотизации в модели Икеды можно получить, переходя от двумерного отображения к приближенному одномерному. Для получения последнего в правой части (13) следует заменить $v_N \rightarrow |v_N|$. Применяя тот же прием к отображению (12), нетрудно получить его одномерный аналог

$$w_{N+1} = 1 - 2\chi \bar{w}^{1/2} \cos \left[(\Omega_0 - \delta\Omega)T - g\bar{w}_N \right] + \chi^2 \bar{w}_N, \quad (14)$$

$$\bar{w}_N = 1 + 2\tilde{\chi} w_N^{1/2} \cos \left[(\Omega_0 + \delta\Omega)\tilde{T} - \tilde{g}w_N \right] + \tilde{\chi}^2 w_N, \quad (15)$$

где $w_N = |v_N|^2$. Функция w_{N+1} от w_N является немонотонной, так что при $g, \tilde{g} > 1$ ее график многократно пересекает биссектрису $w_{N+1} = w_N$. Сложные режимы динамики в системах такого типа широко обсуждались в литературе [37].

Вернемся к численному исследованию и покажем, что флуктуации (возмущение шумом) могут приводить к нетривиальной трансформации хаотического движения.

Бифуркационная диаграмма (рис. 1, *b*) построена с помощью уравнений (1), где посредством замены $a \rightarrow a[1 + \xi(t)]$ введены случайные вариации амплитуды модуляции; $\xi(t)$ — нормальный случайный процесс: $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi^2 \rangle^{1/2} = 2.2 \cdot 10^{-2}$, время корреляции $\tau_c = 0.2$. Прочие параметры те же, что и для рис. 1, *a*. Сравнивая рис. 1, *a* и *b*, заметим, что случайные возмущения, как и следовало ожидать, приводят к размытию структуры ветвей высших 2^n -тактных циклов, однако общее очертание диаграммы сохраняется. Кроме того, в левой части рис. 1 *b* появляется дополнительная область регулярного движения, где переход порядок-хаос индуцирован шумом. Наличие этой области и ее конфигурация чувствительны к изменению всех параметров шума, включая τ_c .

Рис. 3, *a* получен путем численного итерирования отображения (9) при $T = \tilde{T} = 80$ ($\chi = 0.5$), $\Omega = 0.4$, $\tilde{\Omega} = 0.625$. На рис. 3, *b* представлены результаты повторного расчета, выполненного с введением случайного фактора — вариации длительностей импульсов: $T \rightarrow T(1 + \xi_N)$, $\tilde{T} \rightarrow \tilde{T}(1 + \xi_N)$ (ξ_N — нормальный δ -коррелированный шум: $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi^2 \rangle^{1/2} = 4 \cdot 10^{-2}$). Здесь, как и в предыдущем случае, эффект шумового возмущения не может быть сведен только к размытию тонкой структуры; в левых частях диаграмм рис. 3, *a* и *b* области локализации фазовых точек существенно различаются.

Сформулируем кратко типичные ситуации, возникающие при численном моделировании.

1) Если установившееся движение является регулярным, то результаты решения задачи «с шумом» и «без шума» близки — случайная траектория как бы является результатом малого случайного «разбрасывания» точек детерминистической траектории.

2) При автостохастизации движения траектории неустойчивы. Можно говорить о близости результатов решения задачи с шумом и без шума, имея в виду близость не траекторий, а притягивающих областей в фазовом пространстве. Шум разрушает тонкую структуру аттракторов.

3) При определенных условиях в фазовом пространстве динамической системы, по-видимому, возникают сложные притягивающие области (названные в [30] квазиаттракторами), включающие в себя устойчивые периодические аттракторы с малыми бассейнами притяжения и седловые структуры. Движение в окрестности таких областей при наличии флуктуаций обладает наиболее сложным и трудно предсказуемым характером. В частности, возможны переходы типа хаос-порядок и хаос-хаос, происходящие при изменении параметров шума, а также различные метастабильные режимы и перемежаемость.

Проведенный в работе анализ демонстрирует уровень трудностей, возникающих при построении модели хаотического движения в реальной системе с шумом и сравнении результатов с экспериментом. Информация о статистических и корреляционных свойствах флуктуаций, которая обычно отсутствует или основана на самых общих

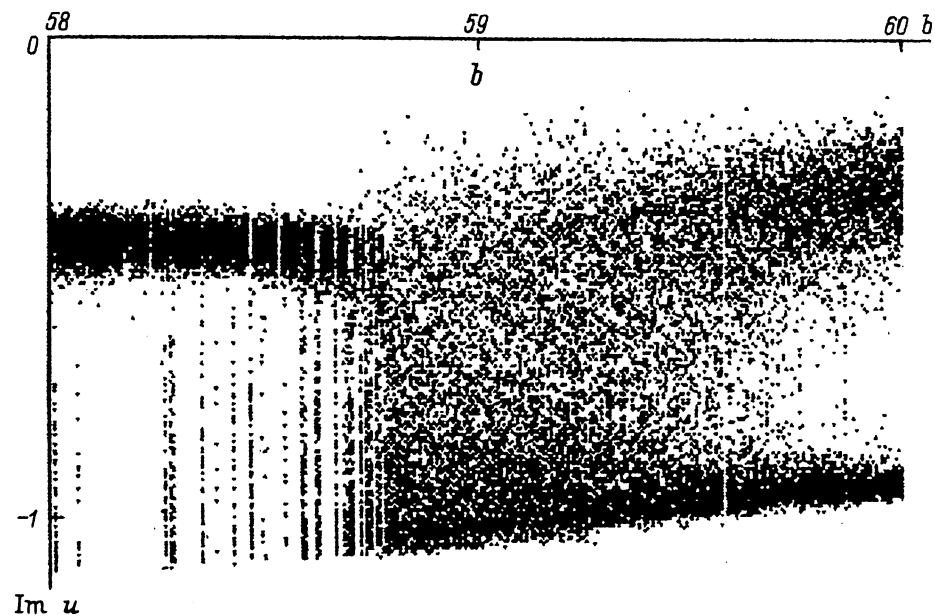
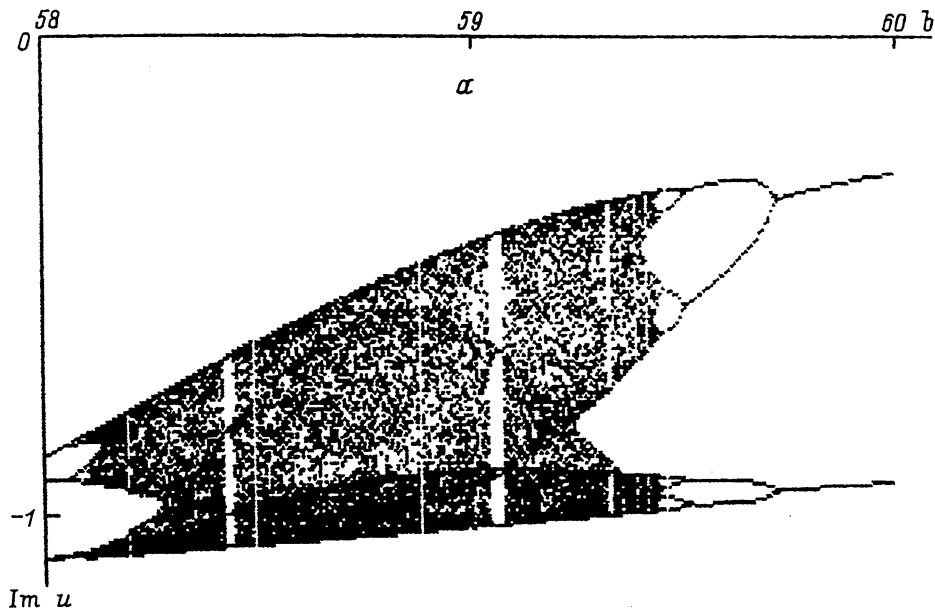


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы динамического отображения.
 а — без шумового воздействия, б — с шумом.

теоретико-вероятностных соображениях, в данном случае не является второстепенной. Найденное в работе динамическое отображение дополняет список глубоких математических аналогий между системой параметрически возбужденных волн в магнетиках и нелинейными системами иной физической природы.

Работа выполнена при финансовой поддержке авторов Российским фондом фундаментальных исследований (коды программ 93-02-2011 и 93-02-2586).

Список литературы

- [1] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [2] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [3] Львов В.С., Мушер С.Л., Старобинец С.С. // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. № 3. С. 1074-1086.
- [4] Гранкин В.Л., Львов В.С., Моторин В.И., Мушер С.Л. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 2. С. 757-767.
- [5] Nakamura K., Ohta S., Kawasaki K. // J. Phys. C. 1982. V. 15. N 6. P. L143-L148.
- [6] Ohta S., Nakamura K. // J. Phys. C. 1986. V. 16. N 18. P. L605-L612.
- [7] de Aguiar F.M., Rezende S.M. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. N 10. P. 1070-1073.
- [8] Yamazaki H., Mino M. // Progr. Theor. Phys. 1989. Suppl. N 98. P. 400-419.
- [9] Warden M., Waldner F. // J. Appl. Phys. 1988. V. 64. N 10. P. 5386-5390.
- [10] Wieser G., Benner H. // Z. Phys. B. 1990. V. 79. P. 119-131.
- [11] Смирнов А.И. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. № 1. С. 385-397.
- [12] Смирнов А.И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 5. С. 185-193.
- [13] Алексеев К.Н., Берман Г.П., Цифринович В.И., Фришман А.И. // УФН. 1992. Т. 162. № 7. С. 81-118.
- [14] Schlomann E.S., Green J.J., Milano U. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. P. 386S.
- [15] Morgenthaler F.R. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. P. 95S.
- [16] Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. // УФН. 1974. Т. 114. № 4. С. 605-654.
- [17] Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987.
- [18] Kotyuzhanskii V.Ya., Prozorova L.A. An Experimental Study of Quasi-Particles in Antiferromagnetic Materials. Soviet Scientific Reviews. Sec. A / Ed. I. M. Khalatnikov. 1990. V. 13. P. 3.
- [19] Андриенко А.В., Ожогин В.И., Сафонов В.Л., Якубовский А.Ю. // УФН. 1991. Т. 161. № 10. С. 1-35.
- [20] Андриенко А.В., Поддьяков Л.В. // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. № 1. С. 313-329.
- [21] Зауткин В.В., Львов В.С., Старобинец С.С. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. № 1. С. 182-189.
- [22] Зауткин В.В., Львов В.С., Орел Б.И., Старобинец С.С. // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. № 1. С. 272-284.
- [23] Андриенко А.В., Ожогин В.И., Сафонов В.Л., Якубовский А.Ю. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. № 4. С. 1474-1480.
- [24] Андриенко А.В., Ожогин В.И., Сафонов В.Л., Якубовский А.Ю. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 6. С. 2164-2173.
- [25] Андриенко А.В., Сафонов В.Л., Якубовский А.Ю. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. № 3. С. 907-917.
- [26] Якубовский А.Ю., Сулейманов С.М. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 4. С. 1456-1460.
- [27] Ozhogin V.I., Yakubovsky A.Yu., Abugutin A.V., Suleymanov S.M. // JMMM. 1980. V. 15-18. P. 757-759.
- [28] Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. № 4. С. 343-374.
- [29] Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
- [30] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
- [31] Люисселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972.
- [32] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
- [33] Ikeda K., Daido H., Akimoto O. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 709.
- [34] Zverev V.V., Rubinstein B.Ya. // J. Stat. Phys. 1991. V. 63. N 1/2. P. 221-239.

[35] Сагг J., Eilbeck J.C. // Phys Lett. A. 1984. V. 104. P. 59.

[36] Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. // Опт. и спектр. 1987. Т. 62. № 4. С. 872-877.

[37] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.

РНЦ «Курчатовский институт»
Москва

Поступило в Редакцию
25 ноября 1993 г.
