

УДК 539.537.535

©1994

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЭЛЕКТРОНОВ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЕРХРЕШЕТКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.Г.Жилич

Исследуется спектр энергий электронов (дырок) в слоистой сверхрешеточной полупроводниковой структуре типа GaAs-AlGaAs во внешнем магнитном поле, перпендикулярном направлению периодичности. В качестве эффективной теоретической модели одномерной сверхрешетки используется предельная форма потенциала Кронига-Пенни — цепочка плоских δ -барьеров. В общем случае спектр допустимых энергий движения электрона-дырки в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, состоит из полос, ширина которых существенно зависит от проницаемости барьеров и величины магнитного поля. В предельном случае распада сверхрешетки на изолированные потенциальные ямы полосы сливаются в непрерывный спектр. В пределе легко проницаемых барьеров или слабого магнитного поля полосы сжимаются в дискретные уровни — уровни Ландау. Найден и исследуется коэффициент поглощения света при разрешенно-дипольных межзонных переходах. Анализ частотной зависимости поглощения показывает, что в спектре должны проявляться особенности Ван Хофа двух типов — ступеньки (двумерные минимумы энергии электрон-дырочной пары) и логарифмические разрывы (седловые точки).

Показывается, что ряд основных выводов, полученных в работе, носит общий, не зависящий от выбора модели, характер.

1. Электро- и магнитооптические исследования в настоящее время стали одним из основных методов изучения электронных и дырочных состояний в структурных квантовых ямах и сверхрешетках на базе полупроводников [1,2]. Сравнение получаемых экспериментальных данных должно проводиться с расчетами на базе теоретических моделей, по возможности полно учитывающих те или иные особенности потенциального поля, в котором движутся электроны и дырки. Большинство таких моделей (см., например, [3,4]) требует сложных аналитических и численных расчетов, и их результаты будут относиться к структуре на базе конкретных материалов с конкретными параметрами (химический состав, размеры ям, период сверхрешетки и т.д.). В связи с этим представляется интересным провести исследования в рамках простой модели, допускающей аналитическое рассмотрение и в то же время качественно отражающей основные особенности энергетического спектра носителей тока во внешних полях в широком диапазоне параметров структуры и величины внешних полей и их проявление в оптических измерениях. В работе [5] было проведено теоретическое исследование оптических свойств слоистой сверхрешеточной гетероструктуры типа GaAs-AlGaAs во внешнем электрическом поле. В качестве теорети-

ческой модели одномерной сверхрешетки использовалась предельная форма потенциала Кронига-Пенни (δ -образные барьеры), содержащая в качестве свободного параметра мощность δ -барьеров. Результаты аналитического расчета спектра оптического поглощения и его существенной эволюции с ростом поля оказались в хорошем согласии с экспериментальными данными [6,7] и более сложными расчетами [6-8].

В настоящей работе, используя ту же модель, мы исследуем энергетический спектр электронов (дырок) во внешнем магнитном поле, направленном параллельно слоям, образующим сверхрешетку, т.е. перпендикулярно направлению периодичности. В работе получено общее выражение для коэффициента оптического поглощения, исследуется характер особенностей в спектре поглощения, делаются некоторые обобщения.

2. Энергия медленного движения электрона в направлении периодичности сверхрешетки ось Oy (рис. 1) в поле

$$V = \alpha \sum_s \delta(y - as)$$

дается выражениями [5]

$$\varepsilon_n(k) = b_n + \frac{1}{2} \Delta_n (1 - \cos ka), \quad k \equiv k_y,$$

$$b_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 [(1 - 2\lambda)^2 + 4(-1)^n \lambda],$$

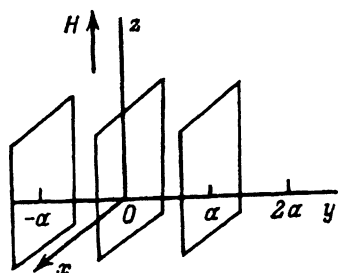


Рис. 1. Взаимная ориентация плоскостей, образующих сверхрешетку, и направления магнитного поля.

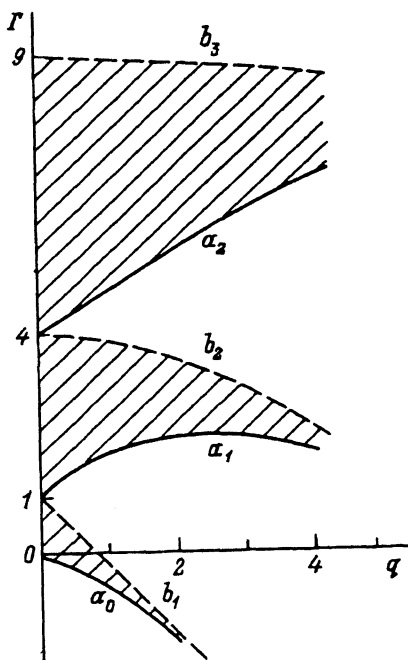


Рис. 2. Спектр собственных значений уравнения (6). Заштрихованы области разрешенных значений Γ .

$$\Delta_n = 4(-1)^{n+1} \lambda \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \equiv \frac{2\hbar^2}{m_n a^2},$$

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{2ma\alpha} \ll 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где a — период сверхрешетки, индекс n нумерует минизоны, m — объемная эффективная масса электрона (дырки), m_n — эффективная масса у дна потолка n -й минизоны. Зависящий от m безразмерный параметр λ характеризует проницаемость δ -барьеров: $\lambda \rightarrow 0$ соответствует распаду сверхрешетки на отдельные потенциальные ямы. Далее мы рассматриваем только минизоны электронов и дырок, ближайшие к запрещенной зоне объемного кристалла, и индекс $h = 1$ будем опускать. Состояния в других минизонах и переходы между ними можно рассмотреть совершенно аналогично.

Блоховская функция минизоны $n = 1$ в ячейке $as \leq y \leq a(s+1)$

$$\begin{aligned} \Psi(k; y) = \frac{i}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{2}{a}} \left[(1 - \lambda - \lambda \cos ka) \sin \frac{\pi \tilde{y}}{a} (1 - 2\lambda) + \pi \lambda e^{-ika} \cos \frac{\pi \tilde{y}}{a} + \right. \\ \left. + \pi \lambda e^{-i\frac{\pi}{2}\tilde{y}} - 2\pi \lambda \frac{\tilde{y}}{a} \cos ka \cos \frac{\pi \tilde{y}}{a} - i\pi \lambda \cos ka \sin \frac{\pi \tilde{y}}{a} \right] e^{ikas}, \quad (2) \\ \tilde{y} = y - as, \quad aN = L_g. \end{aligned}$$

После включения магнитного поля $\mathbf{H} \parallel Oz$ ($A_x = A_z = 0$, $H_y = H_x$) уравнение Шредингера для огибающей электронной функции имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_n \left(-i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eH}{\hbar c} x \right) \right] \Phi(\mathbf{r}) = \left(E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Решения этого уравнения берем в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = e^{ik_x z} \psi(k; y) F(k; x). \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (3) и вводя вместо x переменную

$$\xi = \frac{1}{2} \left(ka + \frac{eH}{\hbar c} ax \right) + \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

приводим к уравнению для функции $F(k; x) \equiv F(\xi)$

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + (\Gamma - 2q \cos 2\xi) F = 0, \quad (6)$$

$$q = 8\pi^2 \lambda \left(\frac{aH}{a} \right)^4,$$

$$\Gamma = 8 \frac{ma_H^4}{\hbar^2 a^2} \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} - b - \frac{1}{2} \Delta \right),$$

$$a_H^2 = \frac{\hbar c}{eH}. \quad (7)$$

Уравнение (6) — стандартное уравнение Матье (см., например, [9]) с коэффициентом, периодическим по переменной ξ с периодом π . Соответственно по x период $2\pi a_H^2/a \equiv x_0$ и по k период $2\pi/a$.

Интересующие нас блоховские решения уравнения (6) имеют общий вид

$$F_{r\kappa}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N_x}} e^{i\kappa\xi} P_{r\kappa}(\xi),$$

$$P_{r\kappa}(\xi) = P_{r\kappa}(\xi + \pi). \quad (8)$$

Функции $P_{r\kappa}(\xi)$ нормированы согласно условию

$$\int_{-x_0/2}^{x_0/2} P_{r'\kappa'}^*(\xi) P_{r\kappa}(\xi) dx = \delta_{rr'} \delta_{\kappa\kappa'}. \quad (8a)$$

При $q \neq 0$ собственные значения Γ , а значит, и энергия движения по оси Ox задаются двумя квантовыми числами r и κ . Спектр вырожден по квантовому числу k и состоит из разрешенных зон (полос)

$$\Gamma_r(\kappa; q), \quad r = 0, 1, 2, \dots; \quad -1 \leq \kappa \leq 1.$$

Если $r = 2s$, $s = 0, 1, 2, \dots$, то волновое число $\kappa = 0$ отвечает двум r -й разрешенной зоне. Соответствующие собственные функции и собственные значения

$$F_{2s,0}(\xi) = P_{2s,0}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} ce_{2s}(\xi; q),$$

$$\Gamma_{2s}(0; q) = a_{2s}(q), \quad (9)$$

где $ce_{2s}(\xi; q)$ — периодическая с периодом π , четная относительно операции $\xi \rightarrow -\xi$ функция Матье, и $a_{2s}(q)$ — собственное значение, ей соответствующее. Волновые числа $\kappa = \pm 1$ соответствуют потолку зоны $2s$, при этом

$$F_{2s,\pm 1}(\xi) = e^{\pm i\xi} P_{2s,\pm 1}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} se_{2s+1}(\xi; q),$$

$$\Gamma(1; q) = b_{2s+1}(q), \quad (10)$$

$se_{2s+1}(\xi; q)$ — функция Матье, имеющая период 2π и нечетная относительно операции $\xi \rightarrow -\xi$.

Если r — нечетное число, $r = 2s + 1$, то на две зоны $\kappa = \pm 1$

$$F_{2s+1,\pm 1}(\xi) = e^{\pm i\xi} P_{2s+1,\pm 1}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} ce_{2s+1}(\xi; q),$$

$$\Gamma_{2s+1}(\pm 1) = a_{2s+1}(q), \quad (11)$$

$\kappa = 0$ соответствует потолку зоны $r = 2s + 1$

$$F_{2s+1,0}(\xi) = P_{2s+1,0}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} se_{2s+2}(\xi; q),$$

$$\Gamma_{2s+1}(0; q) = b_{2s+2}(q). \quad (12)$$

Здесь $se_{2s+1}(\xi; q)$ — четная с периодом 2π , а $se_{2s+2}(\xi; q)$ — нечетная с периодом π функции Матье.

Таким образом, разрешенные энергии лежат в интервалах (рис. 2)

$$a_r(q) \leq \Gamma_r(\kappa; q) \leq b_{r+1}(q). \quad (13)$$

Для произвольных величин параметров q и κ собственные функции и собственные значения уравнения (6) могут быть найдены численным интегрированием. Для периодических решений уравнения — функций Матье — и соответствующих им собственных значений $a_r(q)$ и $b_r(q)$ при $q < 1$ для нескольких низших r имеются аналитические выражения [9].

Если $q \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 0$), сверхрешетка распадается на изолированные потенциальные ямы. В этом предельном случае

$$a_r(0) = b_r(0) = r^2, \quad (14)$$

т.е. разрешенные зоны сливаются, образуя непрерывный спектр.

3. При больших значениях параметра q ($q \gg 1$) минимумы функции $\cos 2\xi$ разделены высокими барьерами, и если в уравнении (6) вблизи этих минимумов положить

$$\begin{aligned} -2q \cos 2\xi &\cong 2q - 4q(\xi - \xi_l)^2, \\ \xi_l &= (2l + 1)\frac{\pi}{2}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

то станет очевидным, что здесь решения уравнения (6) для не слишком больших r будут близкими к функциям гармонических осцилляторов, локализованных в окрестности каждого ξ_l . Более точные выражения для функций и соответствующие им собственные значения можно найти с помощью теории возмущений, взяв в окрестности $\xi = \xi_l$ в качестве основного потенциала $4q(\xi - \xi_l)^2$, а в качестве малого возмущения $2q \cos 2\xi + 4q(\xi - \xi_l)^2$. С точностью, учитывающей перекрывание осцилляторных функций соседних минимумов, получаем

$$\begin{aligned} F_{r\kappa}(\xi) &= C_{r\kappa} \sum_l e^{i\kappa\pi l} v_r \left(\sqrt[4]{4q}(\xi - \xi_l) \right), \\ C_{r\kappa} &= \frac{1}{\sqrt{N_x}} (1 - I_r(1) \cos \kappa\pi), \end{aligned} \quad (16)$$

где $v_r(t)$ — нормированные по переменной x функции гармонического осциллятора, $N_x x_0 = L_x$ — размер кристалла в направлении x , $I_r(l)$ — интеграл перекрывания локализованных в узлах O и l (см. Приложение) осцилляторных функций

$$I_r(l; q) = e^{-\frac{1}{2}\pi^2 l^2 \sqrt{q}} L_r^{(0)}(\pi^2 l^2 \sqrt{q}), \quad (17)$$

$L_r^{(\alpha)}(t)$ — полином Лагерра [10].

Соответствующие функциям (16) зоны разрешенных энергий

$$\Gamma_r(x; q) = \gamma_r(q) + \nu_r(q) \sin^2 \frac{x\pi}{2}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_r(q) &= (h_r(0) + (2r + 1))2\sqrt{q} = \\ &= -2q + 2\sqrt{q}(2r + 1) - \frac{1}{2}(r + 1)r + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{q}}r(r - 1) + \dots - \frac{1}{2}\nu_r(q), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\nu_r(q) = 8\sqrt{q}[h_r(0)I_r(1) - h_r(1)], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} h_r(l) &= \sqrt{q} \int_{-x_0/2}^{x_0/2} v_r(\sqrt[4]{4q}(\xi - \xi_0)) [\cos 2\xi - 2(\xi - \xi_0)^2] v_r(\sqrt[4]{4q}(\xi - \xi_l)) dx = \\ &= \sqrt{q} \cos l\pi e^{-\frac{1}{2}l^2\pi^2\sqrt{q} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{q}}} L_r^{(0)}\left(l^2\pi^2\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) - \\ &- e^{-\frac{1}{2}l^2\pi^2\sqrt{q}} \left[\frac{1}{2}(1 + \pi^2l^2\sqrt{q}) L_r^{(0)}(l^2\pi^2\sqrt{q}) + L_{r-1}^{(1)}(\pi^2l^2\sqrt{q})\right]. \end{aligned} \quad (21)$$

В формуле (18) $\nu_r > 0$ при r четном и $\nu_r < 0$ при r нечетном, $\nu_r(q)$ — ширина разрешенной зоны Γ_r .

Полагая в формулах (1), (7) и (18)–(21) $m = m_e$ и удерживая только старшие члены в полиномах Лагерра, получаем приближенное выражение для энергии электрона в зоне проводимости

$$\begin{aligned} E_e(r, x) &= b + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} + \hbar\omega_{ce} \left[\sqrt{\frac{m_e}{m_{1e}}} \left(r + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}r(r + 1)\frac{a^2}{a_H^2} - \right. \\ &- \frac{1}{64}r(r - 1)\sqrt{\frac{m_{1e}}{m_e}} \left(\frac{a^2}{a_H^2}\right)^2 + \dots - (-1)^{r+1} \frac{\pi^{2r}}{2r!} \left(\frac{2a_H^2}{a^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_{1e}}}\right)^{r+1} e^{-\frac{1}{2}\pi^2\sqrt{q_e}} \left. + \right. \\ &+ \hbar\omega_{ce} \frac{\pi^{2r}}{r!} (-1)^{r+1} \left(\frac{2a_H^2}{a^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_{1e}}}\right)^{r+1} e^{-\frac{1}{2}\pi^2\sqrt{q_e}} \sin^2 \frac{x\pi}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\omega_{ce} = \frac{eH}{m_e c}.$$

Отсюда видно, что в пределе $q_e \rightarrow \infty$, что соответствует слабому магнитному полю или $a \rightarrow 0$, энергетические зоны движения по оси x сжимаются в дискретные эквидистантные уровни Ландау с циклотронной частотой $\omega'_{ce} = eH/c\sqrt{m_e m_{1e}}$. Совершенно аналогичные выражения в приближении сферических зон получаются и для энергий легких и тяжелых дырок в валентной зоне.

4. Полная волновая функция электрона в зоне проводимости

$$\Psi_e(\mathbf{r}_e) = \frac{1}{\sqrt{L_z N_x}} e^{ik_{ze}z_e + i\kappa_e \xi_e} P_{r\kappa_e}(\xi_e) \psi(k_e; y_e) u_c(r_e \sigma_e), \quad (23)$$

$$\xi_e = \frac{1}{2} \left(k_e a + \frac{a}{a_H^2} x_e \right) + \frac{\pi}{2}.$$

Волновая функция дырок получается из (23) операциями инверсии времени и заменой $m_e \rightarrow m_h$, $k_e \rightarrow -k_h$, $x_e \rightarrow -x_h$, $r_e \rightarrow r_h$, $r \rightarrow r'$, $u_c \rightarrow u_v$

$$\Psi_h(\mathbf{r}_h) = \frac{1}{\sqrt{L_z N_x}} e^{ik_z h z_h + i\kappa_h \xi_h} \bar{P}_{r', -x_h}^*(\xi_h) \bar{\psi}^*(-k_h; y_h) u_v^*(r_h, \sigma_h), \quad (24)$$

$$\xi_h = \frac{1}{2} \left(-k_h a + \frac{a}{a_H^2} x_h \right) + \frac{\pi}{2},$$

где σ_e и σ_h — спиновые переменные, черта над обозначением функций означает замену $\lambda_e \rightarrow \lambda_h$.

Полная энергия электронно-дырочной пары, образующейся при оптическом межзонном переходе, равна

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2 a^2}{8a_H^4} \left[\frac{1}{m_e} \Gamma_r(\kappa_e; q_e) + \frac{1}{m_h} \Gamma_r(\kappa_h; q_h) \right] + \tilde{E}_g, \quad (25)$$

$$\tilde{E}_g = E_g + b_e + b_h + \frac{1}{2}(\Delta_e + \Delta_h) + (\beta_e + \beta_h)H. \quad (26)$$

Здесь $\mu = m_1 m_e / (m_e + m_h)$ — приведенная объемная масса электрона и дырки, β_e и β_h — их эффективные магнитные моменты.

Используя (23) и (24), находим матричный элемент магнитооптического перехода

$$M = \frac{e\tilde{A}_0}{m_0 c} \langle \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) | (\boldsymbol{\eta}, \hat{\mathbf{p}}_e) | \Psi_e(\mathbf{r}_e) \Psi_h(\mathbf{r}_h) \rangle = \frac{e\tilde{A}_0}{m_0 c} (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_{cv}) \chi(k) S_{r'r}(\kappa), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(k) &= \int_{-a/2}^{a/2} \psi(k_e; y_e) \bar{\psi}^*(-k_h; y_h) \delta(y_e - y_h) \delta_{k_e, -k_h} dy_e dy_h = \\ &= \sum_s e^{i k a s} \langle \bar{Q}_s^* | Q_0 \rangle, \quad k = k_e = -k_h, \\ S_{r'r}(\kappa) &= \int_{-x_0/2}^{x_0/2} \bar{P}_{r', \kappa_h}^*(\xi_h) P_{r\kappa_e}(\xi_e) \delta(x_e - x_h) \delta_{\kappa_e, -\kappa_h} dx_e dx_h = \\ &= \frac{x_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{P}_{r', \kappa}^*(\xi) P_{r\kappa}(\xi) d\xi, \quad \kappa_e = -\kappa_h = \kappa, \end{aligned} \quad (28)$$

$Q_s(y)$ и $\bar{Q}_s(y)$ — функции Ванье минизон сверхрешетки, найденные в работе [5].

Коэффициент оптического поглощения на частоте ω

$$\alpha(\omega) = \frac{n_0 \hbar \omega}{U c V} W(\omega), \quad U = n_0^2 \tilde{A}_0^2 \frac{\omega^2}{2\pi c^2}, \quad (29)$$

где $\tilde{A}_0 \boldsymbol{\eta}$ — вектор-потенциал световой волны, V — объем кристалла, n_0 — показатель преломления, $W(\omega)$ — полная вероятность перехода с поглощением кванта $\hbar\omega$

$$W(\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{c \tilde{A}_0}{m_0 c} \right)^2 |(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_{cv})|^2 \frac{L_z L_y}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\pi/a}^{\pi/a} |\chi(k)|^2 dk \times \\ \times \frac{N_x}{2} \int_{-1}^1 dx \sum_{r, r'} |S_{r', r}(x)|^2 \delta(\hbar\omega - \mathcal{E}(k_z, x, k; r, r')). \quad (30)$$

Подставив (30) в (29) и выполнив интегрирование по k и k_z , получим

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2 \sqrt{2\mu}}{c n_0 m_0^2 \hbar \omega a_H^2} |(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_{cv})|^2 g(\lambda_e, \lambda_h) \times \\ \times \sum_{r, r'} \int_{-1}^1 dx \frac{|S_{r', r}(x)|^2 \theta(\hbar\omega - \tilde{E}_g - \frac{\hbar^2 a^2}{8a_H^2} \left(\frac{1}{m_e} \Gamma_r(x; q_e) + \frac{1}{m_h} \Gamma_{r'}(x; q_h) \right))}{\sqrt{\hbar\omega - \tilde{E}_g - \frac{\hbar^2 a^2}{8a_H^2} \left[\frac{1}{m_e} \Gamma_r(x; q_e) + \frac{1}{m_h} \Gamma_{r'}(x; q_h) \right]}}, \quad (31)$$

$$g = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk |\chi(k)|^2 = 1 + \left(1 + \frac{\pi^2}{2} \right) (\lambda_e - \lambda_h)^2, \quad (32)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Из выражения (31) можно заключить, что в общем случае спектр поглощения будет состоять из полос, ширина которых определяется проницаемостью барьеров и величиной магнитного поля. В пределе изолированных квантовых ям ($q_e, q_h \rightarrow 0$) полосы сливаются в сплошной спектр, а в пределе слабого магнитного поля $q_e, q_h \rightarrow \infty$ сужаются, образуя корневые особенности, характерные для переходов на уровни Ландау.

5. Более подробное исследование спектра поглощения можно провести при больших величинах параметров q_e и q_h . В этом случае функции $\Gamma_r(x; q_e)$ и $\Gamma_{r'}(x; q_h)$ определены формулами (18) и (19)–(21). После подстановки этих выражений в (31) коэффициент поглощения при $q \gg 1$ можно представить в виде

$$\alpha(\omega, H) = D(\omega, H) |(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_{cv})|^2 g(\lambda_e, \lambda_h) \sum_{r, r'} [\sigma_0(r, r') R_0 + \sigma_1(r, r') R_1], \quad (34)$$

где

$$R_0(\omega; r', r) = \frac{1}{\sqrt{|\hbar\omega - \eta_{rr'} - \tilde{E}_g|}} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(\pm 1 - p_{rr'}^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{\pm 1 - p_{rr'}^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

$$R_1(\omega; r, r') = \frac{1}{\sqrt{|\hbar\omega - \eta_{rr'} - \tilde{E}_g|}} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta(\pm 1 - p_{rr'}^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{\sqrt{\pm 1 - p_{rr'}^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, \quad (35)$$

$$D(\omega, H) = \frac{e^2 \sqrt{2\mu}}{n_0 c^2 m_0^2 \hbar \omega a_H^2}, \quad p_{rr'}^2 = \frac{\Lambda_{rr'}}{|\hbar\omega - \eta_{rr'} - \tilde{E}_g|},$$

$$\eta_{rr'}(q_e, q_h) = \frac{\hbar^2 a^2}{8a_H^2} \left[\frac{1}{m_e} \gamma_r(q_e) + \frac{1}{m_h} \gamma_{r'}(q_h) \right],$$

$$\Lambda_{rr'}(q_e, q_h) = \frac{\hbar^2 a^2}{8a_H^2} \left[\frac{1}{m_e} \nu_r(q_e) + \frac{1}{m_h} \nu_{r'}(q_h) \right],$$

$$\sigma_0(r, r') = \bar{I}_{rr'}^2(0; q_e q_h) \left[1 - 2 \left(I_r^{(e)}(1) + I_{r'}^{(h)}(1) \right) \right] + 4 \bar{I}_{rr'}(0; q_e q_h) I_{rr'}(1, q_e q_h),$$

$$\sigma_1(r, r') = 4 \bar{I}_{rr'}^2(0; q_e q_h) \left[I_r^{(e)}(1) + I_{r'}^{(h)}(1) - 2 \bar{I}_{rr'}(1; q_e q_h) \right]. \quad (36)$$

Знаки \pm перед единицей в формулах (35) соответствуют случаям $\Lambda_{rr'} > 0$ и $\Lambda_{rr'} < 0$. Выражение для входящих в (36) интегралов $\bar{I}_{rr'}$ дано в Приложении.

Из формул (34)–(36) и (П.1) следует, что при $q_{e,h} \gg 1$ переходы разрешены только между подзонами электронов и дырок с одной и той же четностью индексов r и r' , причем интенсивность переходов определяется величиной σ_0

$$\sigma_0 \sim \bar{I}_{rr'}^2(q_e, q_h) \sim \left| \frac{\sqrt{q_e} - \sqrt{q_h}}{\sqrt{q_e} + \sqrt{q_h}} \right|^{|r-r'|}. \quad (37)$$

Положение и характер особенностей в спектре определяются интегралами $R_0(\omega; r, r')$. Интегралы $R_1(\omega; r, r')$ новых особенностей в спектр не вносят, и, кроме того, поскольку при больших q $\sigma_0 \gg \sigma_1$, они дают лишь малые поправки в полную интенсивность.

Исследование особенностей в спектре, обусловленных переходом между конкретной парой подзон r, r' (далее индексы r, r' для простоты опускаем и полагаем $\Lambda_{rr'} \equiv \Lambda$, $p_{rr'} \equiv p$, $\hbar\omega - \eta_{rr'} - \tilde{E}_g \equiv \Omega$), дает следующее

1) r' и r четные, $\Lambda > 0$ (рис. 3, 1). В области $\Omega < 0$ (а)

$$R_0(\omega; rr') = 0, \quad R_1 = 0, \quad (38)$$

в области $0 < \Omega < \Lambda$ (b) ($p^2 > 1$)

$$R_0 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{p} K \left(\frac{1}{p^2} \right),$$

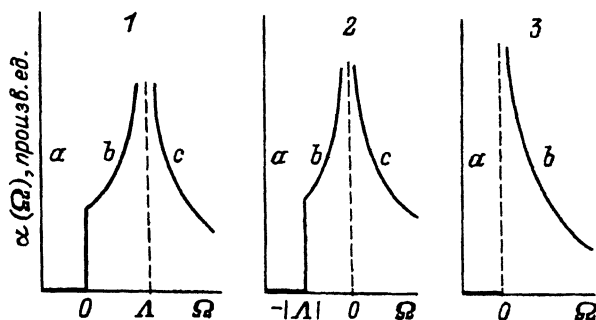


Рис. 3. Форма кривой поглощения при оптическом переходе между подзонами $\Gamma_r(x_c)$ и $\Gamma_{r'}(x_h)$.

1 — $\Lambda > 0$ (τ и τ' четные), 2 — $\Lambda < 0$ (τ и τ' нечетные), 3 — $\lambda = 0$.

$$R_1 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{p} K\left(\frac{1}{p^2}\right) - pE\left(K\left(\frac{1}{p^2}\right) \middle| \frac{1}{p^2}\right) - \frac{p-1}{p} K\left(\frac{1}{p^2}\right) \right], \quad (39)$$

где $K(t)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, $E(t|s)$ — неполный эллиптический интеграл 2-го рода [9].

При $\Omega \rightarrow 0$ ($p^2 \rightarrow \infty$) (порог поглощения для данной пары подзон)

$$R_0 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\Lambda}}, \quad R_1 \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (40)$$

При $\Omega \rightarrow \Lambda$ слева ($p^2 \rightarrow 1$, $p^2 > 1$)

$$R_0 \approx R_1 \approx \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \ln \frac{4\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda} - \Omega}. \quad (41)$$

В области $\Lambda < \Omega < \infty$ (с) ($p^2 < 1$)

$$R_0 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} K(p^2),$$

$$R_1 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{p^2} [K(p^2) - E(p^2)], \quad (42)$$

$E(t)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

При $\Omega \rightarrow \Lambda$ справа ($p^2 \rightarrow 1$, $p^2 < 1$)

$$R_0 \sim \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \ln \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\sqrt{\Omega} - \Lambda},$$

$$R_1 \sim \frac{4}{\pi} \Omega^{-1/2}. \quad (43)$$

При $\Omega \gg \Lambda$ ($p^2 \rightarrow 0$)

$$R_0 \cong 2R_1 = 2\Omega^{-1/2}. \quad (44)$$

Кривая поглощения в случае $\Lambda > 0$ представлена на рис. 3, 1.

II) r' и r — нечетные, $\Lambda < 0$ (рис.3,2). В области $\Omega < \Lambda$ (a) ($|p^2| > 1$)

$$R_0 = R_1 = 0. \quad (45)$$

Область $\Lambda < \Omega < 0$ (b). При $\Omega \rightarrow \Lambda$ справа ($|p^2| \rightarrow 1$)

$$R_0 \cong R_1 \cong 2|\Lambda|^{-1/2}, \quad (46)$$

при $\Omega \rightarrow 0$ слева ($|p^2| \rightarrow \infty$)

$$R_0 = |\Lambda|^{-1/2} \ln \left| \frac{\Lambda}{\Omega} \right|, \quad R_1 \sim O\left(\frac{1}{|p^4|}\right). \quad (47)$$

В области $0 < \Omega < \infty$ (c) ($|p^2| \rightarrow 1$)

$$R_0 = \frac{4}{\pi} \Omega^{-1/2} (1 + |p^2|)^{-1/2} K\left(\frac{|p^2|}{1 + |p^2|}\right). \quad (48)$$

При $\Omega \rightarrow 0$ ($|p^2| \rightarrow \infty$)

$$R_0 \cong R_1 \sim \frac{4}{\pi} |\Lambda|^{-1/2} \ln \frac{4|\Lambda|}{\sqrt{\Omega}}, \quad (49)$$

При $\Omega \rightarrow \infty$ ($|p^2| \rightarrow 0$)

$$R_0 = 2R_1 \rightarrow 2\Omega^{-1/2}. \quad (50)$$

III) $\Lambda = 0$ (рис. 3,3)

$$\Omega < 0, \quad R_0 = R_1 = 0,$$

$$\Omega > 0, \quad R_0 = 2R_1 = 2\Omega^{-1/2}. \quad (51)$$

Из приведенных результатов легко заметить, что ступеньки между областями *a* и *b* на рис. 3 есть особенности, соответствующие двумерным минимумам в функциональной зависимости полной энергии \mathcal{E} от k_z и κ . Логарифмические разрывы, разделяющие области *b* (6) и *c* на рис. 3, соответствуют седловым точкам функции $\mathcal{E}(k_z, \kappa)$ (минимум по k_z и максимум по κ). При $\Lambda = 0$ получаются характерные для магнитооптических переходов корневые разрывы, обусловленные особенностями одномерной плотности состояний.

Можно предположить, что конкретные выводы о структуре спектра магнитопоглощения, полученные для $q \gg 1$, останутся в общих чертах справедливыми и при не слишком больших q ($q \gtrsim 1$). Тогда здесь спектр движения по оси x можно аппроксимировать формулой (18), считая, однако, что входящие в нее величины не задаются выражениями (19) и (20), а являются при подходящем выборе параметров λ_e и $\lambda_h = (m_e/m_h)\lambda_e$ эмпирическими параметрами или получаются при численном интегрировании уравнения (6). Таким образом, можно считать, что полученные выше достаточно простые формулы окажутся полезными не только для качественного, но и для количественного анализа экспериментальных результатов.

6. Сделаем некоторые замечания, касающиеся полученных результатов. Проницаемость δ -барьеров для данного типа носителей характеризуется параметром теории λ_j ($j = 2, h$). При $\lambda_j = 0$ барьеры становятся непроницаемыми и сверхрешетка распадается на отдельные

прямоугольные потенциальные ямы, разделенные бесконечно высокими стенками. Все выводы получены в предположении $\lambda \ll 1$. Поскольку при учете магнитного поля мы используем приближение огибающей функции, то всегда должно выполняться также условие $a_H > a$. При выполнении этого условия говорить о сильном или слабом магнитном поле можно лишь для заданного периода сверхрешетки.

При фиксированном λ предел $q \gg 1$, при котором спектр состоит из почти дискретных уровней Ландау, достигается, когда $a_H^4/a^4 \gg 1$, что соответствует «слабому» магнитному полю при заданном периоде a . Этот результат вполне понятен — магнитная длина перекрывает большое число периодов сверхрешетки, и кристалл со сверхрешеткой по отношению к магнитному полю ведет себя как однородная анизотропная сплошная среда (эффективные массы носителей в направлении периодичности сверхрешетки $m_{n,j}$ определены формулой (1)). Уровни Ландау размножаются в зоны, расширяющиеся по мере уменьшения отношения a_H^4/a^4 , что соответствует или усилению магнитного поля при фиксированном периоде («сильное» поле), или увеличению периода при заданном поле. Однако в силу общего требования $a_H \gtrsim a$ при фиксированном H нельзя неограниченно увеличивать a . Очевидно, что условие $q \rightarrow 0$ для какого-либо типа носителей может быть достигнуто только за счет малости соответствующего параметра λ_j . Здесь следует заметить, что в заданном магнитном поле величины q для разных типов носителей тока из-за различия эффективных масс будут сильно отличаться и могут попадать в разные предельные области. Например, в работе [5] для согласия с результатом численного расчета ширины минизоны в сверхрешетке GaAs-Al_{0.35}Ga_{0.65}As с периодом $a = 50 \text{ \AA}$ ($m_e = 0.065m_0$, $m_{hh} = 0.55m_0$) [6] бралось $\lambda_e = 0.05$, $\lambda_{hh} = (m_e/m_{hh})\lambda_e = 5.9 \cdot 10^{-3}$. При $H = 10^5 \text{ Oe}$ это дает для электронов $q_e = 27.4$, для тяжелых дырок $q_{hh} = 3.24$. Для решетки с периодом 100 \AA при той же эффективной проницаемости барьеров получается $q_e = 1.71$, $q_{hh} = 0.203$.

Электронные состояния и спектр поглощения в сверхрешетках в поперечном магнитном поле впервые исследовались Бережковским и Сурисом [11,12]. В этих работах вид периодического потенциала не конкретизировался и блоховские функции сверхрешетки в отсутствие поля брались в приближении сильной связи. Общий характер энергетического спектра, описанный в [11], конечно, подтверждается и на частной модели, использованной в нашей работе, хотя полученные нами простые формулы позволяют в более явном виде проследить эволюцию спектра в зависимости от величин λ , a , H .

7. В заключение заметим, что для любой модели одномерной сверхрешетки (более общей и более сложной, чем рассмотренная) останутся справедливыми основные выводы, полученные в настоящей работе. Действительно, в любой модели сверхрешетки, симметричной относительно $y \rightarrow -y$, закон дисперсии в минизонах периодичен

$$\varepsilon_h \left(k + \frac{2\pi}{a} \right) = \varepsilon(k), \quad \varepsilon(-k) = \varepsilon(k),$$

а уравнение (6) будет иметь вид общего уравнения Хилла (см. также [11]). Спектр собственных значений этого уравнения в общем случае

имеет тот же зонный характер, что и в рассмотренном нами частном случае уравнения Матве. В пределе непроницаемых барьеров минизоны (движение по оси Oy) превращается в дискретные уровни, а спектр движения в направлении, перпендикулярном магнитному полю и направлению периодичности сверхрешетки (ось Ox), становится непрерывным.

В противоположном предельном случае легко проницаемых барьеров сверхрешетки относительно слабого магнитного поля или малых периодов барьеры движения по оси Ox станут высокими и соответствующий спектр почти дискретным (уровни Ландау). В этом предельном случае, очевидно, сделаются запрещенными переходы между уровнями разной четности относительно инверсии оси Ox . Общий характер имеют также и выводы о типах особенностей в критических точках Ван Хофа, которые должны появиться в спектре оптического межзонного поглощения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводим общее выражение для интегралов, входящих в формулы (16), (17) и (36)

$$\begin{aligned}
 I_{rr'}(l; q_e, q_h) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_r \left(\sqrt[4]{4q_e}(\xi - \xi_0) \right) v_{r'} \left(\sqrt[4]{4q_h}(\xi - \xi_l) \right) dx = \\
 &= \sqrt{\frac{r!r'}{2^{r+r'}}} \frac{2\sqrt[4]{q_e q_h}}{\sqrt{q_e + q_h}} e^{-\pi^2 l^2 \frac{\sqrt{q_e q_h}}{\sqrt{q_e + q_h}}} \times \\
 &\times \sum_{\mu, \nu \leq r', r} \left(\frac{4\sqrt[4]{q_e q_h}}{\sqrt{q_e + q_h}} \right)^N \left(\frac{\sqrt{q_e} - \sqrt{q_h}}{\sqrt{q_e + q_h}} \right)^{\frac{1}{2}(r+r') - \frac{1}{2}(\mu + \nu)} \times \\
 &\times \frac{(-1)^{\frac{r'-\mu}{2}}}{\left(\frac{r'-\mu}{2}\right)! \left(\frac{r-\nu}{2}\right)!} \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{2}\pi l \left(\frac{\sqrt[4]{q_e q_h^2}}{\sqrt{q_e + q_h}} \right)^{|\nu - \mu|}, \quad \nu > \mu \\ -2\sqrt{2}\pi l \left(\frac{\sqrt[4]{q_e^2 q_h}}{\sqrt{q_e + q_h}} \right)^{|\nu - \mu|}, \quad \mu > \nu \end{array} \right\} \times \\
 &\times \frac{1}{(N + |\mu - \nu|)!} L_N^{|\nu - \mu|} \left(2\pi^2 l^2 \frac{\sqrt{q_e q_h}}{\sqrt{q_e + q_h}} \right), \quad (П.1)
 \end{aligned}$$

$$N = \min(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\nu + \mu) - \frac{1}{2}|\mu - \nu|, \quad \xi_l = (2l + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Суммы (П.1) берутся по положительным числам ν и μ одной четности соответственно с r и r' . В частных случаях получим

$$\bar{I}_{rr'}(l; q_t, q_t) \equiv I_{rr'}^{(t)}(l), \quad \bar{I}_{rr}(l; q_t, q_t) \equiv I_r^{(t)}(l), \quad t = e, h. \quad (П.2)$$

Список литературы

- [1] Localization and Confinement of Electrons in Semiconductors. Springer Series in Solid Stat Sc. 1990. V. 97.
- [2] The Optical Properties of Semiconducting Quantum Wells and Superlattices. Part I. J. Luminescence. 1989. V. 44. N 4-6.
- [3] Shame L.J., Lu Y.-T. // J. Luminescence. 1989. V. 44. N 4-6. P. 207-221.
- [4] Покатиллов Е.П., Фомин В.М., Берил С.И. Колебательные возбуждения, поляритоны и экситоны в многослойных системах и сверхрешетках. Кишинев: Штинница, 1990.
- [5] Жилич А.Г. // ФТТ. 1992. Т. 34. № 11. С. 3501-3510.
- [6] Mendez E.E. // [1]. P. 224-236.
- [7] Mendez E.E., Agullo-Roeda F. // J. Luminescence. 1989. V. 44. N 4-6. P. 223-231.
- [8] Bleuse J., Bestard G., Voisin P. // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 220-222.
- [9] Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана. М., 1979. 830 с.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. II. М., 1974. С. 295.
- [11] Бережковский А.М., Сурис Р.А. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 1. С. 193-199.
- [12] Бережковский А.М., Сурис Р.А. // ФТП. 1984. Т. 18. № 7. С. 1224-1228.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило в Редакцию
21 мая 1993 г.
В окончательной редакции
28 октября 1993 г.