Письма в ЖТФ, том 19, вып. 14 26 июля 1993 г.

01

ТОЧНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ АДДИТИВНОЙ СМЕСИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА И ГАУССОВА ШУМА С ПОМОЩЬЮ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

В.М.Логинов

Проблема выделения полезной информации, содержащейся в сигналах на входе измерительных приборов, приемных устройств линий коммуникаций и т.п., является одной из важнейших для современной науки и техники. В числе причин, существенно усложняющих ее решение, лежит то обстоятельство, что наряду с полезной информацией, на приемные устройства поступают сигналы, содержащие ту или иную меру неопределенности, т.е. случайные сигналы или шумы [1,2].

Особое место среди задач указанного круга занимает задача об аддитивной смеси не случайного сигнала $g(t)$ и гауссовой помехи $\alpha(t)$. Ее выделенность обусловлена распространенностью условий, при которых формируются шумы гауссовской статистики, а также существующей практикой формирования сигналов.

В данной работе показывается, что для указанной смеси в рамках общепринятых статистических подходов существует принципиальная возможность *точного* разделения. При этом в качестве фильтрующего элемента предлагается использовать нелинейные распределенные системы, в частности можно использовать уединенную нелинейную волну — солитон. Сказанное иллюстрируется на примере односолитонных решений стохастически возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза (КДФ).

М.Вадати в работе [3], используя метод обратной задачи рассеяния, показал, что точное неусредненное решение стохастического уравнения КДФ

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\beta(t) \tag{1}$$

имеет вид

$$u(x,t)=v(t)-2k^2\mathrm{sech}^2\left[k(x-x_0)-4k^3t+6k\int\limits_0^t v(\tau)d\tau\right], \tag{2}$$

где $\beta(t)$ — гауссовский шум, $v(t)=\int\limits_0^t\beta(\tau)d\tau$, k — параметр спектральной задачи, x_0 — положения солитона в начальный момент времени $t=0$. В [3] исследовалась эволюция средней огибающей солитона $\langle u(x,t)\rangle$ при воздействии гауссовского белого шума β. В работах [4,5], исходя из структуры односолитонных решений, в частности (2), сформулирована и решена общая задача вычисления средних вида $\langle\Phi(z+w(t))\rangle$, где $\Phi(z)$ — некоторая не случайная функция переменной z, $w(t)=\int\limits_0^t\alpha(\tau)d\tau$ — случайный процесс от некоторого гауссова процесса $\alpha(t)$. Символ $\langle\ldots\rangle$ означает статистическое усреднение по ансамблю реализаций процесса $\alpha(t)$. Переменные z и $w(t)$ являются независимыми переменными. При произвольных гауссовых возмущениях $\alpha(t)$ с $\langle\alpha(t)\rangle=0$ и $\langle\alpha(t)\alpha(\tau)\rangle=K(t,\tau)$ было показано, что среднее $\langle\Phi\rangle$ характеризует некоторый "диффузионный процесс" в пространстве переменных t и z (переменная t здесь и далее трактуется как временная переменная).

Пусть теперь на правую часть уравнения КДФ наложено возмущение $\xi(t)=f(t)+\beta(t)$, где $f(t)$ — произвольная не случайная функция времени, $\beta(t)$ — произвольный гауссовский шум, т.е. $\xi(t)$ представляет собой детерминированный сигнал на фоне аддитивной гауссовой помехи. Структура неусредненного решения (2) уравнения КДФ при таком виде воздействия не меняется. Физически рассматриваемая модель описывает динамику солитона в силовом поле, содержащем наряду со случайной компонентой $\beta(t)$, регулярную составляющую $f(t)$. Применительно к этому случаю в общей постановке возникает задача вычисления статистического среднего по гауссовой мере от функционала $\Phi(z,t)=\Phi(z+\int\limits_0^t\eta(\tau)d\tau)\equiv\Phi(z+\int\limits_0^t g(\tau)d\tau+\int\limits_0^t\alpha(\tau)d\tau)$, где $g(t)$ — некоторая неслучайная функция времени, и $\alpha(t)$ — гауссовский процесс с определенными выше характеристиками. Следуя [3,4], нетрудно показать, что динамика среднего $\langle\Phi\rangle$ управляется уравнением

$$\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial t}=g(t)\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial z}+D(t)\frac{\partial^2\langle\Phi\rangle}{\partial z^2}, \tag{3}$$

где $D(t) = \int_0^t K(t,t_1)dt_1$. При $t=0$ имеем, очевидно, $\langle\Phi\rangle|_{t=0} = \Phi(z)$. Сравнение (3) с уравнением диффузии, полученным в [3,4], показывает, что за эволюцию среднего $\langle\Phi\rangle$ теперь отвечают два механизма: диффузия с коэффициентом диффузии $D(t)$ и конвекция со скоростью переноса $g(t)$. Принципиально важно, что это два различных физических механизма. Как следует из вида уравнения (3), за каждый из этих механизмов ответственна своя составляющая комбинированного возмущения $\eta(t) = g(t) + \alpha(t)$. Конвективный перенос происходит благодаря воздействию не случайной компоненты сигнала $\eta(t)$ (или силы, если речь идет о стохастическом уравнении КДФ) и скорость этого переноса есть просто $g(t)$. Применим результат к стохастическому уравнению КДФ (1) с возмущением в виде аддитивной силы $\xi(t) = f(t) + \beta(t)$. В этом случае следует положить $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)d\tau$ так, что "скорость конвективного переноса" $g(t)$ средней огибающей солитона характеризуется величиной интеграла от функции $f(t)$ и по-прежнему определяется исключительно детерминированной составляющей силы $\xi(t)$. За диффузионное же расплывание солитона отвечает шумовая компонента $\beta(t)$ силы ξ.

Таким образом, действия компонент аддитивной смеси гауссова шума и детерминированного сигнала на нелинейную распределенную систему, описываемую некоторой динамической переменной $\Phi(z + q(t) + \int_0^t \alpha(\tau)d\tau)$, *точно разделяются.* Случайная компонента отвечает за диффузионный механизм переноса некоторой субстанции $\langle\Phi\rangle$, а детерминированная компонента управляет ее конвективным переносом со скоростью $g(t)$. В свете сказанного изучаемый класс нелинейных распределенных динамических моделей может рассматриваться в качестве своеобразных фильтров для разделения аддитивных смесей детерминированных сигналов с гауссовым шумом. Обратим внимание на то, что вид составляющих смеси может быть достаточно произвольным, а используемые неявно требования интегрируемости не являются ограничительными.

Рассмотрим в качестве первого "нелинейного распределенного фильтра" (НРФ) односолитонное решение (2) стохастического уравнения КДФ (1), возмущенного силой $\xi(t)$. Для этого случая диффузионное уравнение (3) управляет эволюцией разности $\langle u(x,t)\rangle - \int_0^t f(\tau)d\tau \equiv \langle\Phi\rangle$. Следовательно, эволюция средней огибающей солитона описывается выражением

$$\langle u(x,t)\rangle = \int_0^t f(\tau)d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z-q(t)-y)^2}{4\theta(t)}\right)\Phi(y)dy, \quad (4)$$

где $z = k(x-x_0) - 4k^3t$, $\Phi(z) = -2k^2\operatorname{sech}^2 z$, $q(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\tau_1)d\tau_1$, $\theta(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_1} K(\tau_2,\tau_3)d\tau_3$.

Рассматриваемый пример представляет интерес в связи с тем, что математическая модель (1) допускает физическое моделирование, в частности с помощью нелинейной линии передачи с дисперсией [6].

Приведем более простой НРФ, который также формируется из решения стохастического уравнения КДФ, возмущаемого не аддитивно, как в предыдущем примере, а параметрически (см. в [7] формулы (3.26), (3.27)). В этом случае нетрудно показать, что в отличие от предыдущего примера, конвективный перенос среднего $\langle u(x,t)\rangle$ происходит со скоростью, пропорциональной непосредственно амплитуде детерминированного “сигнала” $g(t)$.

Таким образом, по тому как движется максимум средней огибающей солитона, можно судить о наличии или отсутствии в смеси $\xi(t)$ детерминированной составляющей. Динамика расплывания солитона определяется при этом исключительно шумовой компонентой смеси.

В заключение отметим, что в качестве НРФ для точного разделения аддитивных смесей можно использовать односолитонные решения некоторых других нелинейных стохастических уравнений.

Список литературы

[1] *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1981. 640 с.

[2] *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 654 с.

[3] *Wadati M.* // J. Phys. Soc. Jap. 1983. V. 52. P. 2642–2648.

[4] *Логинов В.М.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. С. 53–56.

[5] *Логинов В.М.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. С. 186–188.

[6] *Лонгрен К.* Солитоны в действии / Под ред. К.Лонгрена, Э.Скотта. М.: Мир, 1981. С. 138–162.

[7] *Bass F.G., Kivshar Yu.S., Konotop V.V., Sinitsyn Yu.A.* // Phys. Rep. 1988. V. 157. P. 63–181.

Тувинский комплексный отдел СО РАН,
Кызыл

Поступило в Редакцию
10 мая 1993 г.