

# Аналитическая теория намагничивания малых частиц во внешнем переменном поле

© Д.В. Вагин, О.П. Поляков, С.А. Поломошнов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия

E-mail: vagin@physics.msu.ru

(Поступила в Редакцию 22 марта 2011 г.)

Проведены аналитическое и численное исследования нелинейной динамики сферической магнитной частицы и ансамбля таких частиц во внешнем осциллирующем магнитном поле на основе уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта. Получены точные аналитические формулы, позволяющие рассчитывать проекции средней по времени намагниченности системы от частоты внешнего поля и начальной ориентации магнитных моментов. Рассмотрено поведение системы в предельных случаях малых и больших частот. Построенные асимптотические решения хорошо согласуются с непосредственными численными расчетами уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта. Для случая наличия магнитной анизотропии и размагничивающих полей формы создана аналитическая теория эффекта нелинейной динамической поляризации и обсуждена возможность его применения для создания устройств магнитной памяти.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-00123).

## 1. Введение

Традиционно исследование динамики магнитных моментов было связано с задачами магнитного резонанса. Однако за последние 10–15 лет в физике, химии и технологии разработаны методы, позволяющие манипулировать отдельными атомами и молекулами, совершать операции, которые естественно описывать в терминах конструирования на молекулярном уровне. Наибольший интерес представляют магнитные ультрамалые частицы — нанокластеры, состоящие из небольшого числа атомов (10–10 000), так как наличие внутренней дополнительной степени свободы — магнитного момента — придает большое разнообразие их свойствам и позволяет управлять их состоянием. В плане приложений эти объекты интересны, если их состояние удастся воспроизводимым образом контролировать. Для магнитных материалов этого можно добиться при помощи внешнего магнитного поля [1–5]. Однако, как показали последние исследования, управлять динамикой магнитных моментов малых частиц можно и с помощью изменения их формы и конфигурации системы [6–13]. Варьируя форму частицы или конфигурацию системы, приводящую к эквивалентным изменениям размагничивающих полей, можно получать различные режимы динамики намагниченности (поляризацию, прецессию и хаотические колебания) или, напротив, избегать их реализации. Это является особенно важным для технических приложений, таких как конструирование магнитной памяти (MRAM), сверхчувствительных наноэлементов и т.п., поскольку при частотах внешнего поля, сравнимых с характерными частотами прецессии спинов, существенную роль начинают играть сильно нелинейные эффекты, что обуславливает сложный характер динамики магнитных моментов в системе. (Напротив, хаотические режимы

были экспериментально обнаружены в ферритах и проводящих тонких ферромагнитных пленках.) Понимание этих процессов позволит с большей точностью описывать процессы перемагничивания, записи и считывания с магнитных головок и т.д.

Для описания поведения магнитных сред чаще всего используется уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) [14,15]. Однако в силу существенной нелинейности только в последние годы удалось применить его для всестороннего исследования особенностей временной эволюции вектора намагниченности во внешних переменных полях. В настоящее время актуальны численные исследования процессов управления динамикой и перемагничиванием малых частиц, так как устройства памяти, сенсоры, считывающие информацию элементы разрабатываются пока на базе магнитных объектов (например, тонких однослойных и многослойных прямоугольных полосок размером 1000 nm и менее и толщиной порядка 100–20 nm) [4–11]. Таким образом, математическое моделирование уравнения ЛЛГ имеет не только познавательный интерес — оно непосредственно используется при проектировании новых элементов спинтроники [12,13]. Но в подобных нелинейных системах любое малое изменение управляющих параметров способно привести к существенному изменению режима динамики, поэтому в большинстве практически интересных случаев подобные численные решения являются неустойчивыми или же требуют колоссальных затрат времени счета даже при современном уровне вычислительной техники. В связи с этим большую актуальность приобретают аналитические методы и построение простых приближенных моделей для последующего их использования в комплексных численных расчетах. Большинство таких методов в силу сложности исходного уравнения ЛЛГ базируются на теории возмущений, т.е.

могут иметь предсказательную силу лишь в области слабо нелинейных эффектов [1,2]. В настоящей работе построено точное аналитическое решение уравнения динамики магнитных моментов в рамках приближения сферических частиц и частиц с формой в случае направленной вдоль внешнего поля оси анизотропии.

## 2. Нелинейная динамика векторов намагниченности в малых сферических частицах

В рамках теории Ландау–Лифшица–Гильберта поведение вектора намагниченности определяется следующим уравнением [14,15]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \left[ \mathbf{M} \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} \right] + \alpha \frac{[\mathbf{M}\dot{\mathbf{M}}]}{M}, \quad (1)$$

где  $W$  — полная магнитная энергия системы,  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — параметр затухания Гильберта. Динамика полярного угла  $\theta$  магнитного момента  $\mathbf{M}$  во внешнем переменном поле частоты  $\omega$  (направленном вдоль оси  $z$ )  $H_{\text{ext}} \equiv H_z$  определяется уравнением [6,7]

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \alpha p_z \sin \tau \sin \theta, \quad (2)$$

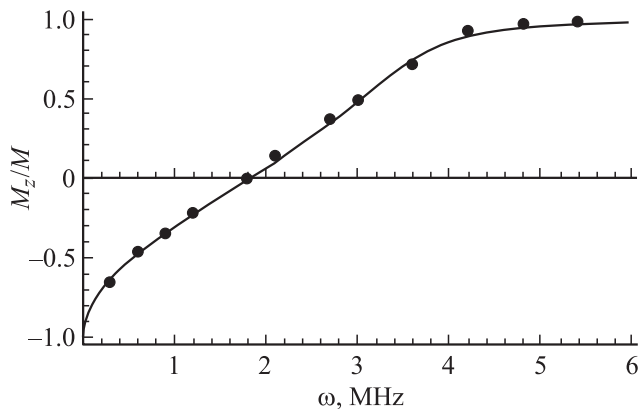
где

$$p_z = \frac{1}{1 + \alpha^2} \frac{\gamma H_z}{\omega}, \quad \tau = \omega t.$$

Оно имеет аналитическое решение

$$\ln \left| \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right| = \alpha p_z (\cos \tau - 1), \quad (3)$$

где  $\theta_0$  — полярный угол, определяющий направление вектора  $\mathbf{M}$  в начальный момент времени (вывод показан



**Рис. 1.** Зависимость компоненты намагниченности вдоль внешнего поля от частоты. Сплошная линия — аналитическая зависимость (6), точки — данные численного моделирования уравнения ЛЛГ.

в Приложении 1). Далее выполним следующие преобразования:

$$1 + \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \exp[2\alpha p_z (\cos \tau - 1)] + 1, \quad (4)$$

$$\cos[\theta(\tau)] = \frac{2}{\left( \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \exp[2\alpha p_z (\cos \tau - 1)] + 1 \right)} - 1. \quad (5)$$

Усредним выражение (5) по времени, поскольку на практике любой прибор измеряет именно средние по времени величины. Поскольку  $\cos[\theta(\tau)]$  периодическая функция, усреднение по времени будет эквивалентно усреднению по периоду на временах, больших величины обратной частоты внешнего воздействия,

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\theta(\tau)] d\tau \\ &= -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\tau}{\left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \exp[-4\alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2] + 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Необходимо отметить, что уравнение (6) является точным аналитическим решением уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта для выбранной конфигурации системы. На рис. 1 представлена зависимость компоненты магнитного момента частицы  $M_z = M(\cos \theta)$  вдоль направления внешнего поля от частоты внешнего воздействия для случая  $\alpha = 0.01$ ,  $H_{\text{ext}} = -300$  Ое,  $\theta_0 = 0.01$ . Видно, что результаты представленной теории полностью согласуются с данными численного моделирования.

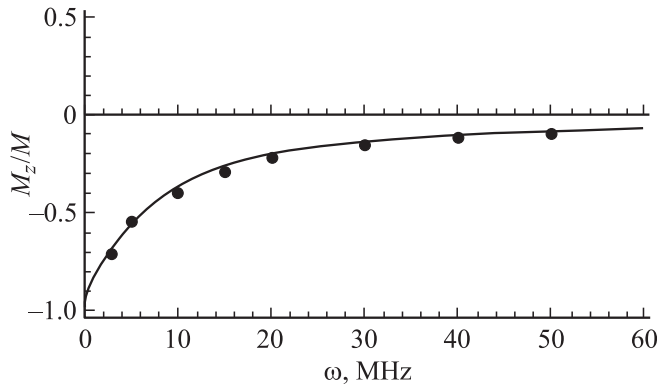
Далее рассмотрим ансамбль слабовзаимодействующих (находящихся на достаточно больших расстояниях друг от друга) частиц сферической формы со случайной ориентацией векторов намагниченности в начальный момент времени; например, матрицу, составленную из произвольным образом „посаженных“ магнитных частичек.

Чтобы найти магнитный момент такой системы, необходимо усреднить выражение (6) по всевозможным ориентациям магнитного момента в начальный момент времени

$$\langle \langle \cos \theta \rangle \rangle = -1 + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\tau d\theta_0}{\left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \exp[-4\alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2] + 1}. \quad (7)$$

Можно показать (см. Приложение 2), что

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \frac{d\theta_0}{\left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \exp[-4\alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2] + 1} \\ &= \frac{\pi}{\exp[-2\alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2] + 1}. \end{aligned}$$



**Рис. 2.** Зависимость компоненты намагниченности вдоль внешнего поля от частоты для ансамбля частиц. Сплошная линия — аналитическая зависимость (8), точки — данные численного моделирования уравнения ЛЛГ.

Тогда величина отношения проекции вектора намагниченности ансамбля частиц на направление внешнего поля к полному магнитному моменту системы задается уравнением

$$\frac{M_z}{M} = \langle \langle \cos \theta \rangle \rangle = -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\tau}{\exp[-2\alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2] + 1}. \quad (8)$$

На рис. 2 представлена зависимость компоненты намагниченности ансамбля частиц  $M_z = M \langle \langle \cos \theta \rangle \rangle$  вдоль направления внешнего поля от частоты внешнего воздействия для случая  $\alpha = 0.01$ ,  $H_{ext} = -300$  Oe.

### 3. Асимптотические зависимости

Поведение магнитного момента одной сферической частицы и ансамбля таких частиц во внешнем переменном поле точно описываются выражениями (6), (8). Однако интегралы в этих уравнениях не могут быть рассчитаны аналитически. Асимптотическое разложение позволяет получить простые формулы, описывающие магнитные свойства системы в случае больших и малых частот внешнего поля.

Рассмотрим предельный случай малых частот  $\alpha p_z \gg 1$  для одной частицы

$$\langle \cos \theta \rangle \approx -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( 1 - \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \times \exp \left[ -4\alpha p_z \left( \sin \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] \right) d\tau. \quad (9)$$

Сделаем в (9) замену переменных  $x = \tau \sqrt{\alpha p_z}$

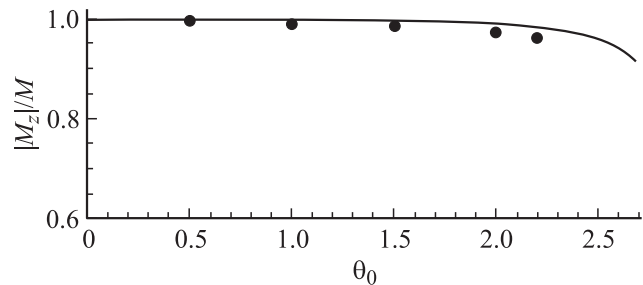
$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &\approx 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi \sqrt{\alpha p_z}} \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \exp[-x^2] \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha p_z}} \\ &= 1 - \frac{\left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)^2}{\sqrt{\alpha p_z}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Зависимость модуля средней намагниченности от величины начального угла для значения управляющего параметра  $\alpha p_z = 50\,000$  (фактически обратной частоты внешнего поля) представлена на рис. 3. Данное значение управляющего параметра соответствует частоте 5 kHz.

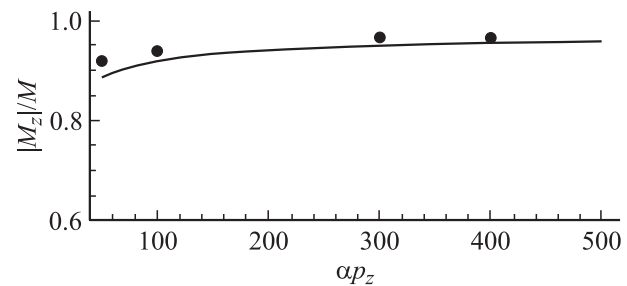
Аналогичные вычисления можно проделать и для ансамбля магнитных частиц. Разложим выражение (8) в пределе малых частот внешнего возмущения

$$\begin{aligned} \langle \langle \cos \theta \rangle \rangle &\approx -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( 1 - \exp \left[ -2\alpha p_z \left( \sin \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] \right) d\tau \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \exp \left[ -2\alpha p_z \left( \sin \frac{\tau}{2} \right)^2 \right] d\tau \approx 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha p_z}}. \end{aligned} \quad (11)$$

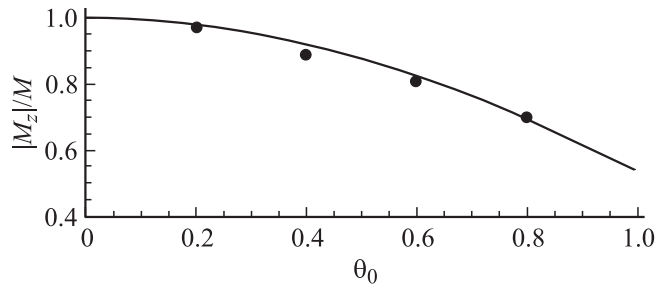
Здесь мы применили разложение функции Бесселя многого аргумента при  $\alpha p_z \rightarrow \infty$ . Зависимость модуля сред-



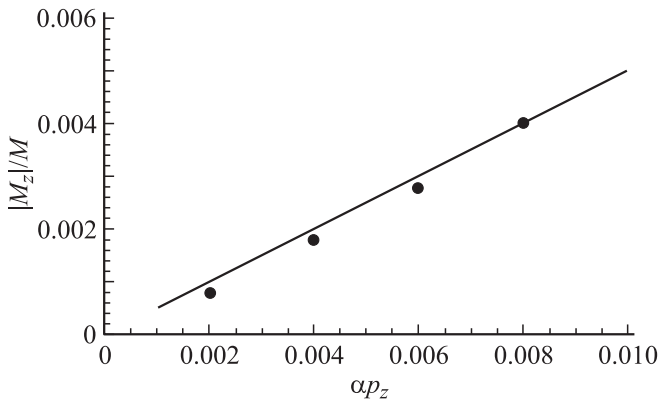
**Рис. 3.** Асимптотическая зависимость компоненты намагниченности вдоль внешнего поля от величины начального угла для одной частицы в случае малых частот. Сплошная линия — аналитическая зависимость (10), точки — данные численного моделирования уравнения ЛЛГ.



**Рис. 4.** Асимптотическая зависимость модуля компоненты намагниченности вдоль внешнего поля от параметра  $\alpha p_z$  для ансамбля частиц в случае малых частот. Сплошная линия — аналитическая зависимость (11), точки — данные численного моделирования уравнения ЛЛГ.



**Рис. 5.** Асимптотическая зависимость модуля компоненты намагниченности вдоль внешнего поля от величины начального угла для одной частицы в случае больших частот  $\alpha p_z = 0.003$ . Сплошная линия — аналитическая зависимость (12), точки — данные численного моделирования уравнения ЛЛГ.



**Рис. 6.** Асимптотическая зависимость модуля компоненты намагниченности вдоль внешнего поля от параметра  $\alpha p_z$  для ансамбля частиц в случае больших частот. Сплошная линия — аналитическая зависимость (13), точки — данные численного моделирования уравнения ЛЛГ.

ней намагниченности от параметра  $\alpha p_z$  представлена на рис. 4. Из рис. 3 и 4 видно, что полученные асимптотические формулы с хорошей точностью описывают поведение системы в случае малых частот внешнего воздействия.

Рассмотрим поведение сферической магнитной частицы в случае больших частот внешнего поля:  $\alpha p_z \ll 1$ . Тогда из (6) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &\approx -1 + \frac{2}{\pi \left(1 + \left(\tan \frac{\theta_0}{2}\right)^2\right)} \\ &\times \int_0^\pi \left(1 + \frac{\left(\tan \frac{\theta_0}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{\theta_0}{2}\right)^2} 4\alpha p_z \left(\sin \frac{\tau}{2}\right)^2\right) d\tau \\ &= -1 + \frac{2}{1 + \left(\tan \frac{\theta_0}{2}\right)^2} + \frac{\left(\tan \frac{\theta_0}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{\theta_0}{2}\right)^2} 4\alpha p_z. \quad (12) \end{aligned}$$

Из анализа выражения (12) следует, что если в начальный момент времени вектор намагниченности частицы направлен против внешнего магнитного поля ( $\theta_0 \rightarrow 0$

и  $H_{\text{ext}} < 0$ ), то в пределе больших частот магнитный момент будет направлен против внешнего воздействия:  $\langle \cos \theta \rangle \rightarrow 1$ . В противоположном случае ( $\theta_0 \rightarrow \pi$  и  $H_{\text{ext}} < 0$ ) их направления будут совпадать:  $\langle \cos \theta \rangle \rightarrow -1$ . Аналогичным образом в высокочастотных полях можно разложить и выражение (8), описывающее магнитные свойства ансамбля наших частиц,

$$\begin{aligned} \langle \langle \cos \theta \rangle \rangle &= -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\tau}{\exp[-2\alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2] + 1} \\ &\approx -1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\tau}{1 - \alpha p_z (\sin \frac{\tau}{2})^2} \\ &\approx -1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \alpha p_z \left(\sin \frac{\tau}{2}\right)^2\right) d\tau \approx \frac{\alpha p_z}{2}. \quad (13) \end{aligned}$$

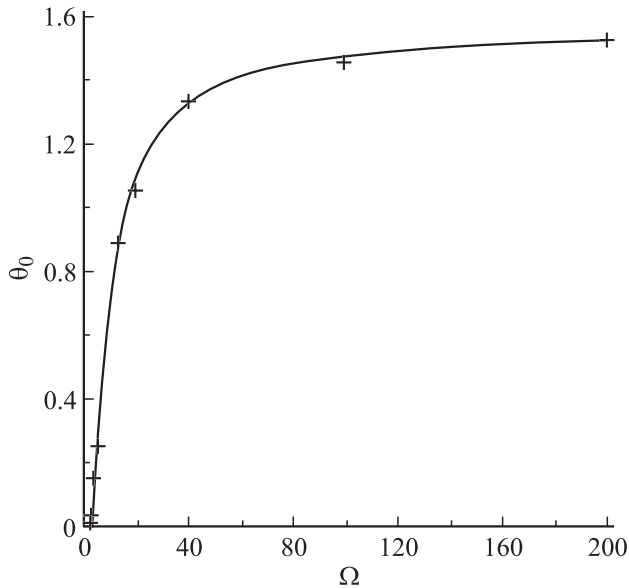
Зависимости, аналогичные рис. 3 и 4, для случая больших частот представлены на рис. 5 и 6. Видно, что полученные асимптотические формулы достаточно точно описывают поведение системы в случае больших частот внешнего воздействия.

#### 4. Нелинейная динамическая поляризация

Правая часть выражения (3) будет максимальна при  $\cos \tau = -1$ . Тогда полярный угол  $\theta$  вектора магнитного момента под воздействием внешнего переменного поля осциллирует в промежутке от начального угла  $\theta_0$  до  $\theta'$ , определяемого формулой

$$\ln \left| \frac{\tan \frac{\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right| = -2\alpha p_z. \quad (14)$$

Если в системе имеется одноосная анизотропия, направленная вдоль оси  $z$ , то на магнитный момент будет действовать дополнительно поле одноосной анизотропии. Действие этого поля будет стремиться ориентировать вектор магнитного момента при  $0 < \theta < \pi/2$  вдоль оси  $z$ , а при  $\pi/2 < \theta < \pi$  — против оси  $z$ . Следовательно, если  $p_z$  будет таковым, что угол  $\pi - \theta'$  будет больше  $\theta_0$ , то действие поля анизотропии приведет с течением времени к ориентации вектора  $\mathbf{M}$  вдоль оси, а при обратном неравенстве — против нее. Таким образом, начальный угол  $\theta_0 = \pi - \theta'$  является критическим углом и определяет критическую кривую, разделяющую состояния системы на плоскости  $(\theta_0, p_z)$ , соответствующие различным ориентациям вектора  $\mathbf{M}$ . Для всех ориентаций намагниченности в начальный момент времени, которые лежат выше критической кривой, магнитный момент с течением времени примет направление против оси  $z$  и соответственно наоборот.



**Рис. 7.** Зависимость критического угла от безразмерной частоты осцилляций внешнего магнитного поля.

Используя эти соображения, получим

$$\ln \left| \frac{\tan \frac{\pi - \theta_0}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right| = -2\alpha p_z, \quad (15)$$

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \exp(\alpha p_z), \quad (16)$$

где  $\theta_0 \in (0, \pi)$ .

Таким образом, выражение (16) является аналитической формулой для упомянутой выше критической кривой, если внешнее синусоидальное магнитное поле направлено против оси  $z$  ( $p_z < 0$ ). В этом случае наблюдается эффект нелинейной динамической поляризации, при котором системе энергетически выгодно подавить прецессионное движение магнитных моментов и выстроить их строго вдоль или против внешнего поля. Данный эффект, отсутствующий в случае сферических частиц, указывает на существенное влияние геометрии образца на возникновение квазистационарных состояний в процессе динамической эволюции.

Сравнение формулы (16) для критической кривой с результатами непосредственного численного моделирования показало их хорошее совпадение. Данный эффект может быть использован при конструировании элементов MRAM, когда необходимо выстраивание магнитных моментов строго вдоль и против внешнего поля для получения логических нуля либо единицы.

Как следует из работ [4,6,7], изложенная выше теория будет справедлива и в случае наличия размагничивающих полей (учета формы частицы) для аксиально-симметричных частиц, если ось анизотропии направлена вдоль магнитного поля. Зависимость критического угла от частоты внешнего воздействия будет аналогичной рис. 7, если в качестве безразмерной частоты выбрать

$\Omega = 1/\alpha p_K$ , где управляющий параметр  $p_K$  определяется следующим образом [6,7]:

$$p_K = \frac{1}{1 + \alpha^2} \frac{\gamma H_K}{\omega}$$

(здесь  $H_K$  — эффективное поле анизотропии, включающее в себя поле магнитной одноосной анизотропии и размагничивающее поле формы). В случае более сложной геометрии системы зависимости магнитного момента от частоты качественно будут соответствовать рис. 1, 2, но количественно формулами (6), (8) описываться уже не будут.

## 5. Заключение

Таким образом, нами рассмотрена нелинейная динамика магнитного момента малой сферической частицы в однородном переменном магнитном поле, а также ансамбля таких частиц без использования теории возмущений и предположения малости внешних воздействий. Получены аналитические зависимости усредненного магнитного момента системы в зависимости от частоты внешнего поля, которые совпадают с результатами непосредственного численного расчета уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта. Построены асимптотические формулы, хорошо описывающие поведение намагниченности в случае малых и больших частот внешнего поля. Также показано, что в зависимости от конфигурации системы могут наблюдаться как прецессия магнитного момента, так и состояние нелинейной динамической поляризации с выстраиванием намагниченности вдоль или против направления магнитного поля. Получена аналитическая теория для описания этого явления.

## Приложение 1

Умножим обе части (2) на  $\sin \theta$  и сделаем замену переменных  $y = \cos \theta$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\alpha p_z \sin \tau (1 - y^2). \quad (П1)$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части (П1)

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int -\alpha p_z \sin \tau d\tau, \quad (П2)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y}{1 - y} \right) = \alpha p_z \cos \tau + C. \quad (П3)$$

Здесь  $C$  — константа, определяемая начальными условиями. Очевидно, что в данном случае

$$C = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y_0}{1 - y_0} \right) = \alpha p_z, \quad (П4)$$

где  $y_0$  — значение  $y$  в момент времени  $\tau = 0$ . Таким образом, выражение (П3) примет вид

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1-y_0}{1+y_0} \right) = \alpha p_z \cos \tau - \alpha p_z \quad (\text{П5})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \frac{1 - \cos \theta_0}{1 + \cos \theta_0} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}} \right) \\ &= \ln \left| \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right| = \alpha p_z (\cos \tau - 1), \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

что совпадает с (3).

## Приложение 2

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{A \left( \tan \frac{x}{2} \right)^2 + 1} &= \int_0^\pi \frac{(\cos \frac{x}{2})^2 dx}{A \left( \sin \frac{x}{2} \right)^2 + (\cos \frac{x}{2})^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{(1 + \cos x) dx}{(A-1) \left( \sin \frac{x}{2} \right)^2 + (\cos \frac{x}{2})^2 + \left( \sin \frac{x}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{(1 + \cos x) dx}{\frac{1}{2}(A-1) \cdot (1 - \cos x) + 1} \\ &= \int_0^\pi \frac{(1 + \cos x) dx}{(A+1) + (1-A) \cdot \cos x}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся табличным интегралом

$$\int \frac{(A+B \cos a)x dx}{a+b \cdot \cos x} \quad [16,17]$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(A+B \cos x) dx}{a+b \cdot x} &= \frac{B}{b} x \\ &+ \frac{Ab - Ba}{b} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left[ \frac{\tan \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{a+b} \right]. \end{aligned}$$

Получим

$$\int_0^\pi \frac{dx}{A \left( \tan \frac{x}{2} \right)^2 + 1} = \frac{\pi}{1 + \sqrt{A}}.$$

## Список литературы

- [1] Yu.L. Reikher, O.V. Stolbov. *J. Cond. Matter* **20**, 204 126 (2008).
- [2] Yu.L. Reikher, V.I. Stepanov. *Stochastic Phys. Rev. B* **52**, 5, 3493 (1995).
- [3] L.F. Alvarez, O. Pla, O. Chubykalo. *Phys. Rev. B* **61**, 11 613 (2000).
- [4] C. Serpico, G. Bertotti, I. Mayergoysz. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 724 (2001).
- [5] Z. Li, C. Li, S. Zhang. *Phys. Rev. B* **74**, 054 417 (2006).
- [6] D.V. Vagin, O.P. Polyakov. *J. Appl. Phys.* **105**, 3, 033 914 (2009).
- [7] D.V. Vagin, O.P. Polyakov. *Magn. Magn. Mater.* **320**, 3394 (2008).
- [8] Д.В. Вагин, О.П. Поляков. *Нанотехнологии: разработка, применение* **1**, 1, 4 (2009).
- [9] Д.В. Вагин, О.П. Поляков. *Нелинейный мир* **5**, 10–11, 369 (2007).
- [10] Ф.В. Лисовский, О.П. Поляков. *Письма в ЖЭТФ* **73**, 9, 546 (2001).
- [11] Ф.В. Лисовский, О.П. Поляков. *Письма в ЖЭТФ* **68**, 8, 643 (1998).
- [12] Д.В. Вагин, С.И. Касаткин, О.П. Поляков. *Автоматика и телемеханика* **10**, 168 (2008).
- [13] Д.В. Вагин, С.И. Касаткин, П.А. Поляков. *Микроэлектроника* **36**, 2, 104 (2007).
- [14] У.Ф. Браун. *Микромагнетизм*. Физматгиз, М. (1979). 159 с.
- [15] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. *Спиновые волны*. Наука, М. (1967). 368 с.
- [16] М. Абрамовица, И. Стиган. *Справочник по специальным функциям*. Наука, М. (1979). 832 с.
- [17] H.V. Dwight. *Tables of integrals and other mathematical data*. The Macmillan Company, N.Y. (1957). 191 p.