

## ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ СВЕРХПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.Г.Бодров, А.Д.Данилов, А.И.Русаков, А.А.Семенов

### Введение

Простота и высокая чувствительность механической методики, предложенной в работах [1,2], делают ее перспективным инструментом изучения пиннинга и диссипативных процессов в сверхпроводниках. Но интерпретация результатов, получаемых с помощью этой методики, в настоящее время затруднена, поскольку не до конца ясна природа процессов, обуславливающих проникновение магнитного поля в колеблющийся сверхпроводник. В частности, неясна природа появления пика диссипации энергии вблизи  $H_{02}$  [3-6]. В работе [3] существование этого пика объясняется плавлением вихревой решетки [7], в [4] — термоактивированным течением потока [8].

В предлагаемой работе приведены расчеты зависимостей от магнитного поля собственной частоты и декремента затухания изгибных колебаний диэлектрической пластины со сверхпроводящим покрытием на основе модели термоактивированного течения потока. Показано, что рассчитанные значения декремента затухания в несколько раз превышают полученные в экспериментах, причем различие не уменьшается по мере увеличения собственной частоты колебаний.

### Теория

Рассмотрим колебания диэлектрической пластины длиной  $l$ , шириной  $W$ , толщиной  $d_0$  со свободными концами. На одну из поверхностей пластины нанесено сверхпроводящее покрытие толщиной  $d_1$  ( $d_1 \ll d_0$ ). Пусть пластина помещена в магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ , параллельное этой поверхности. Считаем, что движение вихрей Абрикосова определяется только вязкими силами. Уравнения движения и баланса сил для рассматриваемой системы запишутся в виде [1]

$$\ddot{U} + AU'''' - C(U'' + S'') = 0,$$

$$\frac{\eta d_1}{\rho d_0} \dot{S} - C(U'' + S'') = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями при  $z = 0, l$

$$U'' = U''' = U' + S' = 0.$$

Здесь  $U$  — смещение пластины,  $S$  — смещение вихревой решетки относительно пластины,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $\rho$  — плотность материала

<sup>1</sup> В отличие от [1] считаем  $\tau$  и  $\sigma$  равными 1.

пластины,  $A = Ed_0^2/12\rho l^4$ ,  $C = (B_0^2/\mu_0)(\pi W/4d_0 l^2 \rho)$ ,  $E$  — модуль Юнга материала пластины,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума, штрих означает производную по  $z$ , точка — производную по времени.

Полагаем,  $U(z, t) = U(z)e^{i\omega t}$ ,  $S(z, t) = S(z)e^{i\omega t}$ , тогда система уравнений (1) переписется в виде

$$\begin{aligned} U'''' - 2X(U'' + S'') - YU &= 0, \\ iGS - U'' - S'' &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $2X = C/A$ ,  $Y = \omega^2/A$ ,  $G = \omega\eta d_1/C\rho d_0$ .

Подставив второе уравнение системы (2) в первое, получим

$$2iGXS = U'''' - YU. \quad (3)$$

С помощью соотношения (3) исключим из второго уравнения системы (2)  $S$  и будем иметь следующее уравнение относительно  $U$ :

$$U'''''' - iGU'''' + (2iGX - Y)U'' + iGYU = 0. \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде  $U = De^{vz}$ , тогда получим следующее характеристическое уравнение:

$$v^6 - iGv^4 + (2iGX - Y)v^2 + iGY = 0, \quad (5)$$

т.е. имеем кубическое уравнение относительно  $v^2$ . Введем обозначения

$$v_{1,2}^2 = \alpha^2; \quad v_{3,4}^2 = \beta^2; \quad v_{5,6}^2 = \gamma^2,$$

тогда общее решение для  $U$  можно записать в виде

$$U = A_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + A_2 \operatorname{sh}(\alpha z) + A_3 \operatorname{ch}(\beta z) + A_4 \operatorname{sh}(\beta z) + A_5 \operatorname{ch}(\gamma z) + A_6 \operatorname{sh}(\gamma z), \quad (6)$$

где  $A_i$  — постоянные интегрирования.

Подставляя (6) в (3), получим

$$\begin{aligned} S = -i/2GX \left[ (\alpha^4 - Y) \left( A_1 \operatorname{ch}(\alpha z) + A_2 \operatorname{sh}(\alpha z) \right) + (\beta^4 - Y) \left( A_3 \operatorname{ch}(\beta z) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_4 \operatorname{sh}(\beta z) \right) + (\gamma^4 - Y) \left( A_5 \operatorname{ch}(\gamma z) + A_6 \operatorname{sh}(\gamma z) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Из граничных условий для  $U$  и  $S$  получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\alpha^2 A_1 + \beta^2 A_3 + \gamma^2 A_5 = 0,$$

$$\alpha^2 (A_1 \operatorname{ch} \alpha + A_2 \operatorname{sh} \alpha) + \beta^2 (A_3 \operatorname{ch} \beta + A_4 \operatorname{sh} \beta) + \gamma^2 (A_5 \operatorname{ch} \gamma + A_6 \operatorname{sh} \gamma) = 0,$$

$$\alpha^3 A_2 + \beta^3 A_4 + \gamma^3 A_6 = 0,$$

$$\alpha^3 (A_1 \operatorname{sh} \alpha + A_2 \operatorname{ch} \alpha) + \beta^3 (A_3 \operatorname{sh} \beta + A_4 \operatorname{ch} \beta) + \gamma^3 (A_5 \operatorname{sh} \gamma + A_6 \operatorname{ch} \gamma) = 0,$$

$$\alpha a A_2 + \beta b A_4 + \gamma c A_6 = 0,$$

$$\alpha a (A_1 \operatorname{sh} \alpha + A_2 \operatorname{ch} \alpha) + \beta b (A_3 \operatorname{sh} \beta + A_4 \operatorname{ch} \beta) + \gamma c (A_5 \operatorname{sh} \gamma + A_6 \operatorname{ch} \gamma) = 0, \quad (8)$$

где  $a = 1 - i(\alpha^4 - Y)/2GX$ ,  $b = 1 - i(\beta^4 - Y)/2GX$ ,  $c = 1 - i(\gamma^4 - Y)/2GX$ .

Чтобы система уравнений (8) имела нетривиальное решение, необходимо потребовать равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $\alpha A_1, \alpha A_2, \beta A_3, \beta A_4, \gamma A_5, \gamma A_6$ . Таким образом, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$0.5 [\alpha^2(\beta^2 c - \gamma^2 b)^2 + \beta^2(\gamma^2 a - \alpha^2 c)^2 + \gamma^2(\alpha^2 b - \beta^2 a)^2] \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \gamma + \\ + \alpha \beta \operatorname{sh} \gamma (\beta^2 c - \gamma^2 b)(\gamma^2 a - \alpha^2 c)(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1) + \alpha \gamma \operatorname{sh} \beta (\alpha^2 b - \beta^2 a)(\beta^2 c - \gamma^2 b) \times \\ \times (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \gamma - 1) + \beta \gamma \operatorname{sh} \alpha (\gamma^2 a - \alpha^2 c)(\alpha^2 b - \beta^2 a)(\operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma - 1) = 0. \quad (9)$$

Для экспериментального исследования представляет интерес случай  $x \ll 1$ . Для него ищем решения уравнения (5) в виде

$$v_{1,2}^2 = \alpha^2 = \sqrt{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X^n, \\ v_{3,4}^2 = \beta^2 = -\sqrt{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n X^n, \\ v_{5,6}^2 = \gamma^2 = iG + \sum_{n=1}^{\infty} C_n X^n. \quad (10)$$

Подставляя последовательно (10) в (5) и приравнявая нулю коэффициенты при  $X^n$ , определяем  $A_n, B_n, C_n$ . Таким образом,

$$\alpha^2 = \sqrt{Y} - \frac{iG}{\sqrt{Y} - iG} X + \frac{G^2 (\sqrt{Y} + iG)}{2\sqrt{Y} (\sqrt{Y} - iG)^3} X^2 + 0(X^3), \\ \beta^2 = -\sqrt{Y} + \frac{iG}{\sqrt{Y} + iG} X - \frac{G^2 (\sqrt{Y} - iG)}{2\sqrt{Y} (\sqrt{Y} + iG)^3} X^2 + 0(X^3), \\ \gamma^2 = iG - \frac{2G^2}{G^2 + Y} X + \frac{4iG^3(G^2 - Y)}{(G^2 + Y)^3} X^2 + 0(X^3). \quad (11)$$

Подставляя найденные значения корней (11) в дисперсионное уравнение (9), получим с точностью до членов порядка  $X^2$  соотношение

$$\operatorname{ch} \kappa \cos \kappa - 1 + X \left\{ \frac{G}{2\kappa (\kappa^4 + G^2)} \left[ G \left( \operatorname{ch} \kappa \sin \kappa + \operatorname{sh} \kappa \cos \kappa \right) + i\kappa^2 \left( \operatorname{ch} \kappa \sin \kappa - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh} \kappa \cos \kappa \right) \right] - \frac{G^2 (\kappa^4 - 3G^2)}{\kappa^2 (\kappa^4 + G^2)^2} \operatorname{sh} \kappa \sin \kappa + \frac{4G^3}{(\kappa^4 + G^2)^2} \sqrt{\frac{G}{2\kappa^2}} \left( \operatorname{ch} (2\sqrt{G}) - \right. \\ \left. - \cos (2\sqrt{G}) \right) \right\}^{-1} \left[ \left( \operatorname{sh} \kappa + \sin \kappa \right) \left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{G}{2}} \cos \sqrt{\frac{G}{2}} - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{G}{2}} \sin \sqrt{\frac{G}{2}} \right) - \right.$$

$$\left. -1/2(1-i) \left( \text{sh } \kappa \cos \kappa + \text{ch } \kappa \sin \kappa \right) \left( \text{sh} \left( 2\sqrt{G} \right) - \sin \left( 2\sqrt{G} \right) \right) \right\} = 0, \quad (12)$$

где  $\kappa = Y^{1/4}$ .

Решение уравнения (12) ищем в виде  $\kappa = \kappa_0 + \varepsilon$ , где  $\kappa_0$  является корнем уравнения  $\text{ch } \kappa_0 \cos \kappa_0 - 1 = 0$  ( $\kappa_0 = 4.7301$ ). Учитывая, что затухание  $\Gamma \ll \omega$ , с точностью до членов второго порядка малости относительно  $x$  имеем

$$\begin{aligned} \text{Re}(\varepsilon) = & \frac{G_0^2 X}{\kappa_0(\kappa_0^4 + G_0^2)(\text{ch } \kappa_0 \sin \kappa_0 - \text{sh } \kappa_0 \cos \kappa_0)} \left\{ 0.5(\text{ch } \kappa_0 \sin \kappa_0 + \text{sh } \kappa_0 \cos \kappa_0) - \right. \\ & - \frac{\kappa_0^4 - 3G_0^2}{\kappa_0(\kappa_0^4 + G_0^2)} \text{sh } \kappa_0 \sin \kappa_0 + \frac{2\sqrt{2}G_0^{3/2}}{(\kappa_0^4 + G_0^2)(\text{ch}(2\sqrt{G_0}) - \cos(2\sqrt{G_0}))} \times \\ & \times \left[ (\text{sh } \kappa_0 + \sin \kappa_0) \left( \text{sh} \frac{\sqrt{G_0}}{2} \cos \frac{\sqrt{G_0}}{2} - \text{ch} \frac{\sqrt{G_0}}{2} \sin \frac{\sqrt{G_0}}{2} \right) - \right. \\ & \left. \left. - 0.5(\text{sh } \kappa_0 \cos \kappa_0 + \text{ch } \kappa_0 \sin \kappa_0) \left( \text{sh}(2\sqrt{G_0}) - \sin(2\sqrt{G_0}) \right) \right] \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varepsilon) = & \frac{G_0 X}{\kappa_0(\kappa_0^4 + G_0^2)(\text{ch } \kappa_0 \sin \kappa_0 - \text{sh } \kappa_0 \cos \kappa_0)} \left[ 0.5\kappa_0^2 \left( \text{ch } \kappa_0 \sin \kappa_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{sh } \kappa_0 \cos \kappa_0 \right) + \frac{\sqrt{2}G_0^{5/2}(\text{ch } \kappa_0 \sin \kappa_0 + \text{sh } \kappa_0 \cos \kappa_0)}{(\kappa_0^4 + G_0^2)(\text{ch}(2\sqrt{G_0}) - \cos(2\sqrt{G_0}))} \left( \text{sh}(2\sqrt{G_0}) - \sin(2\sqrt{G_0}) \right) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь  $G_0 = (\omega_0 \eta d_1) / (C \rho d_0)$ ,  $\omega_0 = \kappa_0^2 \sqrt{A}$ . Так как

$$Y^{0.5} = \kappa^2 = \frac{\omega + i\Gamma}{\sqrt{A}},$$

где  $\omega$  — частота,  $\Gamma$  — декремент затухания колебаний, то

$$\Delta = \omega^2 - \omega_0^2 = 4\kappa_0^3 A \text{Re}(\varepsilon), \quad (15)$$

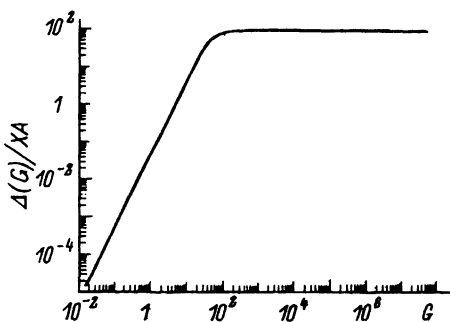


Рис. 1.

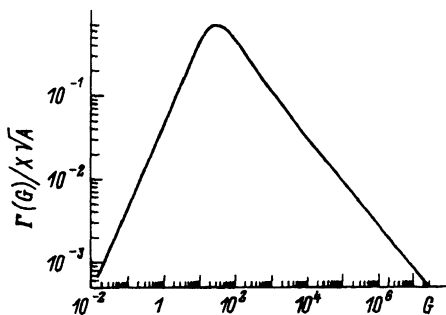


Рис. 2.

$$\Gamma = 2\chi_0\sqrt{A} \operatorname{Im}(\varepsilon). \quad (16)$$

Расчетные кривые величин  $\Delta(G)/XA$  и  $\Gamma(G)/X\sqrt{A}$ , не зависящих от параметров вибратора и индукции магнитного поля, показаны на рис. 1 и 2 соответственно.

### Эксперимент

С помощью методики, описанной в [6], были проведены измерения зависимости от магнитного поля собственной частоты и декремента затухания изгибных колебаний кварцевого резонатора, на поверхность которого, перпендикулярную плоскости колебаний, была нанесена пленка  $\text{Pb}_{60}\text{Vl}_{40}$  толщиной  $\sim 1$  мкм.

По измеренным значениям частоты определялась  $\operatorname{Re}(\varepsilon)$  по формуле

$$\operatorname{Re}(\varepsilon) = (\omega^2(B) - \omega_0^2) \frac{\chi_0}{4}. \quad (17)$$

По рассчитанной таким образом  $\operatorname{Re}(\varepsilon)$  с помощью соотношения (13) определялось значение  $G$ , которому эта величина  $\operatorname{Re}(\varepsilon)$  соответствует. Затем это значение  $G$  подставлялось в соотношение (14) и определялась величина  $\operatorname{Im}(\varepsilon)$ , а по ней с помощью формулы (16) — величина  $\Gamma$ , которая и сравнивалась с экспериментальными результатами.

Обработанные таким образом результаты измерений для кварцевого резонатора изгибных колебаний с размерами  $l = 53$  мм,  $W = 3.4$  мм,  $d = 2.2$  мм и с собственной частотой при  $T = 4.2$  К — 4786.78 Гц показаны на рис. 3.

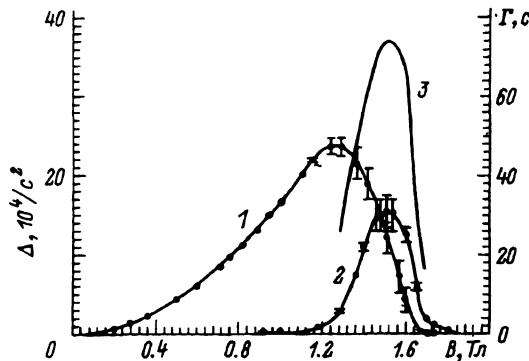


Рис. 3.

1 —  $\Delta(B)$ , 2 —  $\Gamma(B)$  (построены по результатам измерений); 3 —  $\Gamma(B)$ , расчет; точки — результаты измерений.

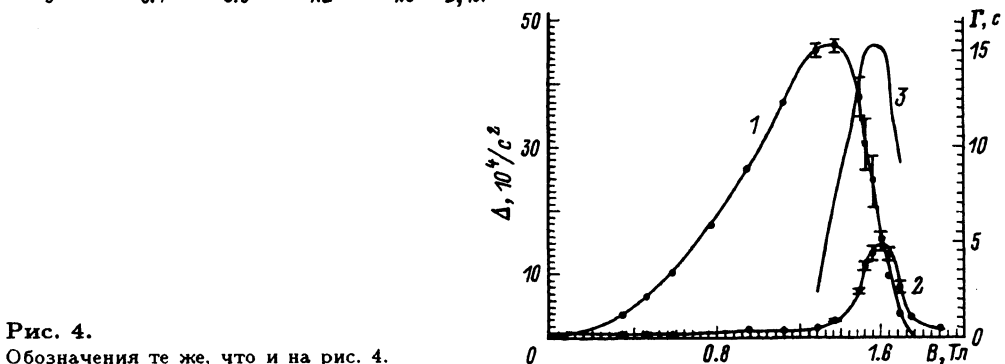


Рис. 4.

Обозначения те же, что и на рис. 4.

Из полученных результатов следует, что хотя рассчитанная по измеренным значениям частоты величина  $\Gamma_p$  и имеет максимум в той же области, что и измеренная  $\Gamma_o$ , количественно эти величины не совпадают:  $\Gamma_p$  оказывается приблизительно в 3 раза большей, чем  $\Gamma_o$ . Это расхождение можно попытаться объяснить тем, что в нашем расчете не учтены упругие силы пиннинга, в результате чего значение вязких сил, действующих на вихри, оказывается завышенным.

Влияние сил пиннинга должно уменьшаться по мере увеличения частоты колебаний, поскольку силы пиннинга зависят только от смещения вихрей относительно кристаллической решетки и не зависят от частоты, а вязкие силы возрастают прямо пропорционально частоте. Поэтому чем на большей частоте проводятся измерения, тем меньше должны отличаться результаты наших расчетов и измерений.

Для проверки этого предположения были проделаны измерения на кварцевом резонаторе с собственной частотой 37059.2 Гц при 4.2 К. Их результаты, обработанные упомянутым выше образом, показаны на рис. 4.

Вопреки ожиданиям увеличение частоты колебаний более чем в 7 раз не привело к лучшему соответствию измеренных и рассчитанных значений  $\Gamma$ . Рассчитанные величины  $\Gamma$  и в этом случае примерно в три раза превышали измеренные.

Полученные в наших опытах результаты не могут быть описаны в рамках модели, использованной в расчетах, даже с учетом упругих сил пиннинга. Одно из возможных объяснений этого — предположить, как это сделано в работе [6], что в сверхпроводящей пленке имеются области, в которых вихри жестко закреплены, и области, в которых существует вязкое течение вихрей. В этом случае тому же значению частоты может соответствовать декремент затухания, меньший, чем это следует из модели термоактивированного течения потока [6]. Увеличение же частоты колебаний при неизменном соотношении размеров областей не приводит к лучшему соответствию наблюдаемых и рассчитанных в модели величин вязкого течения вихрей декрементов затухания.

Таким образом, термоактивированное течение потока по крайней мере не является единственным фактором, определяющим величину потерь в колеблющейся сверхпроводящей пластинке в области пика затухания. Для объяснения наблюдаемых явлений необходимо привлекать дополнительные представления о характере движения вихревой решетки.

### Список литературы

- [1] Brandt E.H., Esquinazi, Neckel H. // J.Low Temp. Phys. 1986. Vol. 63. N 3/4. P. 187–214.
- [2] Brandt E.H., Esquinazi P., Neckel H., Weiss G. // J.Low Temp. Phys. 1987. Vol. 64. N 1/2. P. 1–20.
- [3] Gammel P.L., Schneemeyer L.F., Waszozak J.V., Bishop D.J. // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 61. P. 1666–1667.
- [4] Gupta A., Esquinazi P., Brawn H., Brandt E.H. // Physica C. 1989. P. 162–164, 667–668.
- [5] Бодров С.Г., Семенов А.А. // СФХТ. 1991. Т. 4. № 9. С. 1668–1676.
- [6] Бодров С.Г., Данилов А.Д., Семенов А.А. // СФХТ. 1991. Т. 4. № 9. С. 1678–1686.
- [7] Nelson D.R., Seung S. // Phys.Rev. B. 1989. Vol. 39. P. 9174–9186.
- [8] Kes P.H., Aarts J., van der Berg J. et al. // Supercond. Sci. Technol. 1989. Vol. 1. N 5. P. 242–248.