01;05;08

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ СО СВЕРХПРОВОДЯЩИМ ПОКРЫТИЕМ

С.Г.Бодров, А.И.Русаков, А.А.Семенов

Рассмотрено влияние магнитного поля на распространение поверхностных акустических волн в диэлектрической пластине со сверхпроводящим покрытием. Получены дисперсионные соотношения для полупространства и для пластины с одно- и двухсторонним покрытием.

Введение

Высокая чувствительность и простота механической методики, предложенной в работах [1,2], обусловили ее широкое использование настоящее время для изучения пиннинга и диссипативных процессов в сверхпроводниках. Используемые в этой методике изгибные колебания обеспечивают сильную зависимость частоты от магнитного поля, но не позволяют проводить измерения в области частот свыше десятков килогерц. Расширить частотный диапазон механической методики позволяет использование других типов механических колебаний.

В предлагаемой работе рассматривается влияние магнитного поля на распространение поверхностных акустических волн в диэлектрической пластине со сверхпроводящим покрытием. Получены дисперсионные соотношения для полупространства и для пластины с одно- и двухсторонним покрытием. Показано, что поверхностные колебания могут быть использованы для изучения пиннинга и диссипативных процессов в сверхпроводниках в сверхсильных импульсных магнитных полях.

1.Поверхностные волны

Рассмотрим полупространство $x < 0$, заполненное диэлектриком, на поверхность которого нанесено сверхпроводящее покрытие. Во всем пространстве имеется магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0\mathbf{e}_z$, параллельное плоскости полупространства. Рассмотрим "плоскую" монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси z. Уравнение движения упругой среды записывается в виде [3]

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\xi + \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\boldsymbol{\xi} \tag{1}$$

где ξ — смещение среды, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона.

Для рассматриваемого случая $\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, 0, \xi_z)$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(x)e^{ikz+i\omega t}$, и уравнение (1) перепишется в виде

$$\Delta\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} + \frac{2(1+\sigma)\rho\omega^2}{E}\mathbf{xi} = 0. \tag{2}$$

Возьмем от уравнения (2) div, получим

$$\Delta W + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)\rho\omega^2}{E(1-\sigma)}W = 0. \tag{3}$$

Здесь $W = \operatorname{div}\xi$. Возьмем от уравнения (2) rot, получим

$$\Delta V + \frac{2(1+\sigma)\rho\omega^2}{E}V = 0. \tag{4}$$

Здесь $V = \operatorname{rot}_y \xi$. Решения уравнений (3) и (4) представим в виде

$$W(x) = Ae^{\gamma kx}; \quad V = Be^{\beta kx}. \tag{5}$$

Здесь

$$\gamma^2 = 1 - \frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)\rho\omega}{k^2 E(1-\sigma)};$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{2(1+\sigma)\rho\omega^2}{k^2 E};$$

A, B — постоянные интегрирования.

Из (5) находим компоненты смещений

$$\xi_x(x) = \gamma A_1 e^{\gamma kx} + iB_1 e^{\beta kx},$$

$$\xi_z(x) = iA_1 e^{\gamma kx} - \beta B_1 e^{\beta kx}, \tag{6}$$

где введены обозначения

$$A_1 = \frac{A}{(\gamma^2-1)k};$$

$$B_1 = \frac{B}{(\beta^2-1)k}.$$

Колебания сверхпроводящей поверхности в магнитном поле вызывают возмущение, которое можно представить в виде $\mathbf{H}^* = \operatorname{grad}\psi$, где ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\psi = 0.$$

Решение уравнения (7) можно записать для $x < 0$

$$\psi = De^{kx+ikz}$$

и соответственно

$$H_x = kDe^{kx+ikz},$$

$$H_z = ikDe^{kx+ikz}, \tag{8}$$

для $x > 0$

$$\psi = Ke^{-kx+ikz}$$

и соответственно

$$H_x = -kKe^{kx+ikz},$$

$$H_z = ikKe^{kx+ikz}. \tag{9}$$

Здесь D, K — постоянные интегрирования. Из условия равенства нулю нормальной составляющей поля на сверхпроводящей поверхности, т.е.

$$\mathbf{Hn} = 0, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z ik\xi_x(0), \tag{11}$$

получаем

$$D = iH_0\xi_x(0); \quad K = -iH_0\xi_x(0). \tag{12}$$

Вторым граничным условием для рассматриваемой задачи является условие непрерывности потока импульса через возмущенную поверхность, т.е. величины $(T_{ik}+\sigma_{ik})\,n_k$, где T_{ik} — тензор натяжения Максвелла, σ_{ik} — тензор упругости. Из этого условия получаем

$$\sigma_{xz}|_{x=0} = 0,$$

$$\sigma_{xx} + T^{in}_{xx}|_{x=0} = T^{out}_{xx}|x = 0, \tag{13}$$

где

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial\xi_x}{\partial z} + \frac{\partial\xi_z}{\partial x},$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+2)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)\frac{\partial\xi_x}{\partial z} + \sigma\frac{\partial\xi_z}{\partial z}\right],$$

$$T^{in}_{xx}|_{x=0} = -\frac{H_0^2}{8\pi}\left(1 - 2k\xi_x(0)e^{ikz+int}\right),$$

$$T^{out}_{xx}|_{x=0} = -\frac{H_0}{8\pi}\left(1 + 2k\xi_x(0)e^{ikz+int}\right).$$

Подставляя (6) в формулы (13), получим систему двух однородных алгебраических уравнений относительно A_1 и B_1

$$2i\gamma A_1 - (\beta^2+1)B_1 = 0,$$

$$\left[(1-\sigma)\gamma^2 - \sigma + \frac{\gamma(1+\sigma)(1-2\sigma)H_0^2}{2\pi E}\right]A_1 +$$

$$+ i\left[\beta(1-2\sigma) + \frac{\gamma(1+\sigma)(1+2\sigma)H_0^2}{2\pi E}\right]B_1 = 0. \tag{14}$$

Равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при A_1 и B_1, дает дисперсионное соотношение

$$(\beta^2+1)^2-4\beta\gamma=\frac{(1+\sigma)H_0^2}{\pi E}\gamma(\beta^2-1). \qquad (15)$$

Положим $\omega = c_l k\xi$, тогда $\beta^2 = 1-\xi^2$;

$$\gamma^2 = 1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\xi^2,$$

где

$$c_t^2=\frac{E}{2\rho(1+\sigma)},\quad c_l^2=\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

В принятых обозначениях дисперсионное соотношение (15) принимается в виде

$$(\beta^2+1)^2-4\beta\gamma=\frac{H_0^2}{2\pi\rho c_t^2}\gamma\xi^2. \qquad (16)$$

Результаты численных расчетов зависимостей от магнитного поля собственной частоты колебаний с длиной волны 0.01 см для материала с $E = 8.6\cdot10^{11}$ дн/см^2, $\rho = 2.65$г/см^3 и разными значениями σ показаны на рис. 1.

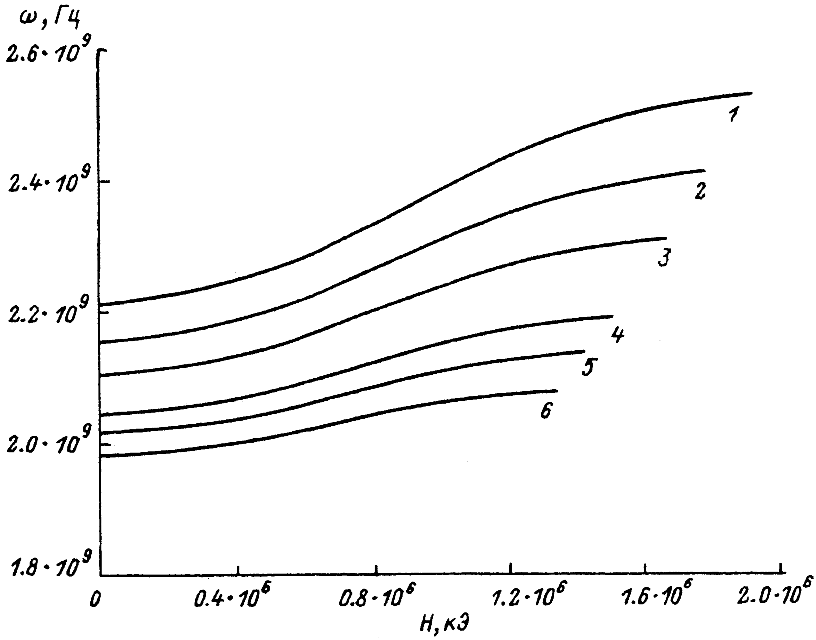

Рис. 1.
1 — $\sigma = 0$, *2* — 0.1, *3* — 0.2, *4* — 0.33, *5* — 0.4, *6* — 0.48.

Из соотношения (16) следует, что условие распространения поверхностных волн ($\beta < 0$, $\gamma < 0$), выполняется в магнитных полях, меньших некоторого критического

$$H_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\pi\rho\sigma_t^2}{1 - c_t^2/c_l^2}}.$$

При увеличении поля до $H_{\text{кр}}\beta \to 0$ и поверхностная волна переходит в объемную.

Результаты расчетов показывают, что собственные частоты поверхностных волн мало меняются в полях до 20 Тл. Это делает не эффективным их использование для исследования пиннинга в постоянных магнитных полях.

В то же время высокие частоты, характерные для поверхностных акустических волн, открывают возможность их использования для изучения свойств сверхпроводников в сверхсильных магнитных полях.

2. Бесконечная пластина ($-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $h \leqslant x \leqslant h$) с односторонним сверхпроводящим покрытием

Рассмотрим "плоскую" монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси z в плоской бесконечной пластине толщиной $2h$, перпендикулярной оси x, на одной из сторон которой $x = L$ нанесено сверхпроводящее покрытие. Движение упругой среды, так же как и для полупространства, описывается уравнением (2). Метод решения аналогичен рассмотренному в разделе 1. Решение уравнения (2) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\xi_x = \gamma(A\mathrm{ch}\gamma kx + B\,\mathrm{sh}\,\gamma kx) + i(c\,\mathrm{sh}\,\beta kx + D\mathrm{eh}\beta kx),$$

$$\xi_z = i(A\,\mathrm{sh}\,\gamma kx + B\,\mathrm{ch}\,\gamma kx) - \beta(c\,\mathrm{ch}\,\beta kx + D\mathrm{sk}\beta kx). \qquad (17)$$

Возмущение магнитного поля $x > h$

$$H_x = ikH_0e^{-k(x-h)+ikz}\xi_x(h),$$

$$H_z = kH_0e^{-k(x-h)+ikz}\xi_x(h), \qquad (18)$$

$x < h$

$$H_x = ikH_0e^{k(x-h)+ikz}\xi_x(h),$$

$$H_z = -kH_0e^{k(x-h)+ikz}\xi_x(h). \qquad (19)$$

Непрерывность потока импульса через возмущенную поверхность дает

$$\sigma_{xz}(h) = \sigma_{xz}(-h) = 0,$$

$$\sigma_{xx}(h) = -\frac{H_0^2}{2\pi}\xi_x(h), \quad \sigma_{xx}(-h) = 0.$$

Система уравнений (20) после ряда элементарных алгебраических преобразований сводится к системе двух однородных уравнений относительно A и B

$$A\mathrm{ch}(\gamma kh)\left[(\beta^2+1)^2\,\mathrm{th}(\gamma kh) - 4\beta\gamma\mathrm{th}(\beta kh) + \frac{H_0^2(1+\sigma)\gamma(\beta^2-1)}{\pi E}\right] +$$

$$+B\,\mathrm{sh}(\gamma kh)\left[(\beta^2+1)^2\mathrm{cth}(\gamma kh)-4\beta\gamma\mathrm{cth}(\beta kh)+\frac{H_0^2(1+\sigma)\gamma(\beta^2-1)}{\pi E}\right]=0,$$

$$-A\,\mathrm{ch}(\gamma kh)\left[(\beta^2+1)^2\mathrm{th}(\gamma kh)-4\beta\gamma\,\mathrm{th}(\beta kh)\right]+$$

$$+B\,\mathrm{sh}(\gamma kh)\left[(\beta^2+1)^2\mathrm{cth}(\gamma kh)-4\beta\gamma\,\mathrm{cth}(\beta kh)\right]=0. \qquad (21)$$

Условие равенства нулю определителя системы уравнений (20) дает следующее дисперсионное соотношение:

$$\left[(\beta^2+1)^2\mathrm{cth}(\gamma kh)-4\beta\gamma\mathrm{cth}(\beta kh)\right]\left[(\beta^2+1)^2\mathrm{th}(\gamma kh)-4\beta\gamma\mathrm{th}(\beta kh)\right]+$$

$$+\frac{H_0^2(1+\sigma)\gamma(\beta^2-1)}{2\pi E}\Big[(\beta^2+1)^2(\mathrm{th}(\gamma kh)+\mathrm{cth}(\gamma kh))-$$

$$-4\beta\gamma(\mathrm{th}(\beta kh)+\mathrm{cth}(\beta kh))\Big]=0. \qquad (22)$$

Из (22) получаем выражение для критического поля

$$H_{\text{кр}}=\frac{\left\{\mathrm{cth}\left[\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\mathrm{kh}\right]-\frac{4}{kh}\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\right\}}{\mathrm{th}\left[\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)kh\right]+\mathrm{cth}\left[\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)kh\right]-4\gamma/kh}.$$

Результаты расчетов зависимостей собственной частоты колебаний с длиной волны 0.01 см для материала с $E=8.6\cdot10^{11}$ для/см^2, $\rho=2.65$г/см^3 от магнитного поля показаны на рис. 2.

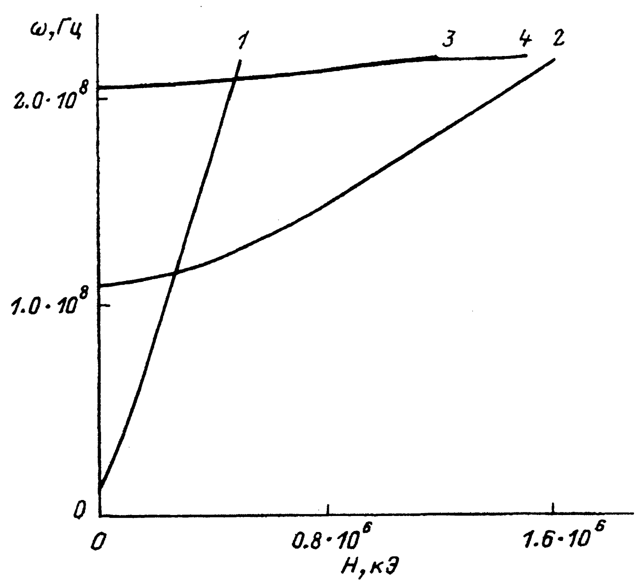

Рис. 2.
1 — $h=0.01\lambda$, *2* — 0.1λ, *3* — λ, *4* — 10λ.

3. Бесконечная пластина с двусторонним сверхпроводящим покрытием

Рассмотрим задачу, аналогичную рассмотренной в разделе 2, но сверхпроводящее покрытие нанесено как на плоскость $x = h$, так и на плоскость $x = -h$. Это обстоятельство никоим образом не сказывается на уравнении движения и на выражениях для смещения, которые имеют вид (17).

Магнитное поле необходимо определять для трех областей $x > h$, $-h < x < h$, $x < -h$. Метод расчета магнитного поля аналогичен рассмотренному выше; магнитное поле имеет вид для $x < h$

$$H_x = ikH_0e^{-k(x-h)+ikz}\xi_x(h), \tag{23}$$

$$H_z = -kH_0e^{-k(x-h)+ikz}\xi_x(h),$$

для $-h < x < h$

$$H_x = \frac{1}{2}ikH_0\left\{[\xi_x(h)+\xi_x(-h)]\frac{\operatorname{ch}kx}{\operatorname{ch}kh}+[\xi_x(h)+\xi_x(-h)]\frac{\operatorname{sh}kx}{\operatorname{sh}kh}\right\},$$

$$H_z = -\frac{1}{2}kH_0\left\{[\xi_x(h)+\xi_x(-h)]\frac{\operatorname{sh}kx}{\operatorname{ch}kh}+[\xi_x(h)-\xi_x(-h)]\frac{\operatorname{ch}kx}{\operatorname{sh}kh}\right\}, \tag{24}$$

для $x < -h$

$$H_x = ikH_0e^{(x+h)+ikz}\xi_x(-h),$$

$$H_z = -kH_0e^{(x+h)+ikz}\xi_x(-h). \tag{25}$$

Условие непрерывности потока импульса через возмущенные поверхности дают

$$\sigma_{xz}(h) = \sigma_{xz}(-h) = 0,$$

$$\sigma_{xx}(h) = -\frac{kH_0^2}{8\pi\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)}\Big\{(\operatorname{ch}^2 kh+\operatorname{sh}^2 kh+$$

$$+2\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh))\xi_x(h)-\xi_x(-h)\Big\},$$

$$\sigma_{xx}(-h) = \frac{kH_0^2}{8\pi\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)}\Big\{-\xi_x(h)+(\operatorname{ch}^2 kh+\operatorname{sh}^2 kh-$$

$$-2\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh))\times\xi_x(-h).\Big\} \tag{26}$$

Подставляя в (26) выражение для смещений (17), получим систему 4 однородных уравнений относительно постоянных интегрирования A, B, C, D. Из требования непрерывности решения получаем два дисперсионных соотношения.

1) Соответствующее распространению поверхностных волн на обеих поверхностях в фазе

$$(\beta^2+1)^2\operatorname{th}\gamma kh-4\beta\gamma\operatorname{th}\beta kh+\frac{H_0^2(1+\sigma)(\beta^2-1)}{2\pi E}(1+\operatorname{th}kh)=0. \tag{27}$$

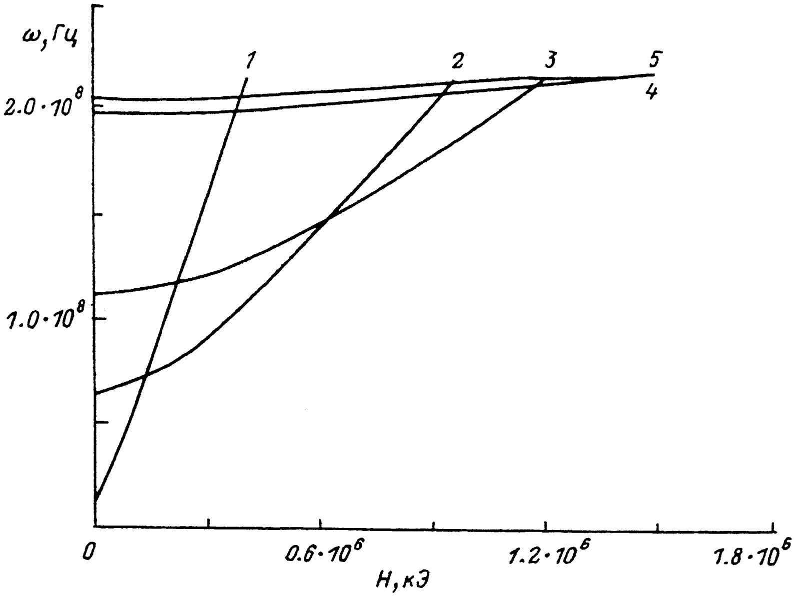

Рис. 3.
1 — $h = 0.007\lambda$, *2* — 0.05λ, *3* — 0.1λ, *4* — 0.55λ, *5* — 1.3λ.

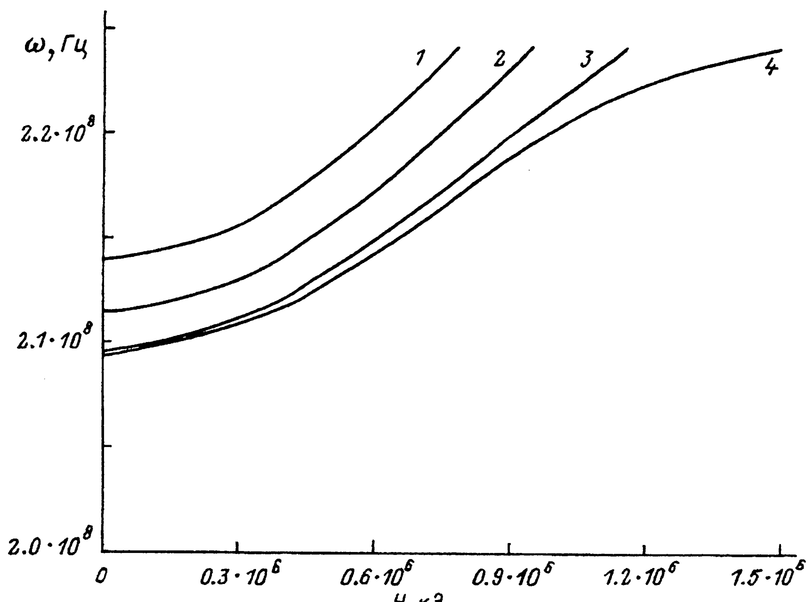

Рис. 4.
1 — $h = 0.75\lambda$, *2* — 0.9λ, *3* — 1.3λ, *4* — 10λ.

2) Соответствующее распространению поверхностных волн на обеих поверхностях в противофазе

$$(\beta^2+1)^2 \operatorname{cth}\gamma kh - 4\beta\gamma \operatorname{cth}\beta kh + \frac{H_0^2(1+\sigma)(\beta^2-1)}{2\pi E}(1+\operatorname{cth} kh) = 0. \qquad (28)$$

Результаты расчетов зависимостей собственной частоты колебаний с длиной волны 0.01 см для материала с $E = 8.6\cdot10^{11}$ дн/см^2, $\rho = 2.65$г/см^3 от магнитного поля для указанных выше случаев показаны соответственно на рис. 3 и 4.

Список литературы

[1] *Brandt E.H., Esquinazi P., Neckel H. // J. Low Temp. Phys. 1986. Vol. 63. N3/4. P. 187.*
[2] *Brandt E.H., Esquinazi P., Neckel H. // J. Low Temp. Phys. 1987. Vol. 64. N1/2. P. 1.*
[3] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 202 с.*

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
8 апреля 1992 г.
В окончательной редакции
31 мая 1993 г.