1993 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 63, N 9

01;06

О СЛОЕ ШОТТКИ ВБЛИЗИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОЛОСЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКА

А.В.Ефанов

Найдено точное решение задачи о потенциале в слое Шоттки, образованном системой полосковых электродов на границе полупроводника и диэлектрика. Решение получено в предположении об одинаковости диэлектрических проницаемостей двух сред. Для случая одиночной равномерно заряженной полосы дается аналитическое выражение, описывающее форму слоя Шоттки. Вычисление потенциала сводится к однократному интегрированию некоторой явным образом заданной функции.

1. В работах [1,2] найдены точные решения ряда двумерных задач о слое Шоттки на границе полупроводника и диэлектрика. Строгие результаты получены в ситуациях, когда диэлектрические проницаемости сред или сильно отличаются [1], или совпадают друг с другом [2]. Потенциал и распределение заряда теоретически рассчитаны в первом случае для полоскового электрода на поверхности полупроводника при заданном потенциале или плотности заряда на электроде, во втором — для системы тонких заряженных нитей. В настоящей работе результаты [2] обобщаются на случай непрерывного распределения зарядов на электродах.

Развиваемый подход состоит в замене нелинейного уравнения Пуассона для потенциала более простой краевой задачей — об определении формы слоя Шоттки. Задача в такой постановке остается нелинейной. Она тем не менее точно решается с помощью методов теории аналитических функций [3].

Результат данной работы заключается в следующем. При произвольном, но заданном распределении зарядов на электродах задача сводится к нелинейному интегральному уравнению на некоторую функцию от одной переменной. Через эту функцию определяется форма слоя Шоттки и потенциал. При равномерном распределении зарядов на электродах такое уравнение вырождается в алгебраическое. В этом случае существуют простые формулы, определяющие параметры слоя Шоттки и распределение потенциала во всем пространстве.

2. Примем следующие обозначения. Будем считать, что полупроводник и диэлектрик занимают полупространства $y \leqslant 0$ и $y \geqslant 0$ соответственно, а электроды простираются вдоль оси z, лежащей в плоскости границы (рис. 1). Все физические величины будут, таким образом, зависеть

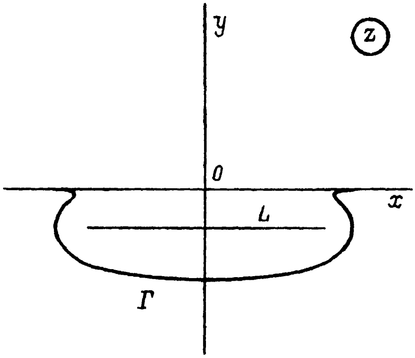

Рис. 1. Слой Шоттки вблизи равномерно заряженной полосы.

Полупроводник занимает область $y \leqslant 0$. Кривая Γ — граница слоя Шоттки.

только от двух координат x и y. Будем рассматривать случай электронного типа проводимости. Электроды тогда будут нести отрицательный заряд, а слой Шоттки — положительный. Диэлектрическую проницаемость положим равной единице. В конечных формулах соответствующая буква легко восстанавливается.

Распределение сторонних зарядов будем задавать на некоторой гладкой кривой L в плоскости xy. К этому всегда сводится задача для совокупности полосковых электродов. Концевые точки электродов могут быть соединены воображаемой линией, на которой отсутствуют сторонние заряды.

Следуя работе [2], перейдем к комплексным величинам. Обозначим $z = x + iy$, где i — мнимая единица (совпадение обозначения комплексной переменной z с наименованием оси декартовой системы координат не вызовет в дальнейшем недоразумений). Введем комплексное поле $\mathcal{E} = E_x - iE_y$, где E_x и E_y — компоненты вектора напряженности электрического поля.

Поля внутри области пространственного заряда, т.е. при $y \leqslant 0$, и в диэлектрике даются соответственно выражениями

$$\mathcal{E} = 2\pi\sigma\left[\bar{z} - f(z)\right], \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_1 = 2\pi\sigma\left[z - f(z)\right], \tag{2}$$

где $\sigma = eN_i$, e — заряд электрона, N_i — концентрация доноров, $\bar{z}$ — комплексно-сопряженное значение z.

Задача состоит в нахождении функции $f(z)$ и такой формы слоя Шоттки с границей Γ, для которой поле $\mathcal{E}$ обращается в нуль на границе Γ и во всем нейтральном объеме полупроводника.

Поставленная задача решается с помощью конформного отображения $z = \omega(t)$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ некоторой вспомогательной комплексной переменной t на всю область, занятую полем [2]. В рассматриваемом нами случае непрерывного распределения зарядов на электродах конформное отображение дается выражением

$$z = \omega(t) = \bar{c}_0 + at + \int\limits_{\bar{l}} \frac{dt'\,\overline{c(t')}}{t - t'}. \tag{3}$$

Функция $f(t) = f(z)|_{z=\omega(t)}$ — соответственно формулой

$$f(t) = c_0 + at + \int\limits_{l} \frac{dt'\,c(t')}{t - t'}. \tag{4}$$

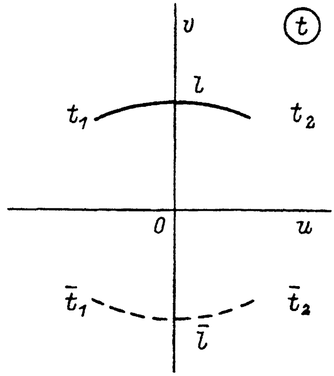

Рис. 2. Комплексная плоскость переменной $t = u + iv$. Кривая l — прообраз отрезка L на плоскости z.

Величины a и c_0 в этих выражениях являются постоянными. Комплексная функция $c(t)$ задается на некоторой линии l. Форма этой линии определяется из условия, по которому нужно, чтобы в результате конформного отображения с помощью функции $z = \omega(t)$ ее точки переходили в точки на электроде. Вся кривая l находится в верхней полуплоскости (рис. 2).

Интегрирование в выражении (3) ведется вдоль линии $\bar{l}$, зеркально-симметричной линии l относительно вещественной оси. Определяемая таким образом функция $\omega(t)$ оказывается аналитической в верхней полуплоскости. Функция $f(t)$, напротив, в этой области претерпевает разрыв вдоль линии l. В координатном пространстве такой разрыв соответствует скачку нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля на поверхности электрода.

Формулы (3) и (4) с очевидностью дают решение краевой задачи. Действительно, по построению границе слоя Шоттки в координатном пространстве соответствует вещественная ось плоскости t. При вещественных значениях t комплексно-сопряженное выражение (3) в точности совпадает с (4). Соответственно обращается в нуль поле $\mathcal{E}$, определяемое выражением (1).

Неизвестными остаются функция $c(t)$, постоянные c_0 и a, а также форма линии l. Этот набор величин оказывается вполне аналогичным тому, что имеется в задаче для точечных зарядов. По соображениям, изложенным в [2], постоянная a является вещественной и положительной, постоянная c_0 — вещественной.

Функция $c(t)$ может быть непосредственно выражена через поверхностную плотность заряда на электроде. Действительно, рассмотрим параметрическое представление комплексных координат точек линии L в виде $z = z(s)$, где s — длина дуги этой линии. Пусть $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности электрода. Направим вектор внутрь той области, которая остается слева при обходе кривой L в направлении возрастания длины дуги. Обозначим через $\mathbf{E}^+(\mathbf{r})$ предельное значение вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ при стремлении точки r к поверхности электрода изнутри указанной области. Значение поля по другую сторону электрода обозначим $\mathbf{E}^-(\mathbf{r})$. Тогда для скачка поля на поверхности мы можем написать

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(s)\mathbf{n}, \tag{5}$$

где $\rho(s)$ — абсолютная величина поверхностной плотности заряда, знак "минус" в правой части выражения учитывает отрицательность заряда.

Расписав векторное равенство (5) по компонентам и составив надлежащее выражение для комплексного поля $\mathcal{E}$, найдем

$$\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^- = -4\pi\rho(s)(n_x - in_y) = 4\pi\rho(s)\frac{d\bar{z}}{ds}\left|\frac{d\bar{z}}{ds}\right|^{-1}, \tag{6}$$

где в последнем равенстве использованы соотношения дифференциальной геометрии.

С другой стороны, из (1) и (4) на основании формул Сохоцкого [4] имеем

$$\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^- = -2\pi\sigma(f^+ - f^-) = 4\pi^2 i\sigma c(t), \tag{7}$$

где $c(t)$ — значение функции в точке t, соответствующей точке z на линии L.

Приравнивая (6) и (7), приходим к искомому выражению

$$c(t) = \frac{\rho(s)}{\pi\sigma}\frac{d\bar{z}}{ds}\left|\frac{d\bar{z}}{ds}\right|^{-1}. \tag{8}$$

В формуле (8) зависимость $c(t)$ от аргумента t оказывается неявной, так как связь длины дуги s кривой L с положением точки t на кривой l остается пока неизвестной. Это не мешает использовать формулу для вывода уравнения кривой l.

Будем рассматривать положение точки t на кривой l как функцию длины дуги s кривой L. Тогда на основании (3) для координаты точки $z(s)$ мы можем написать равенство

$$z(s) = c_0 + at(s) + \int\limits_0^{s_0} ds_1 \frac{d\bar{t}(s_1)}{ds_1}\frac{\bar{c}(s_1)}{t(s) - \bar{t}(s_1)}. \tag{9}$$

Поскольку функции $z(s)$ и $c(s)$ являются заданными, то это равенство представляет собой уравнение для определения зависимости $t(s)$.

Полученное уравнение замыкает собой решение задачи. Если функция $t(s)$ будет найдена, то станут известными функции (3) и (4) и, следовательно, форма области пространственного заряда и напряженность поля.

В общей постановке нелинейное интегральное уравнение (9) решается лишь численными методами. При равномерном распределении зарядов на полосковых электродах оно тем не менее допускает аналитическое решение.

3. Уравнение (9) сводится к алгебраическому при $c(s) = \text{const}$. В этом случае постоянная $\bar{c}$ выносится за знак интегрирования. Интеграл непосредственно вычисляется и формула (9) приобретает вид

$$z(s) = c_0 + at(s) - \bar{c}\left[\ln(t(s) - \bar{t}_2) - \ln(t(s) - \bar{t}_1)\right], \tag{10}$$

где постоянные $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$ — начальная и конечная точки контура $\bar{l}$, t_1 и t_2 — концевые точки контура l.

Это выражение непосредственно определяет положение точки t на кривой l зависимости от текущей координаты z на кривой L. Параметр s в нем оказывается формальным.

Как нетрудно видеть из формулы (8), постоянство $c(s)$ эквивалентно постоянству $\rho(s)$ и производной $z'(s)$ вдоль контура. Таким образом, уравнение (10) дает решение задачи в случае, когда электрод представляет собой равномерно заряженную полосу, расположенную под произвольным углом к оси абсцисс. Уравнение очевидным образом обобщается для системы таких электродов.

Контур $\bar{l}$ является линией разрезов функции $\omega(t)$. Его в принципе можно найти с помощью той же формулы (10). На самом деле, в этом нет необходимости. Значения функции конформного отображения в верхней полуплоскости переменной t не зависят от конкретной формы разрезов, так как последние все проходят ниже оси абсцисс. Для системы из N электродов выражение для нее имеет вид

$$\omega(t) = c_0 + at - \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{c}_\alpha \left[\ln(t - \bar{t}_{2\alpha}) - \ln(t - \bar{t}_{1\alpha})\right], \tag{11}$$

где суммирование по индексу α ведется по номерам отрезков, а постоянные $\bar{c}_\alpha$, $\bar{t}_{1\alpha}$ и $\bar{t}_{2\alpha}$ имеют тот же смысл, что и для уединенного отрезка.

Положения разрезов оказываются существенными для определения функции $f(t)$. Однако в дальнейшем она нам не понадобится. Ниже будет показано, что потенциал в системе может быть вычислен с помощью одной только функции конформного отображения.

Точки $t_{1\alpha}$ и $t_{2\alpha}$ определяются из условия, чтобы при конформном отображении они переходили в соответствующие концы отрезков $z_{1\alpha}$ и $z_{2\alpha}$

$$\omega(t_{1\alpha}) = z_{1\alpha}, \quad \omega(t_{2\alpha}) = z_{2\alpha}. \tag{12}$$

Постоянные a и c_0 являются при этом произвольными [2]. Они могут быть выбраны из соображений удобства. Параметр a влияет на масштаб растяжения осей координат при переходе от переменной z к переменной t. Параметр c_0 задает расположение особенностей функции $\omega(t)$ относительно начала координат.

4. Рассмотрим подробнее случай равномерно заряженной полосы, расположенной параллельно поверхности полупроводника на удалении h от нее (рис. 1). Значениям $h \geqslant 0$ и $h \leqslant 0$ пусть отвечают положения полосы в диэлектрике и полупроводнике соответственно. Ширину полосы обозначим через d.

Введем единицу длины $L_s = \rho/eN_i$, имеющую смысл толщины слоя Шоттки в одномерной задаче. Положим далее $a = L_s$, $c_0 = 0$. Для постоянной c будем иметь значение $c = \rho/\pi\sigma = L_s/\pi$.

Функция конформного отображения запишется в виде

$$\frac{z}{L_s} = \omega(t) = t + \frac{1}{\pi}\left[\ln(t - \bar{t}_1) - \ln(t - \bar{t}_2)\right], \tag{13}$$

где $t_1 = -u_0/2 + iv_0$, $t_2 = u_0/2 + iv_0$, u_0 и v_0 — неизвестные постоянные.

Из условий (12) достаточно использовать только одно — для правого конца отрезка. Отделив вещественную и мнимую части, получим систему уравнений

$$u_0 + \frac{1}{\pi}\ln\left[1 + \left(\frac{u_0}{2v_0}\right)^2\right] = \frac{d}{L_s},$$

$$v_0+\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{2v_0}{u_0}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{h}{L_s} \tag{14}$$

и как следствие этой системы уравнение на величину $\xi = 2v_0/u_0$

$$\xi\left[\frac{\pi d}{L_s}-\ln\left(1+\frac{1}{\xi^2}\right)\right]=\pi+\frac{2\pi h}{L_s}-2\operatorname{arctg}\xi. \tag{15}$$

Постоянные u_0 и v_0 непосредственно выражаются через эту величину.

Решение последнего уравнения всегда существует при $h \geqslant 0$, т.е. в случае, когда полоса находится над полупроводником. При $h \leqslant 0$ решение имеется только в области $h \geqslant h_{\min}$, где

$$\frac{h_{\min}}{L_s}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\exp\left(\frac{\pi d}{L_s}\right)-1}}. \tag{16}$$

При $h \leqslant h_{\min}$ слой Шоттки оказывается целиком сосредоточенным в полупроводнике. Поле электрода тогда совсем не выходит в диэлектрик. Этот предельный случай нами ранее рассматривался в работе [1].

Граница слоя Шоттки может быть описана явной зависимостью $x = x(y)$. Точки этой кривой даются выражением (13) при вещественных значениях параметра $t = u$. Исключая параметр u, находим

$$\frac{x}{L_s}=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{\pi d}{L_s}-\ln\left(1+\frac{1}{\xi^2}\right)\right]Q(y)+\ln\frac{P(y)+Q(y)}{P(y)-Q(y)}\right\}, \tag{17}$$

где

$$P(y)=1+\xi\operatorname{ctg}\frac{\pi|y|}{L_s},\quad Q(y)=\sqrt{1-\xi^2+2\xi\operatorname{ctg}\frac{\pi|y|}{L_s}}.$$

Ордината y в этой формуле изменяется в пределах $-1+2/\pi\operatorname{arctg} \leqslant$ $\leqslant y/L_s \leqslant 0$.

5. Перейдем к вычислению потенциала. В работах [1-3] предлагается способ его определения, основанный на привлечении явного вида функций $\omega(t)$ и $f(t)$. Он приводил к выражениям, записанным через переменную t. Для получения пространственного распределения потенциала возникала необходимость в обращении функции $z = \omega(t)$. Поскольку эта операция в конечном счете осуществляется численным методом, то может быть удобнее искать потенциал сразу как функцию истинных пространственных переменных. Покажем, каким образом это удается сделать.

После того как задача решена и распределение зарядов найдено, потенциал в системе можно искать как суперпозицию полей, создаваемых электродами и слоем объемного заряда. Выражение для первого вклада выписывается в явном виде. Для системы N электродов, параллельных поверхности полупроводника, потенциал дается формулой

$$\varphi_1=\varphi_0+\sum_{\alpha=1}^{N}\rho_\alpha\Big\{-d_\alpha+\frac{1}{2}(x-a_\alpha)\ln\left[(x-a_\alpha)^2+(y-h_\alpha)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{2}(x-b_\alpha)\ln\left[(x-b_\alpha)^2+(y-h_\alpha)^2\right]+|y-h_\alpha|\left[\operatorname{arctg}\frac{|y-h_\alpha|}{x-b_\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{|y-h_\alpha|}{x-a_\alpha}\right]\Bigg\},\tag{18}$$

где a_α и b_α — абсциссы концевых точек отрезков, h_α — соответствующие ординаты, $d_\alpha = b_\alpha - a_\alpha$, φ_0 — постоянная.

В этой формуле предполагается, что абсцисса x не попадает ни в один из интервалов $a_\alpha \leqslant x \leqslant b_\alpha$. Если такое происходит, то в соответствующем слагаемом к разности арктангенсов необходимо прибавлять число π.

Потенциал слоя Шоттки описывается выражением

$$\varphi_s = -2\sigma \iint dS' \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\tag{19}$$

где интегрирование ведется по площади, занимаемой объемным зарядом.

Поскольку форма области нами выше уже определена, то это выражение в принципе дает желаемый результат. Оно может быть подвергнуто дальнейшим преобразованиям. Перепишем (19) в тождественном виде

$$\varphi_s = -2\sigma\,\mathrm{Re}\iint dS'\ln(z'-z) = -2\sigma\,\mathrm{Re}\iint dS'\frac{\partial}{\partial \bar{z}'}\left[\bar{z}'\ln(z'-z)\right].\tag{20}$$

Использовав комплексное представление формулы Стокса [4], получим выражение

$$\varphi_s = -\sigma\,\mathrm{Im}\int_C dz'\bar{z}'\ln(z'-z),\tag{21}$$

в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру C, оставляющему область пространственного заряда слева от направления обхода (аналогичный прием ранее нами использовался в работе [3]). Точка наблюдения z в этом выражении считается расположенной за пределами области. Разрез у логарифма проводится от точки z до бесконечности таким образом, чтобы контур интегрирования находился в области однозначности логарифма.

Если точка z лежат внутри контура C, то формулой пользоваться нельзя. Более детальное рассмотрение показывает, что в этом случае вместо (21) нужно писать формулу

$$\varphi_s = -\sigma\,\mathrm{Im}\int_\Gamma dz'(\bar{z}'-z')\ln(z'-z),\tag{22}$$

в которой интегрирование идет только по границе Г слоя Шоттки, разрез у логарифма проводится вдоль прямой, параллельной оси абсцисс. Она оказывается справедливой и тогда, когда точка z лежит вне области пространственного заряда.

С учетом параметрического представления кривой Г в виде $z = \omega(u)$ окончательно имеем

$$\varphi_s = 2\sigma\int_{-\infty}^{\infty} du\,\mathrm{Im}\,\omega(u)\,\mathrm{Re}\left\{\omega'(u)\ln[\omega(u)-z]\right\}.\tag{23}$$

Таким образом, практическое нахождение потенциала сводится к вычислению однократного интеграла от функции, выражающейся через функцию конформного отображения (11).

Постоянная φ_0 в формуле (18) является значением потенциала системы на бесконечности. Действительно, при $x = \text{const}$ и $|y| \to \infty$ поле электродов имеет асимптотику

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2 \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha d_\alpha \ln |y|,$$

где сумма перед логарифмом есть полный заряд на электродах.

С другой стороны, потенциал объемного заряда (19) в этом пределе ведет себя как $\varphi_s = -2\sigma S \ln |y|$, где S — полная площадь слоя Шоттки. Поскольку в силу электронейтральности системы произведение σS в точности равняется заряду на электродах, то суммарный потенциал оказывается равным φ_0.

Проведенное выше рассмотрение нуждается в следующем уточнении. Так же как и в работе [2], здесь предполагается, что слой Шоттки является односвязным, т.е. его граница в полупроводнике состоит из одной кривой. В системе из нескольких электродов это условие может нарушаться. Достаточно удаленный от поверхности полупроводника электрод может иметь обособленную область пространственного заряда. Задача в этом случае решается путем комбинирования методов [1,2].

Следует также отметить, что требование одинаковости знаков зарядов на всех электродах является не слишком ограничительным. Важно только то, чтобы всюду внутри слоя Шоттки и на электродах потенциал соответствовал выталкиванию подвижных носителей.

Список литературы

[1] *Ефанов А.В., Энтин М.В.* // ФТП. 1987. Вып. 11. С. 2013–2017.
[2] *Ефанов А.В.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 3. С. 000.
[3] *Ефанов А.В., Энтин М.В.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 4(10). С. 1299–1303.
[4] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965. 716 с.

Институт физики полупроводников
Новосибирск

Поступило в Редакцию
20 августа 1992 г.