12

Сопротивление Ландауэра в случае многоканального рассеяния

© Д.М. Седракян[1], Л.Р. Седракян[2]

[1] Ереванский государственный университет,
Ереван, Армения
[2] Российско-Армянский (Славянский) государственный университет,
Ереван, Армения

E-mail: dsedrak@ysu.am, lyovsed@yahoo.com

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 4 февраля 2011 г.)

Приведено обобщение сопротивления Ландауэра ρ_N^L в случае многоканального рассеяния частицы на системе N случайных, не перекрывающихся потенциалов, зависящих от $x - x_i$ и y, которые локализованы возле точек x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$. Показано, что в этом случае появляется новое сопротивление ρ_N^S, которое является показательной (т. е. экспоненциальной) функцией от N. Получено рекуррентное уравнение для определения сопротивления Ландауэра ρ_N^L и приведено его решение в общем виде.

1. Введение

Одним из основных следствий наличия беспорядка в системе является возникновение в ней макроскопически большого числа локализованных состояний. Учет возможных реализаций случайного поля приводит к тому, что ожидаемая доля нелокализованных состояний в общем случае ничтожно мала. В частности, наличие сколь угодно слабого одномерного беспорядка приводит к тому, что вероятность реализации делокализованных состояний в системе равна нулю, т. е. имеет место полная локализация всех состояний одночастичного спектра [1]. Это приводит к отсутствию электропроводимости у одномерной неупорядоченной системы при нулевой температуре. Беспорядок неизбежно ведет к тому, что сопротивление одномерного образца длины L при нулевой температуре в пределе $L \to \infty$ становится бесконечно большим. Поэтому при наличии в системе сколь угодно слабого беспорядка проводник неизбежно превращается в диэлектрик [2–4].

Эффекты локализации крайне чувствительны к различным внешним условиям, которые могут как ослабить, так и усилить локализацию состояний. Особый интерес представляет выяснение зависимости эффектов локализации от размеров системы, в частности от наличия движения частицы по двум направлениям. В этом случае случайное поле зависит от двух переменных: $U(x, y)$, и если ограничить наше рассмотрение локализованным движением частицы по y и ее рассеянию на потенциале $U(x, y)$ в направлении x, то это рассеяние будет многоканальным. Такое рассеяние приводит к изменению локализации одночастичных состояний частицы. Для исследования этих изменений необходимо сформулировать возможности определения характера одночастичных состояний и соответственно вычисления радиуса локализации, что сводится к нахождению среднего сопротивления системы. Необходимо доказать, что, как и в случае одномерной задачи, асимптотическая зависимость среднего сопротивления системы от ее длины L при нулевой температуре имеет вид

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{L}{\xi}\right\},$$

где угловые скобки означают усреднение по всевозможным реализациям случайного поля. Здесь ξ — радиус локализации одночастичных состояний, который зависит от энергии частицы и вида случайного поля.

Как увидим далее, среднее сопротивление для системы N случайных потенциалов, введенное Ландауэром для одномерного движения [5], обобщается и состоит из суммы двух сопротивлений: Ландауэра ρ_N^L и введенного нами ρ_N^S. Последнее слагаемое в этой сумме появляется из-за учета многоканальности рассеяния при квазиодномерном движении частицы.

В работах [6,7] рассмотрено рассеяние квантовой частицы на двумерном потенциале $U(x, y)$ и представлено решение уравнения Шредингера

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x, y) + \left(\chi^2 - V(x, y)\right)\Psi(x, y) = 0, \quad (1)$$

где

$$\frac{2M}{\hbar^2} E = \chi^2, \quad \frac{2M}{\hbar^2} U(x, y) = V(x, y),$$

с граничными условиями $V(x, 0) = V(x, a) = \infty$. Решение имеет вид

$$\Psi(x, y) = \sum_{m=1}^{n} \Psi_m(x) \varphi_m(y), \quad (2)$$

где

$$\varphi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi m}{a} y. \quad (3)$$

Для нахождения искомых функций $\Psi_m(x)$ получается система уравнений

$$\frac{d^2\Psi_m(x)}{dx^2} + k_m^2 \Psi_m(x) - \sum_{i=1}^{n} V_{m,i} \Psi_i(x) = 0, \; m = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где $k_m^2 = \chi^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2$ и

$$V_{m,i}(x) = \int_0^a \varphi_m(y) V(x, y) \varphi_i(y) dy. \quad (5)$$

В работах [8] для многоканального рассеяния получена матрица переноса, которая связывает амплитуды прохождения T_m с амплитудами отражения R_m, соответствующие рассеянию с волновым вектором $\mathbf{k}_m$, где m обозначает номер канала рассеяния. Предполагается, что частица с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ падает на рассеивающий потенциал $V(x, y)$. Взаимодействуя с ним и не меняя волновой вектор $\mathbf{k}_1$, частица проходит его с амплитудой T_1 или отражается с амплитудой R_1. Одновременно она с определенной вероятностью может менять волновой вектор на $\mathbf{k}_m$ и пройти потенциал с амплитудой T_m или отразится с амплитудой R_m. Вероятность прохождения $|T|^2$ и отражения $|R|^2$ частицы через потенциал $V(x, y)$ имеет вид

$$|T|^2 = \sum_{m=1}^{n} |T_m|^2, \quad |R|^2 = \sum_{m=1}^{n} |R_m|^2 = 1 - |T|^2. \quad (6)$$

Полученная в работе [8] матрица переноса имеет вид

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \\ \vdots \\ T_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^*, & -\beta_1^*, & \dots & 0, & -\delta_{1n}^* \\ -\beta_1, & \alpha_1, & \dots & -\delta_{1n}, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^*, & -\beta_n^*, & \dots & 0, & -\delta_{nn}^* \\ -\beta_n, & \alpha_n, & \dots & -\delta_{nn}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ \vdots \\ 0 \\ R_n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где элементы, входящие в матрицу (7), выражаются через амплитуды рассеяния T_m и R_m следующим образом:

$$\alpha_m = \frac{1}{T_m} \left|\frac{T_m}{T}\right|^2, \ \beta_m = \frac{R_1}{T_m} \left|\frac{T_m}{T}\right|^2, \ \delta_{km} = \frac{R_k}{T_m} \left|\frac{T_m}{T}\right|^2. \quad (8)$$

Отметим также, что выполняется условие

$$\sum_{m=1}^{n} \left(|\alpha_k|^2 - \sum_{k=2}^{n} |\delta_{km}|^2 \right) = 1. \quad (9)$$

Целью настоящей работы является получение разностных уравнений для элементов матрицы переноса для цепочки потенциалов, состоящих из конечного числа неперекрывающихся рассеивающих центров. Эти уравнения, представленные в разделе 2, используются для получения уравнения для нахождения ландауэровского сопротивления, определенного для случайного поля рассеивателей. Далее в разделе 3 обобщено понятие сопротивления Ландауэра с введением нового сопротивления $\langle \rho_N^S \rangle$, которое появляется из-за многоканальности рассеяния. В разделе 4 получено уравнение для определения сопротивления Ландауэра $\langle \rho_N^L \rangle$. В разделе 5 это уравнение решено. Решение представляется в виде суммы от показательных функций. В Заключении (раздел 6) перечислены полученные результаты и показано, что уравнение (43) для $\langle \rho_N^L \rangle$, а также его решение (53) в случае одномерного движения или одноканального рассеяния переходят в результаты, полученные в работах [2,4].

2. Разностное уравнение для элементов матрицы переноса

Рассмотрим задачу движения частицы по направлению x в поле цепочки, состоящей из конечного числа рассеивающих центров. Пусть модельный потенциал рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x - x_i, y), \quad (10)$$

где N — число рассеивателей цепочки, $U_i(x - x_i, y)$ — локализованные возле точек x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ неперекрывающиеся функции. Зависимость от y произвольна. В одномерных задачах локализации исследования проводились для потенциалов $U_i(x - x_i) = A\delta(x - x_i)$, которые соответствуют точечным дефектам [2,4]. В рассматриваемых нами задачах эти дефекты могут быть моделированы потенциалами, которые имеют следующий вид: $U_i(x - x_i, y - y_i) = A\delta(x - x_i)\delta(y - y_i)$.

Если параметры $x_1, x_2, \dots, x_N$, характеризующие расположение рассеивателей в пространстве, удовлетворяют условию $x_i = x_1 + (i - 1)b$, то мы имеем цепочку из периодически расположенных рассеивателей. Если наряду с этим поля, создаваемые различными рассеивателями, идентичны, то цепочка состоит из периодически расположенных идентичных потенциалов. Однако обсудим задачу в наиболее общем виде, когда рассеиватели неидентичны и периодичность их расположения отсутствует. Согласно методу матриц, развитому в работе [4], можно записать

$$\begin{pmatrix} T_{1N} \\ 0 \\ \vdots \\ T_{nN} \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=N}^{1} \begin{pmatrix} \alpha_1^*(i), & -\beta_1^*(i), & \dots & 0, & -\delta_{1n}^*(i) \\ -\beta_1(i), & \alpha_1(i), & \dots & -\delta_{1n}(i), & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^*(i), & -\beta_n^*(i), & \dots & 0, & -\delta_{nn}^*(i) \\ -\beta_n(i), & \alpha_n(i), & \dots & -\delta_{nn}(i), & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_{1N} \\ \vdots \\ 0 \\ R_{nN} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\alpha_k(i)$, $\beta_k(i)$ и $\delta_{km}(i)$ являются элементами матрицы переноса от i-го рассеивателя цепочки при отсутствии в ней остальных рассеивателей. Заметим, что матрицы переноса, входящие в (11), коммутативны, когда рассеиватели в цепочке идентичны и расположены эквидистантно. Важно отметить, что фигурирующие в (11) элементы матрицы переноса должны быть вычислены с учетом места расположения рассеивателей.

Покажем, что задача определения T_{mN} и R_{mN} многоканального рассеяния частицы может быть в общем виде сведена к решению системы $3n$ линейных разностных уравнений первого порядка, где n — число каналов. Для этого введем матрицу переноса для всей цепочки:

$$\begin{pmatrix} T_{1N} \\ 0 \\ \vdots \\ T_{nN} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^*(N), & -\widetilde{D}_1^*(N), & \dots & 0, & -M_{1n}^*(N) \\ -\widetilde{D}_1(N), & D_1(N), & \dots & -M_{1n}(N), & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_n^*(N), & -\widetilde{D}_n^*(N), & \dots & 0, & -M_{nn}^*(N) \\ -\widetilde{D}_n(N), & D_n(N), & \dots & -M_{nn}(N), & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_{1N} \\ \vdots \\ 0 \\ R_{nN} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь для цепочки, состоящей из N рассеивателей, использована входящая в (11) матрица переноса, в которую вместо α_k, β_k и δ_{km} введены обозначения $D_m(N)$, $\widetilde{D}_m(N)$ и $M_{km}(N)$. Сравнение (11) и (12) показывает, что матрица, входящая в (12), вычисляется как произведение матриц переноса для отдельных рассеивателей цепочки. Рассмотрим элементы матриц переноса $D_m(N)$, $\widetilde{D}_m(N)$ и $M_{km}(N)$ как функции дискретного параметра N, так что $D_m(N-1)$, $\widetilde{D}_m(N-1)$ и $M_{km}(N-1)$ должны соответствовать элементам матрицы при прохождении частицы от первых $N-1$ потенциалов цепочки. Легко видеть, что между элементами матриц переноса всей цепочки и цепочки без последнего потенциала существует связь

$$\begin{pmatrix} D_1^*, & -\widetilde{D}_1^*, & \dots & 0, & -M_{1n}^* \\ -\widetilde{D}_1, & D_1, & \dots & -M_{1n}, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_n^*, & -\widetilde{D}_n^*, & \dots & 0, & -M_{nn}^* \\ -\widetilde{D}_n, & D_n, & \dots & -M_{nn}, & 0 \end{pmatrix}_N$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^*(i), & -\beta_1^*(i), & \dots & 0, & -\delta_{1n}^*(i) \\ -\beta_1(i), & \alpha_1(i), & \dots & -\delta_{1n}(i), & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^*(i), & -\beta_n^*(i), & \dots & 0, & -\delta_{nn}^*(i) \\ -\beta_n(i), & \alpha_n(i), & \dots & -\delta_{nn}(i), & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} D_1^*, & -\widetilde{D}_1^*, & \dots & 0, & -M_{1n}^* \\ -\widetilde{D}_1, & D_1, & \dots & -M_{1n}, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_n^*, & -\widetilde{D}_n^*, & \dots & 0, & -M_{nn}^* \\ -\widetilde{D}_n, & D_n, & \dots & -M_{nn}, & 0 \end{pmatrix}_{N-1}. \quad (13)$$

Заметим, что закон сохранения плотности потока вероятности, записанный через величины D_m, $\widetilde{D}_m$ и M_{km}, имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \left(|D_m(N)|^2 - |\widetilde{D}_m(N)|^2 - \sum_{i=2}^{n} |M_{mi}(N)|^2 \right) = 1. \quad (14)$$

Рассматривая в (13) N как переменную величину, равенство (13) можно представить в виде следующей системы линейных разностных уравнений первого порядка:

$$D_k(N) = \alpha_k(N) D_1(N-1) + \beta_k(N) \widetilde{D}_1(N-1) + \sum_{m=2}^{n} \delta_{km}(N) \widetilde{D}_m(N-1),$$

$$\widetilde{D}_k^*(N) = \alpha_k(N) \widetilde{D}_1^*(N-1) + \beta_k(N) D_1^*(N-1) + \sum_{m=2}^{n} \delta_{km}(N) D_m^*(N-1),$$

$$M_{ki}(N) = \alpha_k(N) M_{1i}(N-1). \quad (15)$$

Здесь $N \geq 1$, а начальные условия имеют вид

$$D_1(0) = 1, \quad \widetilde{D}_1(0) = 0, \quad M_{1i}(0) = \frac{\delta_{1i}(1)}{\alpha_1(1)}, \quad i \geq 2,$$

$$D_k(0) = \widetilde{D}_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (16)$$

Таким образом, система разностных уравнений (15) с начальными условиями (16) определяет амплитуды прохождения $T_m(N)$ и отражения $R_m(N)$ для системы потенциалов (10).

Преобразуем систему уравнений (15), используя полученные в работе [4] формулы

$$\frac{\beta_k(N)}{\alpha_k(N)} = R_1(N), \quad \frac{\delta_{ki}(N)}{\alpha_k(N)} = R_i(N). \quad (17)$$

Подставляя их в систему (15), получим

$$D_k(N) = \alpha_k(N) \Big[D_1(N-1) + R_1(N) \widetilde{D}_1(N-1) + \sum_{i=2}^{n} R_i(N) \widetilde{D}_1(N-1) \Big],$$

$$\widetilde{D}_k^*(N) = \alpha_k(N) \Big[\widetilde{D}_1^*(N-1) + R_1(N) D_1^*(N-1) + \sum_{i=2}^{n} R_i(N) D_1^*(N-1) \Big],$$

$$M_{ki}(N) = \alpha_k(N) M_{1i}(N-1). \quad (18)$$

Из системы уравнений (18) имеем

$$\frac{D_m(N)}{D_1(N)} = \frac{\widetilde{D}_m(N)}{\widetilde{D}_1(N)} = \frac{M_{mi}(N)}{M_{1i}(N)} = \frac{\alpha_m(N)}{\alpha_1(N)}. \quad (19)$$

Это означает, что достаточно определить $D_1(N)$, $\widetilde{D}_1(N)$ и $M_{1m}(N)$, и тогда неизвестные $D_k(N)$, $\widetilde{D}_k(N)$ и $M_{km}(N)$ определяются из (19). А искомые функции $D_1(N)$, $\widetilde{D}_1(N)$ и $M_{1m}(N)$ получаются из уравнений (18), если в них, используя (19), заменить $D_k(N)$ и $\widetilde{D}_k(N)$ на $D_1(N)$ и $\widetilde{D}_1(N)$. Окончательно получим

$$D_1(N) = \alpha_1(N)D_1(N-1) + \alpha_1(N)r_1(N)\widetilde{D}_1(N-1),$$
$$\widetilde{D}_1^*(N) = \alpha_1(N)\widetilde{D}_1^*(N-1) + \alpha_1(N)r_1(N)D_1^*(N-1),$$
$$M_{1i}(N) = \alpha_1(N)M_{1i}(N-1), \tag{20}$$

где

$$r_1(N) = R_1(N)\pi$$
$$= R_1(N)\left[1 + \sum_{m=2}^{n} \frac{R_m(N)T_m(N-1)}{R_1(N)T_1(N-1)}\right]. \tag{21}$$

Заметим, что первые два уравнения системы (20) совпадают с системой уравнений, полученных для одномерной задачи рассеяния, только коэффициенты перед функциями $D_1(N-1)$ и $\widetilde{D}_1(N-1)$ другие.

3. Сопротивление Ландауэра для многоканального рассеяния

Чтобы определить сопротивление Ландауэра для рассмотренной нами задачи, запишем уравнение (14) в виде

$$|D_1(N)|^2 - |\widetilde{D}_1(N)|^2 - \sum_{i=2}^{n} |M_{1i}(N)|^2$$
$$+ \sum_{m=2}^{n} \frac{|\alpha_m|^2}{|\alpha_1|^2}\left(|D_1(N)|^2 - |\widetilde{D}_1(N)|^2 - \sum_{i=2}^{n} |M_{1i}(N)|^2\right) = 1, \tag{22}$$

где использована формула (19). Далее имеем

$$|D_1(N)|^2 = |\widetilde{D}_1(N)|^2 + \sum_{i=2}^{n} |M_{1i}(N)|^2 + \frac{|\alpha_1|^2}{\sum\limits_{m=1}^{n} |\alpha_m|^2}. \tag{23}$$

Учитывая формулы (8), определяющие α_m, вместо (23) окончательно получим

$$|D_1(N)|^2 = |\widetilde{D}_1(N)|^2 + \sum_{i=2}^{n} |M_{1i}(N)|^2 + \left|\frac{T_1}{T}\right|^2. \tag{24}$$

Введем обозначения

$$\left|\frac{T}{T_1}\right| D_1(N) = D_N, \quad \left|\frac{T}{T_1}\right| \widetilde{D}_1(N) = \widetilde{D}_N, \quad M_{1i}(N)\left|\frac{T}{T_1}\right| = M_{iN}. \tag{25}$$

Тогда вместо системы уравнений (20) можно написать следующие уравнения:

$$D_N = \bar{\alpha}_N r_N \widetilde{D}_{N-1} + \bar{\alpha}_N D_{N-1},$$
$$\widetilde{D}_N = \bar{\alpha}_N^* r_N^* D_{N-1} + \bar{\alpha}_N^* \widetilde{D}_{N-1},$$
$$M_{i,N} = \bar{\alpha}_N M_{i,N-1}, \tag{26}$$

где

$$r_N = R_1(N)\pi, \quad \bar{\alpha}_N = \alpha_1(N) = \frac{1}{T_{1N}}\left|\frac{T_{1N}}{T_N}\right|^2. \tag{27}$$

В задачах одномерного рассеяния при исследовании локализации частицы вводится сопротивление Ландауэра, которое равняется $|\widetilde{D}_1|^2$. В случае многоканального рассеяния нам необходимо определить два сопротивления. Одно из них мы назовем сопротивлением Ландауэра и обозначим

$$\rho_N^L = \sum_{m=1}^{n} |\widetilde{D}_m(N)|^2 = |\widetilde{D}_N|^2. \tag{28}$$

Введем новое сопротивление ρ_N^S и определим его как

$$\rho_N^S = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} |M_{mi}|^2 = \left|\frac{T}{T_1}\right|^2 \sum_{i=2}^{n} |M_{1i}|^2 = \sum_{i=2}^{n} |M_{iN}|^2. \tag{29}$$

Учитывая (25), (28) и (29), уравнение (24) можно записать в следующем виде:

$$|D_N|^2 = \rho_N^L + \rho_N^S + 1. \tag{30}$$

Для нахождения ρ_N^L и ρ_N^S мы используем систему уравнений (26).

Прежде чем перейти к получению уравнений, определяющих ρ_N^L, отметим очень важное свойство функции π, входящей в (26). Предположим, что потенциалы, заданные формулой (10), идентичны, имеют толщину d и находятся друг от друга на расстоянии h. Тогда если начало координат по x находится в середине нулевого потенциала, то центр N-го потенциала будет на расстоянии $x_N = pN$, где $p = d + h$. Амплитуды отражения и прохождения для m-го канала зависят от x_N следующим образом [6]:

$$R_m(N) = r_m \exp\{-i(k_1 + k_m)x_N\},$$
$$T_m(N) = t_m \exp\{-i(k_1 - k_m)x_N\};$$

следовательно,

$$\pi = 1 + \sum_{m=2}^{n} \frac{R_m(N)T_m(N-1)}{R_1(N)T_1(N-1)} = 1 + \sum_{m=2}^{n} \frac{t_m r_m \exp\{-ik_m p\}}{t_1 r_1 \exp\{-ik_1 p\}}, \tag{31}$$

где r_m и t_m — части амплитуд рассеяний, которые не зависят от N. Согласно (31), коэффициент π, входящий в систему уравнений (26), не зависит от N.

4. Уравнения для определения сопротивления ρ_N^L

Чтобы найти уравнение, определяющее сопротивление Ландауэра ρ_N^L, используем первые два уравнения системы (26). Последнее уравнение этой системы дает возможность определить M_{iN}, а следовательно, и ρ_N^S как заданные функции от N.

Если ввести обозначение

$$P_N = D_N \widetilde{D}_N^*, \tag{32}$$

то из второго уравнения системы (12) получим

$$\rho_N^L = |\bar{\alpha}_N|^2(1+|r_N|^2)\rho_{N-1}^L + |\bar{\alpha}_N|^2 r_N^* P_{N-1} + |\bar{\alpha}_N|^2 r_N P_{N-1}^* + |\bar{\alpha}_N|^2|r_N|^2(1+\rho_{N-1}^S). \quad (33)$$

При получении уравнений (33) мы использовали формулу (30). Далее из первых двух уравнений системы (26) можно получить выражение, определяющее функцию P_N:

$$P_N = \bar{\alpha}_N^2 P_{N-1} + \bar{\alpha}_N^2 r_N^2 P_{N-1}^* + 2\bar{\alpha}_N^2 r_N \rho_{N-1}^L + \bar{\alpha}_N^2 r_N(\rho_{N-1}^S + 1). \quad (34)$$

Система уравнений (33) и (34) определяет неизвестное сопротивление ρ_N^L и искомую функцию P_N.

Прежде чем перейти к исследованию возможных решений системы уравнений (33) и (34), преобразуем их в удобную для решения форму. Для этого обозначим

$$\alpha_N = |\bar{\alpha}_N|^2, \quad \beta_N' = |\bar{\alpha}_N|^2 r_N,$$
$$\gamma_N' = \bar{\alpha}_N^2 r_N, \quad \delta_N' = \bar{\alpha}_N^2 r_N^2, \quad \kappa_N' = \alpha_N^2. \quad (35)$$

Тогда вместо (33) и (34) имеем

$$\rho_N^L = \alpha_N(1+|r_N|^2)\rho_{N-1}^L + \beta_N^{*\prime} P_{N-1} + \beta_N^{*\prime} P_{N-1}^* + \alpha_N(\rho_{N-1}^S + 1),$$
$$P_N = \kappa_N' P_{N-1} + \delta_N' P_{N-1}^* + \gamma_N'(2\rho_{N-1}^L + 1) + \gamma_N' \rho_{N-1}^S. \quad (36)$$

Теперь снова обозначим

$$\beta_N' = \exp\{2ik_1 x\beta_N\}, \quad \gamma_N' = \exp\{2ik_1 x\gamma_N\},$$
$$\delta_N' = \exp\{4ik_1 x\delta_N\}, \quad \kappa_N' = \kappa_N, \quad (37)$$

где

$$\beta_N = |\bar{\alpha}|^2 r_N, \quad \gamma_N = \bar{\alpha}_N^2, \quad \delta_N = \bar{\alpha}_N^2 r_N^2,$$
$$\kappa_N = \bar{\alpha}_N^2, \quad |r_{1N}|^2 = |r_N|^2, \quad (38)$$

и эти величины не зависят от x_N. Введем обозначения

$$P_N = \exp\{2ik_1 x_N S_N\}, \quad \eta_{N-1} = \exp\{2ik_1 \Delta x_{N-1}\}, \quad (39)$$

где $\Delta x_N = x_N - x_{N-1}$. Тогда систему уравнений (36) можно записать в следующем виде:

$$\rho_N' = \alpha_N(1+|r_N|^2)\rho_{N-1}^L + \beta_N\eta_{N-1}S_{N-1}^* + \beta_N^*\eta_{N-1}^* S_{N-1} + \alpha_N|r_N|^2(\rho_{N-1}^S + 1),$$
$$S_N = \kappa_N\eta_{N-1}^* S_{N-1} + \delta_N\eta_{N-1}S_{N-1}^* + \gamma_N(2\rho_{N-1}^L + 1) + \gamma_N\rho_{N-1}^S, \quad (40)$$

где S_N зависит от $\Delta x_{N-1}, \Delta x_{N-2}, \ldots, \Delta x_0$.

В общем случае решение системы уравнений (40) сопряжено с определенными математическими трудностями. Однако если потенциалы цепочки (10) почти идентичны, т.е. их параметры имеют малый разброс около их средних значений, тогда в этих условиях можно провести усреднение. Оно производится по заданному распределению этих отклонений от их средних значений. Действительно, например, среднее значение для функции η_{N-1}, равное η, будет зависеть от среднего расстояния между потенциалами, так как оно зависит от расстояния между потенциалами N и $N-1$. Слагаемые, входящие в систему уравнений (40), имеют такой вид, что позволяют факторизацию, т.е., например, при усреднении слагаемого $\beta_N\eta_{N-1}S_{N-1}^*$ можно записать

$$\langle\beta_N\eta_{N-1}S_{N-1}^*\rangle = \langle\beta_N\rangle\langle\eta_{N-1}\rangle\langle S_{N-1}^*\rangle,$$

так как S_{N-1}^* зависит от $\Delta x_{N-2}, \Delta x_{N-3}, \ldots, \Delta x_0$, β_N от Δx_N и η_{N-1} от Δx_{N-1}, а S_{N-1}^*, β_N и η_{N-1} усредняются независимо друг от друга.

Если средние значения, входящие в усредненные уравнения (40), обозначить теми же буквами, то вместо уравнений (40) получим

$$\langle\rho_N^L\rangle = \alpha(1+|r|^2)\langle\rho_{N-1}^L\rangle + \beta\eta\langle S_{N-1}^*\rangle + \beta^*\eta^*\langle S_{N-1}\rangle + \alpha|r|^2(\langle\rho_{N-1}^S\rangle + 1),$$
$$\langle S_N\rangle = \kappa\eta\langle S_{N-1}^*\rangle + \delta\eta^*\langle S_{N-1}\rangle + \gamma(2\langle\rho_{N-1}^L\rangle + 1) + \gamma\langle\rho_{N-1}^S\rangle, \quad (41)$$

где α, β, γ, δ и η не зависят от N. Мы также учли, что $|r_N|^2 = |r|^2$ $|r_N|^2 = |r|^2$ не зависит от индекса N. Первое из уравнений (41) есть рекуррентное уравнение для определения сопротивления Ландауэра $\langle\rho_N^L\rangle$. Однако в него входят неизвестные функции $\langle S_{N-1}\rangle$ и $\langle S_{N-1}^*\rangle$. Их необходимо выразить через функции $\langle\rho_N^L\rangle$ и $\langle\rho_N^S\rangle$, чтобы получить уравнение для определения $\langle\rho_N^L\rangle$. Для этого запишем первое из уравнений (41) для функций $\langle\rho_{N-1}^L\rangle$ и $\langle\rho_{N-2}^L\rangle$, а второе из этих уравнений — для функций $\langle S_{N-1}\rangle$, $\langle S_{N-1}^*\rangle$, $\langle S_{N-2}\rangle$, $\langle S_{N-2}^*\rangle$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\langle\rho_{N-1}^L\rangle = \alpha(1+|r|^2)\langle\rho_{N-2}^L\rangle + \eta\beta\langle S_{N-2}^*\rangle + \beta^*\eta^*\langle S_{N-2}\rangle + \alpha|r|^2(\langle\rho_{N-2}^S\rangle + 1),$$
$$\langle\rho_{N-2}^L\rangle = \alpha(1+|r|^2)\langle\rho_{N-3}^L\rangle + \eta\beta\langle S_{N-3}^*\rangle + \beta^*\eta^*\langle S_{N-3}\rangle + \alpha|r|^2(\langle\rho_{N-3}^S\rangle + 1),$$
$$\langle S_{N-1}\rangle = \kappa\eta^*\langle S_{N-2}\rangle + \delta\eta\langle S_{N-2}^*\rangle + \gamma(2\langle\rho_{N-2}^L\rangle + 1) + \gamma\langle\rho_{N-2}^S\rangle,$$
$$\langle S_{N-1}^*\rangle = \kappa^*\eta\langle S_{N-2}^*\rangle + \delta^*\eta^*\langle S_{N-2}\rangle + \gamma^*(2\langle\rho_{N-2}^L\rangle + 1) + \gamma^*\langle\rho_{N-2}^S\rangle,$$
$$\langle S_{N-2}\rangle = \kappa\eta^*\langle S_{N-3}\rangle + \delta\eta\langle S_{N-3}^*\rangle + \gamma(2\langle\rho_{N-3}^L\rangle + 1) + \gamma\langle\rho_{N-3}^S\rangle,$$
$$\langle S_{N-2}^*\rangle = \kappa^*\eta\langle S_{N-3}^*\rangle + \delta^*\eta^*\langle S_{N-3}\rangle + \gamma^*(2\langle\rho_{N-3}^L\rangle + 1) + \gamma^*\langle\rho_{N-3}^S\rangle. \quad (42)$$

В результате имеем шесть уравнений для шести неизвестных функций: $\langle S_{N-1}\rangle$, $\langle S^*_{N-1}\rangle$, $\langle S_{N-2}\rangle$, $\langle S^*_{N-2}\rangle$, $\langle S_{N-3}\rangle$ и $\langle S^*_{N-3}\rangle$. После решения этой системы линейных алгебраических уравнений искомые функции $\langle S_{N-1}\rangle$ и $\langle S^*_{N-1}\rangle$, входящие в первое уравнение системы (41), выразятся через функции $\langle \rho^L_{N-1}\rangle$, $\langle \rho^L_{N-2}\rangle$ и $\langle \rho^L_{N-3}\rangle$. В эти решения войдут также функции $\langle \rho^S_{N-1}\rangle$, $\langle \rho^S_{N-2}\rangle$ и $\langle \rho^S_{N-3}\rangle$, которые являются неизвестными функциями от N.

Подставляя найденные из решения системы уравнений (42) функции $\langle S_{N-1}\rangle$ и $\langle S^*_{N-1}\rangle$ в первое уравнение системы (41), для определения сопротивления Ландауэра $\langle \rho^L_N\rangle$ получим следующее рекуррентное уравнение:

$$\langle \rho^L_N\rangle - A\langle \rho^L_{N-1}\rangle - B\langle \rho^L_{N-2}\rangle - C\langle \rho^L_{N-3}\rangle - D_N = 0, \quad (43)$$

где

$$A = \alpha(1+|r|^2) + 2\theta, \quad B = 2\phi - \upsilon - \alpha(1+|r|^2)2\theta,$$

$$C = \alpha(1+|r|^2)\upsilon - 2u,$$

$$D_N = \alpha|r|^2(1-2\theta+\upsilon) + \phi - u + \alpha|r|^2\langle \rho^S_{N-1}\rangle$$
$$+ (\phi - 2\theta\alpha|r|^2)\langle \rho^S_{N-2}\rangle + (\alpha|r|^2\upsilon - u)\langle \rho^S_{N-3}\rangle \quad (44)$$

с обозначениями

$$\phi = \beta^*\eta^*\gamma + \beta\eta\gamma^*, \quad u = \eta^*\Gamma^*\gamma + \eta\Gamma\gamma^*,$$

$$\upsilon = |\eta|^2(|\kappa|^2 - |\delta|^2),$$

$$\theta = \mathrm{Re}\left[\frac{\eta^*\left(\kappa - \delta\,\frac{\Gamma^*}{\Gamma}\right)}{1 - \frac{\beta\Gamma^*}{\beta^*\Gamma}}\right], \quad \Gamma = \eta^*(\kappa\beta - \delta\beta^*). \quad (45)$$

Уравнение (43) определяет сопротивление Ландауэра для системы N случайных двумерных потенциалов типа (10).

5. Решение уравнения для среднего сопротивления $\langle \rho^L_N\rangle$

Прежде чем перейти к решению уравнения (43), вычислим сопротивление $\langle \rho^S_N\rangle$ согласно формуле (29). Для этого решим последнее из системы уравнений (26):

$$M_{iN} = \alpha_N M_{iN-1}. \quad (46)$$

Это уравнение решается, и согласно (23) и (24) получается следующее решение:

$$M_{iN} = \prod_{j=N}^{1} \alpha_1(j)R_i, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (29) и проводя усреднение, получим

$$\langle |M_{iN}|^2\rangle = [|\alpha_1|^2]^N |R_i|^2, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (48)$$

где

$$\alpha = |\alpha_1|^2 = \left|\frac{T_1}{T}\right|^2 \frac{1}{|T|^2}.$$

Для среднего сопротивления $\langle \rho^S_N\rangle$ получим

$$\langle \rho^N_S\rangle = \frac{|R|^2 - |R_1|^2}{|T|^2}\,\alpha^{N-1}, \quad (49)$$

где $N \geq 1$. Вспомним, что $|R|^2 = \sum\limits_{m=1}^{n} |R_m|^2$.

Подставляя $\langle \rho^S_N\rangle$ в определение D_N, получим

$$D_N = D_0 + F\alpha^{N-3},$$

где

$$D_0 = \alpha\left[|r|^2(1-2\theta+\upsilon) + \frac{\phi}{\alpha} - \frac{u}{\alpha}\right],$$

$$F = \frac{|R|^2 - |R_1|^2}{|T|^2}\left[\alpha^2|r|^2 + \alpha\left(\frac{\phi}{\alpha} - |r|^2 2\theta\right) + \left(|r|^2\upsilon - \frac{u}{\alpha}\right)\right]. \quad (50)$$

Перейдем теперь к решению уравнения (43), записав его в виде

$$\langle \rho^L_N\rangle - A\langle \rho^L_{N-1}\rangle - B\langle \rho^L_{N-2}\rangle - C\langle \rho^L_{N-3}\rangle = D_0 + F\alpha^{N-3}. \quad (51)$$

Начальные условия для этого уравнения таковы:

$$\langle \rho^L_0\rangle = 0, \quad \langle \rho^L_1\rangle = \alpha|r|^2,$$

$$\langle \rho^L_2\rangle = \alpha|r|^2(\alpha|r|^2 + \alpha + 1) + \phi + \alpha|r|^2\,\frac{|R|^2 - |R_1|^2}{|T|^2}, \quad (52)$$

они получены из уравнений (41) с помощью условия $|\widetilde{D}_0|^2 = 0$. Следуя работе [4], решение этого уравнения можно искать в виде

$$\langle \rho^L_N\rangle = \sum_{j=1}^{P} L_j x_j^N + L\alpha^N + L_0. \quad (53)$$

Подставляя (53) в уравнение (51) и требуя, чтобы оно выполнялось, для определения x_j, L и L_0 получим следующие уравнения:

$$x_j^3 - Ax_j^2 - Bx_j - C = 0, \quad (54a)$$

$$(1 - A - B - C)L_0 = D_0, \quad (54b)$$

$$(\alpha^3 - A\alpha^2 - B\alpha - C)L = F. \quad (54c)$$

Как видно из (53), неизвестные величины x_j $(j = 1, 2, 3)$ являются корнями кубического уравнения (54a). Уравнения (54b) и (54c) определяют L_0 и L:

$$L_0 = \frac{D_0}{1 - A - B - C}, \quad L = \frac{F}{\alpha^3 - A\alpha^2 - B\alpha - C}. \quad (55)$$

Коэффициенты L_j $(j = 1, 2, 3)$, входящие в решение (53), выражаются через величины x_j и $\langle \rho^L_0\rangle$, $\langle \rho^L_1\rangle$, $\langle \rho^L_2\rangle$. Исходя из начальных условий (52) и решения (53) можно написать

$$L_1 + L_2 + L_3 = -(L + L_0) = A_1,$$

$$x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 = \langle \rho_1(L)\rangle - \alpha L - L_0 = A_2,$$

$$x_1^2L_1 + x_2^2L_2 + x_3^2L_3 = \langle \rho_2(L)\rangle - \alpha^2 L - L_0 = A_3. \quad (56)$$

Система уравнений (56) является системой линейных уравнений для определения постоянных L_1, L_2, L_3. Решение этой системы уравнений дает

$$L_1 = \frac{A_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \left[x_2 x_3 - \frac{A_2}{A_1}(x_2 + x_3) + \frac{A_3}{A_1} \right]. \tag{57}$$

L_2 и L_3 получаются из (57) циклической перестановкой величин x_1, x_2, x_3.

Найденное в этом разделе решение $\rho_N = \rho_N^L + \rho_N^S$ представляет собой сумму четырех показательных (т.е. экспоненциальных) функций от N. Радиус локализации определяется из асимптотического поведения решения ρ_N при $N \to \infty$. Из суммы слагаемых, определяющих ρ_N^L, останется то, которое соответствует наибольшему корню $x_{\max}$. Этот корень должен быть реальным и больше единицы, так как в экспонентах перед N стоят $\ln x_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Сравнение полученного корня $x_{\max}$ с α и определит, который из членов суммы ρ_N (т.е. ρ_N^L и ρ_N^S) даст основной вклад.

6. Заключение

Важным результатом настоящей работы является получение рекуррентного уравнения для нахождения сопротивления Ландауэра ρ_N^L в случае рассеяния частицы на цепочке потенциалов вида (10). Параметры, описывающие эти потенциалы, в среднем идентичны, однако они обладают композиционным и структурным беспорядком. Последнее приводит к локализации движения частицы по x, радиус локализации можно определить из решения уравнения (43).

Полученное уравнение (43) в случае одномерного движения или при одноканальном рассеянии сохраняет свой вид, только с другими коэффициентами, входящими в него [4]:

$$A = 2\alpha - 1 + 2\theta,$$

$$B = 2\phi - v - (2\alpha - 1)2\theta, \quad C = (2\alpha - 1)v - 2u,$$

$$D = (\alpha - 1)(1 - 2\theta + v) + \phi - u, \quad \alpha = \frac{1}{|t|^2}. \tag{58}$$

Метод решения этого уравнения, когда свободный член (D) не зависит от N, приведен в [4]. В разделе 5 мы обобщили его и нашли решение (53). Из полученного решения следует, что вне зависимости от характера случайного поля двумерной системы зависимость среднего сопротивления $\rho_N = \rho_N^L + \rho_N^S$ от ее длины для всех состояний одноэлектронного спектра представляет сумму четырех показательных (т.е. экспоненциальных) функций.

Таким образом, для нахождения радиуса локализации необходимо выбрать вид потенциалов U_i и использовать предложенный математический метод для определения x_1, x_2, x_3 и α. При решении задач с двумерным потенциалом $U_i(x - x_i, y)$ естественно начать исследования с рассмотрения потенциалов типа $U_i(x - x_i, y - y_i) = A_i\delta(x - x_i)\delta(y - y_i)$, которые моделируют точечные дефекты. В настоящее время мы приступили к решению этих задач.

Список литературы

[1] О. Маделунг. Локализованные состояния. Мир, М. (1985). 184 с.
[2] Д.М. Седракян, Д.А. Бадалян, А.Ж. Хачатрян. ФТТ **41**, 1687 (1999); **42**, 747 (2000).
[3] A.Zh. Khachatrian, G. Röpke, D.H. Badalian, D.M. Sedrakian. Phys. Rev. B **62**, 13 501 (2000).
[4] Д.М. Седракян, Д.А. Бадалян, А.Ж. Хачатрян. Изв. НАН Армении. Физика **35**, 55 (2000).
[5] R. Landauer. Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
[6] Д.М. Седракян, Э.М. Казарян, Л.Р. Седракян. Изв. НАН Армении. Физика **44**, 395 (2009).
[7] Л.Р. Седракян. Докл. НАН Армении **109**, 214 (2009).
[8] Д.М. Седракян. Изв. НАН Армении. Физика **45**, 39 (2010); **45**, 183 (2010).