

## РАЗМЕРНОЕ КВАНТОВАНИЕ ДЫРОК В СЛОЖНОЙ ВАЛЕНТНОЙ ЗОНЕ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОВЕРХНОСТИ

Н. С. Аверкиев, А. М. Монахов

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021, Санкт-Петербург, Россия  
(Получена 28.09.1992. Принята к печати 1.10.1992)

Решена задача о размерном квантовании дырок в сложной зоне в присутствии магнитного поля, параллельного слою. Показано, что при сравнительно малых импульсах движения дырки вдоль слоя расщепление уровней размерного квантования нижней подзоны подавлено. Получена асимптотика расщепления уровней при больших импульсах. Численно решена задача об энергетическом расщеплении при произвольных импульсах и продемонстрировано, что это расщепление совпадает с рассчитанным по теории возмущений в широком диапазоне импульсов.

*Введение.* Как известно, магнитное поле широко используется для исследования двумерных и квазидвумерных систем. Обычно изучаются электронные аккумуляционные или инверсионные слои либо электроны в квантовых ямах. В данной работе рассматривается спектр квазидвумерной дырки, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме, которая помещена в магнитном поле, параллельном стенкам этой ямы.

Спектр размерного квантования дырки в такой яме с нулевыми граничными условиями на огибающие волновой функции рассмотрен в работах [1, 2]. В них было показано, что в этом случае снимается вырождение сложной зоны в точке  $k=0$  ( $k$  — квазиимпульс дырки), но уровни размерного квантования остаются дважды вырожденными в силу теоремы Крамерса. При этом основному состоянию при  $k=0$  соответствует состояние дырки с проекцией спина на направление размерного квантования, равной  $\pm 3/2$ . Магнитное поле снимет это вырождение и, кроме того, приведет к диамагнитному сдвигу.

В данной работе рассчитано расщепление уровней размерного квантования как в первом порядке теории возмущений, так и путем численного решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Показано, что расщепления и сдвиги уровней основного состояния малы в широком диапазоне магнитных полей, если импульс движения дырки вдоль плоскости мал по сравнению с характерным импульсом размерного квантования  $P_0 = \pi/L$  ( $L$  — ширина ямы). Можно сказать, что медленные дырки «не ориентируются» в магнитном поле, параллельном поверхности. Кроме того, получены асимптотики величин расщепления уровня при больших  $k \gg P_0$  для движения вдоль поля и перпендикулярно полю.

### Теория возмущений при $k=0$

Поскольку величина магнитного взаимодействия мала по сравнению с расстоянием между уровнями размерного квантования, следует ожидать, что влияние магнитного поля должно хорошо учитываться по теории возмущений. К сожалению, даже в первом порядке теории возмущений по величине магнитного поля

$H$  ответ получается столь громоздкий, что мы не в состоянии привести его в этой статье. Поэтому мы приводим лишь исходные формулы и графики зависимости величины расщепления от  $k$ .

Оператор Гамильтона для свободной дырки без учета гофрированности изоэнергетической поверхности (сферическое приближение) можно записать в виде

$$H = \alpha k^2 - 2\gamma \quad (\text{кДж}). \quad (1)$$

Здесь использована атомная система единиц, а  $\alpha$  и  $\gamma$  выражаются через массу легкой  $m_{\perp}$  и тяжелой  $m_{\parallel}$  дырок как

$$\alpha = \frac{1}{8} \left( \frac{9}{m_l} - \frac{1}{m_h} \right) \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_h} \right),$$

$\mathbf{J} = \{J_x, J_y, J_z\}$  — матрицы оператора момента  $3/2$ , для которых матрица  $J_z$  диагональна, а фазовые множители для ненулевых матричных элементов  $(J_x)_{m, m-1}$  и  $(J_y)_{m, m-1}$  выбраны согласно [3]. Магнитное поле вводится стандартным образом:  $H = (H \sin \varphi, H \cos \varphi, 0)$ . Оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости границы,  $z$  — направление размерного квантования;  $\varphi$  — угол между направлением магнитного поля и осью  $y$ . Векторный потенциал выбран в калибровке  $A_x = Hz \cos \varphi$ ,  $A_y = -Hz \sin \varphi$ ,  $A_z = 0$ . В качестве единицы магнитного поля выбрана

$$B_0 = \frac{\hbar^3}{m_e^2 e^3 c},$$

где  $m_e$  — масса,  $e$  — заряд свободного электрона,  $c$  — скорость света.

Гамильтониан частицы в магнитном поле получается согласно [4] заменой в (1)  $k \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{k} - \mathbf{A}$  и добавлением члена  $g$  (НД). Для упрощения уравнений удобно перейти от «линейных» к «круговым» поляризациям дырок в исходном уравнении (см. Приложение) и считать, что импульс  $k$  направлен вдоль оси  $y$ . В этом случае уравнения, во-первых, становятся чисто вещественными, а, во-вторых, уравнение для свободной (без магнитного поля) дырки сразу распадается на 2 пары независимых уравнений, соответствующих двукратному вырождению уровня размерного квантования.

Далее мы рассматриваем только изменение энергии основного состояния. Используя стандартную теорию возмущений, можно получить это изменение энергии. В Приложении показано, что при  $k=0$  поправка первого порядка по  $H$  теории возмущений равна нулю, второй порядок дает диамагнитный сдвиг уровней, пропорциональный  $H^2$ , но не дает расщепления, которое появляется лишь в третьем порядке. Это расщепление чрезвычайно мало в силу малости магнитного взаимодействия.

Таким образом, поведение дырки с псевдоспином  $3/2$  в магнитном поле существенно отличается от поведения электрона. Для электрона при тех же условиях диамагнитный сдвиг тоже пропорционален  $H^2$ , но расщепление линейно по  $H$ , не зависит от импульса частицы и равно  $gH$ . Отсутствие линейного по  $H$  расщепления для основного состояния дырки обусловлено тем, что в гамильтониане (П.2) нет матричных элементов, соответствующих переходам между состояниями тяжелых дырок с противоположно направленными проекциями полного момента.

Для дырки линейные по  $H$  члены появляются лишь при  $k \neq 0$ , следовательно, в окрестности точки  $k=0$  линейная по  $H$  теория возмущений не применима. Однако с ростом  $k$  линейный член быстро станет доминирующим.

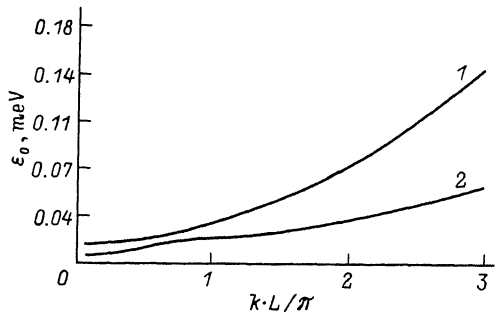


Рис. 1. Энергетический спектр размерного квантования дырок в валентной зоне кремния (1) и арсенида галлия (2). Нижняя подзона.

### Теория возмущений при ненулевых $k$ . Сравнение с численными расчетами

На рис. 1—3 приведены результаты расчетов расщепления уровней при произвольном  $k$  для зонных параметров, соответствующих GaAs и Si. На тех же рисунках пунктиром приведено численное решение системы (П.2). Расчеты производились для углов  $0$  и  $90^\circ$  между направлением импульса дырки и магнитным полем для магнитного поля  $50$  кЭ. На рис. 1 показана зависимость положения невозмущенного основного уровня энергии  $\epsilon_0(k)$  от импульса  $k$  при следующих зонных параметрах:  $m_i^{\text{GaAs}} = 0.09$ ,  $m_b^{\text{GaAs}} = 0.67$ ,  $m_j^{\text{Si}} = 0.198$ ,  $m_b^{\text{Si}} = 0.256$ . Эти кривые совпадают с соответствующими результатами [1, 2]. На рис. 2 и 3 приведена зависимость разности  $\Delta\epsilon = \epsilon(k, H) - \epsilon_0(k)$  при различных углах  $\varphi$  между направлением импульса и магнитного поля, вычисленной точно и по теории возмущений. На рис. 4 изображена относительная погрешность величины расщепления, рассчитанной по теории возмущений, в сравнении с точной величиной. Пик относительной погрешности для кремния связан с антипересечением термов при соответствующих значениях  $k$ .

Из приведенных результатов можно сделать следующие выводы. Величина расщепления, рассчитанная в первом порядке теории возмущений, с хорошей точностью совпадает с той же величиной, вычисленной точно. Диамагнитный сдвиг уровней является эффектом второго порядка по  $H$ , и для его учета необходимо точно решать уравнения (П. 2). При  $k < P_0$  в магнитном поле, параллельном слою, расщепление основного уровня подавлено.

Интересно сравнить расщепление дырочного уровня с расщеплением электронного уровня в аналогичных условиях (рис. 5). Величина расщепления электронного уровня не зависит от  $k$ . Сдвиг каждого спинового подуровня зависит от проекции импульса электрона на направление, перпендикулярное магнитному полю. В этом различие квантования квазидвумерных и трехмерных частиц во внешнем магнитном поле. Для электрона в объеме проекция импульса на направление, перпендикулярное магнитному полю ( $P_x$ ), определяет положение центра орбиты, но не влияет на энергию электрона. В случае квазидвумерных электронов положение центра орбиты не может быть произвольным, поэтому положение уровня размерного квантования начинает зависеть от  $P_x$ . В случае сложной зоны от  $P_x$  зависит не только сдвиг, но и расщепление уровней размерного квантования.

Как видно из сравнения рис. 3 и 5, главным отличием квантования электронов от квантования дырок является малая величина расщепления уровней дырок при  $k < P_0$  ( $\Delta\epsilon_b / \Delta\epsilon_c \approx 10^{-3}$  для параметров, соответствующих Si и GaAs). Это обстоятельство позволяет различать линии рекомбинационного излучения, соответствующие дыркам на поверхности и в объеме. Для линии, возникающей при

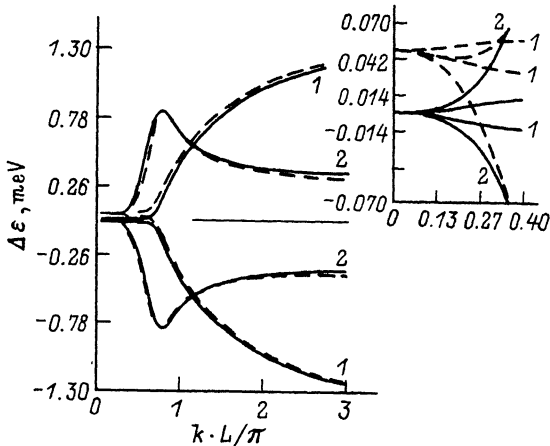


Рис. 2. Разность между положением отщепленного в магнитном поле уровня энергии и невозмущенным уровнем, изображенным на рис. 1 для GaAs. Сплошные линии соответствуют расчету по теории возмущений, пунктирные — точному решению системы (П. 2)). Цифрой 1 отмечены кривые для  $k$ , параллельного магнитному полю, цифрой 2 — для  $k$ , перпендикулярного магнитному полю. На вставке в правом верхнем углу в увеличенном масштабе изображена область малых  $k$ .  $H = 50$  кЭ.  $L = 100$  Å.

рекомбинации дырки из объема кубического полупроводника, интенсивность и поляризация линии не зависят от направления магнитного поля в линейном по  $H$  приближении. Для дырки в двумерном слое магнитное поле, параллельное поверхности, не влияет на ее спектр, в то время как магнитное поле, перпендикулярное слою, расщепляет основное состояние. Последнее обстоятельство следует из того, что в диагональных членах гамильтониана, описывающего взаимодействие дырки с таким полем, имеются слагаемые, пропорциональные  $H$ .

Другим интересным предельным случаем является случай  $k \gg P_0$ . Можно показать, что в этом случае для импульса  $k$ , параллельного  $H$ , расщепление уровня основного состояния квазидвумерной дырки стремится к величине  $\Delta\epsilon_{\parallel} = 3H(g + \gamma)$ , а для импульса, перпендикулярного  $H$ , к величине  $\Delta\epsilon_{\perp} = 6H\gamma(2\alpha - 9\gamma)/(2\alpha - 3\gamma)$ . Таким образом, для  $k \perp H$  расщепление не зависит от  $g$ -фактора дырки. Это позволяет экспериментально определить  $g$ -фактор и параметр Латтинжера  $\gamma$  по измерению расщепления основного состояния дырки, двигающейся вдоль и перпендикулярно полю. Для произвольного угла  $\varphi$  между направлением магнитного поля и импульсом расщепление при больших  $k$  равно  $(\Delta\epsilon_{\parallel}^2 \cdot \cos^2 \varphi + \Delta\epsilon_{\perp}^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}$ .

Приведенные выше результаты относятся к случаю бесконечно глубокой потенциальной ямы, тем не менее малость расщепления основного состояния при малых  $k$  должна наблюдаться при различных форме и глубине ямы. Это связано с тем, что отсутствие линейного по  $H$  расщепления при  $k = 0$  обусловлено не конкретным видом волновых функций, а отсутствием в гамильтониане членов, отвечающих за взаимодействие частиц со спином  $\pm 3/2$ .

Авторы благодарят П. Д. Алтухова, А. А. Бакуна, М. И. Дьяконова и В. И. Переля за полезные обсуждения.

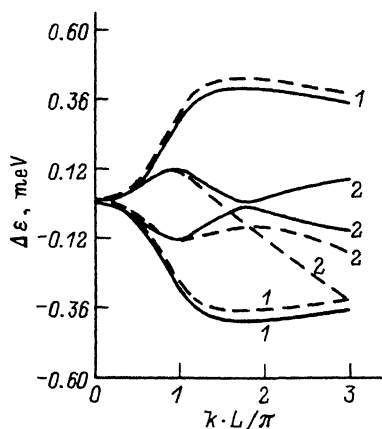


Рис. 3. График, аналогичный рис. 2, для Si.

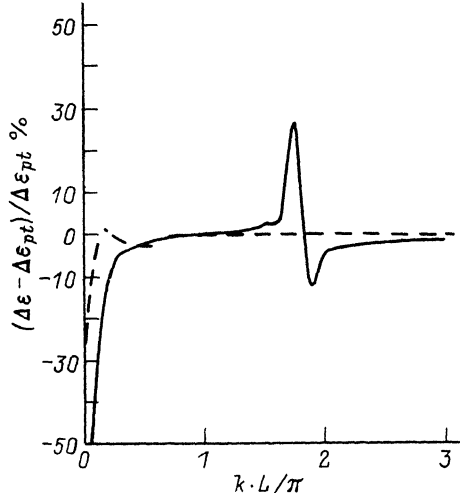


Рис. 4. Относительная погрешность величины расщепления, рассчитанной по теории возмущений  $\Delta \epsilon_{pt}$ , для импульса, перпендикулярного магнитному полю для кремния (сплошная линия) и арсенида галлия (пунктирная линия).

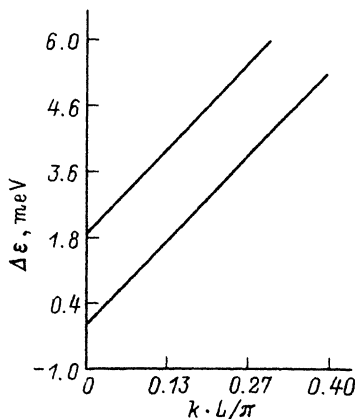


Рис. 5. График, аналогичный рис. 2, для электрона из простой сферической зоны (GaAs), находящегося в прямоугольной потенциальной яме. Кривые отличаются ориентацией спина ( $g = -0.45$ ).

Приложение

### Исходный гамильтониан

$$H = \alpha P^2 - 2\gamma (PJ)^2, \quad (J_z)_{m,m'} = \delta_{m,m'} m,$$

$$(J_x)_{m,m-1} = (J_x)_{m-1,m} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{2} + m\right) \left(\frac{3}{2} - m + 1\right)},$$

$$(J_y)_{m,m-1} = (J_y)_{m-1,m} = -\frac{i}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{2} + m\right) \left(\frac{3}{2} - m + 1\right)}, \quad P = k - A$$

имеет комплексные коэффициенты, что усложняет численные расчеты. Для того чтобы получить вещественный гамильтониан, можно совершить каноническое преобразование  $H = D^{-1} H \cdot D$ , где

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и воспользоваться коммутационным соотношением

Преобразованный гамильтониан окажется вещественным и примет вид

$$\begin{aligned}
 & -\left(\alpha - \frac{9}{2}\gamma\right) D^2 + & F + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \sin \varphi \times & G + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \cos \varphi \times \\
 & + \left(\alpha - \frac{3}{2}\gamma\right) A & \times (\gamma + g) & \times (\gamma + g) \\
 & 0 & & \\
 & & -\left(\alpha - \frac{9}{2}\gamma\right) D^2 + & G^+ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \cos \varphi \times & -F^+ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \sin \varphi \times \\
 & 0 & + \left(\alpha - \frac{3}{2}\gamma\right) A & \times (\gamma + g) & \times (\gamma + g)
 \end{aligned}$$

Н =

$$\begin{aligned}
 & F^+ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \sin \varphi \times & G + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \cos \varphi \times & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right) D^2 + & H \cdot \cos \varphi \times \\
 & \times (g - 3\gamma) & \times (3\gamma - g) & & \times (\gamma - g) \\
 & & & + \left(\alpha - \frac{7}{2}\gamma\right) A + & \\
 & & & + g \cdot H \cdot \sin \varphi & \\
 & G^+ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \cos \varphi \times & -F + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot H \cdot \sin \varphi \times & H \cdot \cos \varphi \times & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right) D^2 + \\
 & \times (g - 3\gamma) & \times (g - 3\gamma) & \times (\gamma - g) & + \left(\alpha - \frac{7}{2}\gamma\right) A - \\
 & & & & - g \cdot H \cdot \sin \varphi
 \end{aligned}$$

(П.2)

Здесь

$$A = H^2 z^2 + 2kzH \cdot \sin \varphi + k^2,$$

$$\begin{aligned}
 F = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma (4kD + 4z^2 H^2 \cdot \sin^2 \varphi - 2H^2 z^2 + 4Hz \cdot \sin \varphi \cdot D + \\
 + 4zkH \cdot \sin \varphi + 2k^2),
 \end{aligned}$$

$$G = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma H \cdot \cos \varphi \cdot (4zD - 4z^2 H \cdot \sin \varphi - 4zk),$$

$$D = \frac{d}{dz}.$$

Эрмитово сопряжение соответствует тому, что  $D^+ = -D$ , а остальные величины не меняются. В операторе Н с помощью коммутационного соотношения (П.1) все операторы дифференцирования по  $z$  поставлены правее координаты  $z$ . Именно с этим связана кажущаяся неэрмитовость Н.

Невозмущенный гамильтониан  $H_0$  получается из Н, если в нем положить  $H = 0$ .

$$\begin{array}{cccc}
-\left(\alpha - \frac{9}{2}\gamma\right) D^2 + & 0 & \sqrt{3} k (2D + k) & 0 \\
+\left(\alpha - \frac{3}{2}\gamma\right) k^2 & & & \\
0 & -\left(\alpha - \frac{9}{2}\gamma\right) D^2 + & 0 & \sqrt{3} k (2D - k) \\
& +\left(\alpha - \frac{3}{2}\gamma\right) k^2 & & \\
\mathbf{H}_0 = & & & \\
\sqrt{3} k (-2D + k) & 0 & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right) D^2 + & 0 \\
& & +\left(\alpha - \frac{7}{2}\gamma\right) k^2 & \\
0 & \sqrt{3} k (-2D - k) & 0 & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right) D^2 + \\
& & & +\left(\alpha - \frac{7}{2}\gamma\right) k^2
\end{array}$$

Видно, что система распадается на 2 независимые пары уравнений, что соответствует двукратному вырождению уровней  $\mathbf{H}_0$ .

В качестве базисной системы решений можно выбрать систему, состоящую из функций  $f_1 - f_4$  и  $\Phi_1 - \Phi_4$ , для которой  $f_1 - f_4$  являются решением одной пары уравнений, а  $\Phi_1 - \Phi_4$  - другой. В качестве таких функций мы выбрали

$$\Phi_1 = \left( 0, \frac{-\sqrt{3} \cdot k [k \cdot \cos(q_1 z) + 2q_1 \sin(q_1 z)]}{4q_1^2 + k^2}, 0, \cos(q_1 z) \right),$$

$$\Phi_2 = \left( 0, \frac{\sqrt{3} \cdot k [2q_1 \cdot \cos(q_1 z) - k \cdot \sin(q_1 z)]}{4q_1^2 + k^2}, 0, \sin(q_1 z) \right),$$

$$\Phi_3 = \left( 0, \cos(q_2 z), 0, \frac{\sqrt{3} \cdot k [k \cdot \cos(q_2 z) - 2q_2 \sin(q_2 z)]}{4q_2^2 + k^2} \right),$$

$$\Phi_4 = \left( 0, \sin(q_2 z), 0, \frac{\sqrt{3} \cdot k [2q_2 \cdot \cos(q_2 z) + k \cdot \sin(q_2 z)]}{4q_2^2 + k^2} \right)$$

и

$$f_1 = \left( \frac{\sqrt{3} \cdot k [k \cdot \cos(q_1 z) - 2q_1 \cdot \sin(q_1 z)]}{4q_1^2 + k^2}, 0, \cos(q_1 z), 0 \right),$$

$$f_2 = \left( \frac{\sqrt{3} \cdot k [2q_1 \cdot \cos(q_1 z) + k \cdot \sin(q_1 z)]}{4q_1^2 + k^2}, 0, \sin(q_1 z), 0 \right),$$

$$f_3 = \left( \cos(q_2 z), 0, \frac{-\sqrt{3} \cdot k [k \cdot \cos(q_2 z) + 2q_2 \sin(q_2 z)]}{4q_2^2 + k^2}, 0 \right),$$

$$f_4 = \left( \sin(q_2 z), 0, \frac{\sqrt{3} \cdot k [2q_2 \cos(q_2 z) - k \cdot \sin(q_2 z)]}{4q_2^2 + k^2}, 0 \right).$$

Величины  $q_1$  и  $q_2$  связаны с собственным значением энергии  $E$  соотношением

$$E = \frac{k^2 + q_1^2}{2m_l} = \frac{k^2 + q_2^2}{2m_h}. \quad (\text{П.3})$$

Каждое состояние является дважды вырожденным, и ему соответствуют 2 волновые функции

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^4 a_i \Phi_i \text{ и } \Psi_2 = \sum_{i=1}^4 b_i f_i.$$

Собственные значения для свободного гамильтониана определяются из уравнения [2]:

$$1 - \cos(q_1 L) \cdot \cos(q_2 L) = -f(q_1, q_2, k) \sin(q_1 L) \sin(q_2 L),$$

$$f(q_1, q_2, k) = \frac{4k^4 + k^2(q_1^2 + q_2^2) + 4q_1^2 q_2^2}{6q_1 q_2 k^2}. \quad (\text{П.4})$$

Выбирая  $a_3$  и  $b_3$  в качестве нормировочных постоянных, получаем для бесконечно глубокой потенциальной ямы шириной  $L$

$$a_1 = - \frac{\sqrt{3} N k^2 [q_1 \sin(q_2 L) \cos(q_1 L/2) - q_2 (\cos(q_2 L) + 1) \sin(q_1 L/2)]}{q_1 (k^2 + 4q_2^2) \sin(q_2 L/2) \cdot (1 + \cos(q_1 L)) + 3k^2 q_2 \cos(q_2 L/2) \sin(q_1 L)},$$

$$a_2 = \frac{-2N \{ [k^4 + k^2(q_1^2 + q_2^2) + 4q_1^2 q_2^2] \sin(q_2 L) \cos(q_1 L/2) + 3k^2 q_1 q_2 (\cos(q_2 L) + 1) \sin(q_1 L/2) \}}{k \sqrt{3} [q_1 (k^2 + 4q_2^2) \sin(q_2 L/2) \cdot (1 + \cos(q_1 L)) + 3k^2 q_2 \cos(q_2 L/2) \sin(q_1 L)]},$$

$$a_3 = N,$$

$$a_4 = - \frac{2Nk(k^2 + q_2^2) \cos(q_2 L/2) \sin(q_1 L/2)}{q_1 (k^2 + 4q_2^2) \sin(q_2 L/2) \cos(q_1 L/2) + 3k^2 q_2 \cos(q_2 L/2) \sin(q_1 L/2)}.$$

Коэффициенты  $b$  отличаются от  $a$  знаками.

Во внешнем магнитном поле  $H$  гамильтониан содержит члены первого и второго порядка по  $H$ :  $H = H_0 + H \cdot N_1 + H^2 \cdot N_2$ . Величина расщепления в линейном по  $H$  приближении равна  $\Delta \varepsilon = 2 \{ \langle \Psi_1 | N_1 | \Psi_1 \rangle^2 + |\langle \Psi_2 | N_1 | \Psi_1 \rangle|^2 \}^{1/2}$ , где учтено, что для основного состояния  $\langle \Psi_1 | N_1 | \Psi_1 \rangle = -\langle \Psi_2 | N_1 | \Psi_2 \rangle$ . Однако при  $k = 0$  для всех уровней, сформированных из состояний дырок, все матричные элементы оператора  $N_1$  равны нулю и, таким образом, для основного состояния  $\Delta \varepsilon = 0$ . Можно показать, что во втором порядке по  $H$  существует только сдвиг двукратно вырожденного основного уровня, определяющийся диагональными матричными элементами оператора  $N_2$ . Расщепление подуровней при  $k = 0$  возникает лишь в третьем порядке по  $H$ .

При больших  $k$  (область, где  $k$  можно считать большими, будет уточнена далее) легкие и тяжелые дырки квантуются независимо, и можно получить



аналитические выражения для асимптотики расщепления уровней в магнитном поле при больших  $k$ . Это расщепление будет зависеть от угла между направлением импульса дырки и магнитным полем.

Из уравнений (П. 4) видно, что при  $k \gg P_0$  величина  $f \gg 1$ , и основное состояние, как и в случае  $k=0$ , вновь определяется с точностью до членов нулевого порядка по  $k$  условием  $q_2 = \pi/L$ . Величина  $q_1$  при этом оказывается чисто мнимой:

$$q_1^2 \propto m_b k^2 \left( \frac{1}{m_b} - \frac{1}{m_l} \right) \equiv -\frac{k^2}{\eta^2} \quad (\text{П.5})$$

При этом  $f$  также оказывается чисто мнимой, а тригонометрические функции от  $q_1$  переходят в гиперболические. Подставив эти значения  $q_1, q_2$  в спиноры  $\Phi$ ,  $f$  и удерживая в них и коэффициентах  $a, b$  только главный вклад по  $k$ , можно получить расщепление для  $k$ , параллельного магнитному полю. Для этого необходимо вычислить матричный элемент  $\langle \Psi_2 | H_1 | \Psi_1 \rangle$ , поскольку диагональные элементы равны нулю. Это расщепление оказывается равным

$$\Delta \varepsilon_{\perp} = 3H (g + \gamma).$$

Область  $k$ , в которой расщепление выходит на асимптотику, определяется из условия

$$k \gg \frac{\pi}{L} \cdot \frac{\left( \alpha - \frac{9}{2} \gamma \right)}{4\gamma}$$

Заметим, что при уменьшении  $\gamma$  выход на асимптотику происходит при все больших  $k$ , что видно при сравнении рис. 2, 3.

Для  $k$ , перпендикулярного магнитному полю, разложение  $q_2$  с точностью до нулевых степеней  $k$  оказывается недостаточным, так как в диагональных матричных элементах  $\langle \Psi_1 | H_1 | \Psi_1 \rangle = -\langle \Psi_2 | H_1 | \Psi_2 \rangle$  члены, которые могли бы дать вклад в расщепление при больших  $k$ , оказываются равными нулю из-за ортогональности соответствующих спиноров в нулевом порядке по  $k$ . Поэтому необходимо решить уравнение (П.4) при больших  $k$  с точностью до членов порядка  $1/k$ . Разложив для основного состояния  $q_2 = \pi/L + C/k$  и записав  $f = -i \cdot k \cdot f_0 + 0(1)$ , получим из уравнения (П.4)

$$C = \frac{6\pi\eta}{(4\eta^2 - 1) \cdot L^2}$$

Теперь, подставив эти выражения для  $q_1$  и  $q_2$  в  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , считая  $\cos(C/k) = 1$  и  $\sin(C/k) = C/k$  и удерживая главные члены по  $k$ , можно получить величину расщепления для импульса, перпендикулярного магнитному полю,

$$\Delta \varepsilon_{\perp} = 6\gamma H \cdot \frac{\alpha - \frac{9}{2} \gamma}{\alpha - \frac{3}{2} \gamma}$$

Эти тривиальные по сути, но чрезвычайно громоздкие преобразования производились с помощью системы аналитических вычислений на ЭВМ.

В случае, когда импульс составляет с направлением поля произвольный угол  $\varphi$ , расщепление при больших  $k$  равно

$$(\Delta \varepsilon_{\parallel}^2 \cdot \cos^2 + \Delta \varepsilon_{\perp}^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. С. Недорезов. ФТТ, 12, 2269 (1970).
- [2] М. И. Дьяконов, А. В. Хаецкий. ЖЭТФ, 82, 1584 (1982).
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, 117. М. (1989)
- [4] J. M. Luttinger. Phys. Rev., 102, 1030 (1956).

Редактор В. В. Чалдышев

---