УДК 538.22
©1993

# КИНЕТИКА ДВУМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯРОНОВ

*К.В.Кавокин*

В рамках адиабатического приближения получено теоретическое описание кинетики формирования свободных и квазисвободных двумерных магнитных поляронов. Учтены тепловые флуктуации намагниченности среды. Показано, что в зависимости от радиуса предварительной локализации полярон образуется либо диффузионным, либо дрейфовым путем. Найдены равновесная функция распределения поляронов по энергии и эффективная плотность состояний.

Магнитными поляронами (МР) традиционно называют области локального ферромагнитного упорядочения нескомпенсированных спинов магнитных ионов, образующиеся в полумагнитных полупроводниках в результате обменного взаимодействия электронов на внутренних оболочках этих ионов с локализованными носителями заряда или экситонами. Частица — носитель или экситон — формирующая полярон — может быть локализована на какой-либо неоднородности потенциала немагнитного происхождения (например, на примесном центре) или автолокализована в результате обменного взаимодействия. Соответственно различают связанные и свободные магнитные поляроны. Первые исследованы экспериментально и теоретически в большом числе работ [1], причем достигнуто хорошее согласие теории с экспериментом. К настоящему времени не получено надежных экспериментальных данных, свидетельствующих о существовании свободного в строгом понимании, т.е. сформированного исключительно за счет автолокализации, МП. Однако есть категория экспериментально наблюдаемых МР, в образовании которых автолокализация может играть существенную роль. Это МР, образованные экситонами, предварительно локализованными на флуктуациях состава полумагнитного твердого раствора [2], а в квантовых ямах ($QW$) — также на флуктуациях ширины $QW$ [3,4]. Энергия предварительной локализации такого экситона может быть намного меньше его же конечной энергии связи в МР. Соответственно в процессе формирования МР радиус локализации может уменьшаться в несколько раз. Образующийся МР естественно назвать квазисвободным.

Как показано в ряде теоретических работ [5,6], магнитная автолокализация частицы в трехмерной и двумерной системах происходит качественно различным образом. В трехмерном случае существует энергетический барьер, отделяющий состояния свободной частицы от связанных, и непрерывный переход от первых ко вторым отсутствует [7]. В двумерном случае энергетического барьера нет и существует только одно локально-устойчивое состояние системы. При магнитной восприимчивости среды, превышающей некоторую критическую величину, это состояние соответствует локализованной частице, иначе — свободной. Критическая восприимчивость для автолокализации экситона в $QW$ с полумагнитным барьером вычислена в [6]. При приближении восприимчивости сверху к критической величине радиус локализации устремляется в бесконечность и происходит плавный переход от связанного состояния к свободному. Такое поведение равновесного состояния двумерного магнитного полярона ($2DMP$) позволяет предположить, что формирование последнего происходит не скачком, а путем плавного уменьшения радиуса локализации $r_0$, т.е. представляет собой самосогласованный процесс сокращения $r_0$ и релаксации спина магнитных ионов в области локализации частицы.

Возникает задача теоретического описания этого процесса.

Специфика задач о кинетике магнитных поляронов по сравнению с «классическими» поляронными проблемами или даже с ферронными моделями в магнитных полупроводниках [8] состоит в том, что поляризующаяся среда — парамагнетик или спиновое стекло — существенно неупорядоченна. Соответственно полный гамильтониан задачи выписать, как правило, невозможно и приходится довольствоваться феноменологическими характеристиками среды типа восприимчивостей и времен релаксации. Тем не менее можно предложить схему решения кинетической задачи, которая в случае $2DMP$ дает хорошие результаты (см. [9], где кратко приведены результаты расчетов времени формирования $2DMP$ в сопоставлении с экспериментальными данными).

Основу подхода составляют адиабатическое приближение и флуктуационно-диссипативная теорема. Последняя позволяет найти статистические характеристики флуктуаций плотности спина в системе магнитных ионов. Использование же адиабатического приближения сводит задачу отыскания зависящей от времени волновой функции частицы к решению стационарного уравнения Шредингера в зависящем от времени потенциале.

Качественно ход решения следующий. Пусть в момент времени $t$ на частицу действует некоторый эффективный обменный потенциал, обусловленный поляризацией магнитных ионов. За этим потенциалом адиабатически следует волновая функция частицы $\Psi(\mathbf{r}, t)$. В свою очередь этой волновой функции соответствует некоторое равновесное распределение среднего спина, а значит, и обменного потенциала. Разность между равновесным и мгновенным потенциалами $\Delta U(\mathbf{r}, t)$ обусловлена запаздыванием средней намагниченности и содержит информацию о волновой функции в предшествующие моменты времени. Восстановление предыстории $\Psi$ по форме $\Delta U(\mathbf{r}, t)$ дало бы возможность получить динамическое описание развития полярона. Однако такая задача в общем случае некорректна. Чтобы ее решить, необходимо сузить класс функций $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Естественно выбрать однопараметрическое семейство волновых функций, задаваемое радиусом локализации, которое использовалось при вариационном решении задачи о равновесном состоянии магнитного полярона [6,7]. Радиус локализации будет теперь зависеть от времени.

В [9,10] предложено еще одно упрощение, допустимое при восприимчивостях вблизи критической. Оказывается, что в этой области восприимчивостей $r_0$ мало меняется за характерное время отклика магнитной среды. Это позволило в пренебрежении флуктуациями получить дифференциальное уравнение для $r_0$. Так как $2DMP$ наблюдался экспериментально в области температур, при которых восприимчивость материала барьеров лежит вблизи критических величин для соответствующих $QW$ [3,4,6], модель позволила хорошо описать экспериментальные зависимости времени формирования $2DMP$ от параметров $QW$. В то же время в [9,10] не учтены тепловые флуктуации намагниченности в системе магнитных ионов. Эти флуктуации могут играть важную роль именно в критическом диапазоне восприимчивостей (здесь уместна аналогия с фазовым переходом II рода). Как будет показано, учет флуктуаций приводит к кинетическому уравнению диффузионного типа, которое позволяет найти эффективную плотность состояний $2DMP$ при малых энергиях и проанализировать возможные режимы формирования полярона.

## 1. Постановка задачи. Использованные приближения

Настоящая работа посвящена теоретическому описанию кинетики формирования свободных и квазисвободных $2DMP$ в критическом диапазоне восприимчивостей с учетом флуктуаций спиновой плотности в системе магнитных ионов. Для определенности будет рассматриваться модель, наиболее близкая к имеющемуся на сегодняшний день экспериментальному материалу по $2DMP$, образованному экситоном в $QW$ с полумагнитным барьером (обычно на основе соединений CdTe/(Cd,Mn)Te). Такой $2DMP$ возникает вследствие контактного обменного взаимодействия дырки, волновая функция которой проникает в полумагнитный барьер, с $2d$–электронами ионов $Mn^{2+}$ в барьере. Вклад электрона обычно пренебрежимо мал из-за малой величины обменной константы для зоны проводимости и слабого проникновения волновой функции в барьер в структурах CdTe/(Cd,Mn)Te. Важной чертой экспериментально исследованных структур, сохраненной в предлагаемой модели, является наличие сильного расщепления валентной зоны, вызванного деформацией кристалла и размерным квантованием дырок. В результате $2DMP$ образуется дыркой с проекцией спина на ось структуры $z$ $J_z = \pm 3/2$. Гамильтониан контактного обменного взаимодействия поэтому будет выглядеть как

$$\hat{H}_{ex} = -\sum_i \frac{1}{3}\beta J_z \hat{s}_{iz}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i), \tag{1}$$

где $\beta/3$ — обменная константа для валентной зоны, $s_{iz}$ — оператор $z$–проекции спина $i$–го магнитного иона, $\mathbf{r}_i$ — его радиус-вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор дырки.

Таким образом, расщепление валентной зоны, связанное с понижением симметрии в структурах с квантовыми ямами, позволяет не учитывать недиагональные элементы обменного гамильтониана, которые иначе могут давать значительный вклад в энергию МР [5]. Далее в настоящей работе повсеместно используется континуальное приближение для распределения магнитных ионов в барьере, дающее возможность заменить сумму в (1) на интеграл. Это приближение оправдано тем, что в реальных структурах при содержании марганца в барьере 20–25% внутрь боровской орбиты экситона попадают десятки (или даже сотни) ионов $Mn^{2+}$.

Наконец, самым важным из использованных приближений является адиабатическое (или приближение сильной связи). Это приближение в теории поляронов было предложено еще Пекаром [11]. Оно позволяет разделить переменные, описывающие экситон, и переменные, относящиеся к магнитным ионам. Волновая функция экситона при этом ищется как решение стационарного уравнения Шредингера в потенциале, созданном конфигурацией спинов магнитных ионов в данный момент времени. Условия применимости адиабатического приближения — значительное превышение энергией связи частицы в поляроне температуры и всех характерных частот в системе магнитных ионов. Эти условия для экспериментально наблюдаемых МР практически всегда выполняются. Область применимости теории будет дополнительно обсуждаться ниже.

## 2. Уравнение для волновой функции

Приступим теперь к выводу уравнения, описывающего изменение радиуса локализации экситона в $2DMP$ в процессе формирования полярона и в результате флуктуаций намагниченности в системе магнитных ионов. Пользуясь адиабатическим приближением, запишем уравнение Шредингера для экситона в $QW$ с полумагнитными барьерами. При этом будем считать, что энергии размерного квантования как электрона, так и дырки превосходят энергию их кулоновского взаимодействия и энергию связи образующегося полярона. Будем также считать радиус полярона $r_0$ много большим экситонного радиуса в плоскости $QW$. Волновую функцию экситона в этих условиях можно записать в виде $\varphi_h(z_h)\varphi_e(z_e)\Psi(\boldsymbol{\rho})\Psi_r(\boldsymbol{\rho}_e-\boldsymbol{\rho}_h)$, где функции $\varphi_h(z_h)$ и $\varphi_e(z_e)$ описывают движение вдоль оси $z$ дырки и электрона соответственно, $\Psi(\boldsymbol{\rho})$ и $\Psi_r(\boldsymbol{\rho}_e-\boldsymbol{\rho}_h)$ — волновые функции центра масс и относительного движения электрона и дырки в плоскости. Домножив полное двухчастичное уравнение Шредингера слева на $\varphi_h^*(z_h)\varphi_e^*(z_e)\Psi^*(\boldsymbol{\rho})\Psi_r^*(\boldsymbol{\rho}_e-\boldsymbol{\rho}_h)$ и проинтегрировав по $z$, $\rho_e$ и $\boldsymbol{\rho}_h$ при фиксированном значении $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектора центра масс в плоскости, получаем следующее усеченное уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\perp}\Delta_\rho\Psi(\boldsymbol{\rho})-\tilde{V}(\boldsymbol{\rho})\Psi(\boldsymbol{\rho})-\tilde{U}_{ex}(\boldsymbol{\rho},t)\Psi(\boldsymbol{\rho})=\tilde{E}\Psi(\boldsymbol{\rho}). \tag{2}$$

Здесь $\tilde{V}(\boldsymbol{\rho})$ — эффективный немагнитный потенциал, $\tilde{E}$ отсчитывается от дна зоны размерного квантования свободного экситона в $QW$, $\Delta_\rho=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ($x$ и $y$ — координаты центра масс), $m_\perp$ — эффективная масса экситона в плоскости. Обменный потенциал $\tilde{U}_{ex}$ легко получить из (1), используя континуальное приближение

$$\tilde{U}_{ex}(\boldsymbol{\rho},t)=\frac{1}{3}\beta J_z\int dz_h\left|\varphi_h(z_h)\right|^2 S_z(z_h,\boldsymbol{\rho},t), \tag{3}$$

где $S_z$ — $z$-проекция плотности спина магнитных ионов в окрестностях точки с координатами $z,\boldsymbol{\rho}$ в момент времени $t$.

Исследуя зависимость $\tilde{U}_{ex}$ от времени, полезно выделить вклад тепловых флуктуаций, записав

$$S_z(\boldsymbol{\rho},z_h,t)=\langle S_z(\boldsymbol{\rho},z_h,t)\rangle+\delta S_z(\boldsymbol{\rho},z_h,t), \tag{4}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, $\delta S_z$ — проекция на ось $z$ флуктуирующей части плотности спина.

Рассмотрим сначала первое слагаемое в (4). Оно определяется откликом магнитных ионов на воздействие со стороны внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$, которое может быть приложено к структуре, и взаимодействием с дыркой. В рамках адиабатического приближения можно рассматривать влияние дырки как результат действия эффективного поля

$$H_{ex}(\boldsymbol{\rho}, z_h) = \left(\frac{1}{3}\beta J_z \Big/ \mu_B g\right) |\varphi_h(z_h)|^2 \, |\Psi(\boldsymbol{\rho})|^2 , \tag{5}$$

где $\mu_B$ — магнетон Бора; $g$ — $g$–фактор магнитного иона; $\mathbf{H}_{ex}$ направлено вдоль оси $z$ и в отличие от внешнего поля, вообще говоря, зависит от времени.

Очевидно, в поляронный эффект вносит вклад не $\langle S_z \rangle$, а только ее изменение $\langle \Delta S_z \rangle$, индуцированное обменным полем. При больших $r_0$ значения $H_{ex}$ в каждой точке малы и можно записать $\langle \Delta S_z(\boldsymbol{\rho}, z_h, t) \rangle$ в линейном приближении

$$\langle \Delta S_z(\boldsymbol{\rho}, z, t) \rangle = \frac{1}{\mu_B g} \int d^2\boldsymbol{\rho}' \int dz' \int\limits_0^\infty d\tau G\left(\tau, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z, z'\right) H_{ex}\left(t-\tau, \boldsymbol{\rho}', z'\right), \tag{6}$$

где $G$ — некоторая функция отклика. Соответственно

$$\langle \Delta \tilde{U}_{ex}(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle = \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \times$$

$$\times \int d^2\boldsymbol{\rho}' \int dz' \int dz \int\limits_0^\infty d\tau G(\tau, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z, z') \, |\varphi_h(z)|^2 \, |\varphi(z')|^2 \, |\Psi(\boldsymbol{\rho}', t-\tau)|^2 . \tag{7}$$

Будем в дальнейшем считать все корреляционные длины в системе магнитных ионов много меньшими $r_0$. Тогда зависимость $G$ от $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}'$ можно аппроксимировать $\delta$–функцией от их разности $G(\tau, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z, z') = G'(\tau, z, z', )\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$, соответственно упростив (7)

$$\langle \Delta \tilde{U}_{ex}(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle = \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \frac{1}{\zeta} \int\limits_0^\infty d\tau \tilde{G}(\tau) \, |\Psi(\boldsymbol{\rho}, t-\tau)|^2 , \tag{8}$$

где

$$\tilde{G}(\tau) = 2\zeta \int\limits_{L_z/2}^\infty dz' \int\limits_{L_z/2}^\infty dz G'(\tau, z, z') \, |\varphi_h(z)|^2 \, |\varphi(z')|^2 ,$$

$$\zeta = \left(2 \int\limits_{L_z/2}^\infty dz \, |\varphi_h(z)|^4 \right)^{-1} ,$$

$L_z$ — ширина квантовой ямы ($z = 0$ соответствует середине $QW$).

Исследование временно́й зависимости обменного потенциала существенно упрощается, если выделить в $\langle \Delta\tilde{U}_{ex}(\boldsymbol{\rho}, t)\rangle$ равновесную часть и переписать (8) как

$$\langle \Delta\tilde{U}_{ex}(\boldsymbol{\rho}, t)\rangle = \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \frac{1}{\zeta}\left[\int\limits_0^\infty d\tau \tilde{G}(\tau)\,|\Psi(\boldsymbol{\rho}, t)|^2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty d\tau \tilde{G}(\tau)\left(|\Psi(\boldsymbol{\rho}, t-\tau)|^2 - |\Psi(\boldsymbol{\rho}, t)|^2\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \frac{1}{\zeta}\left[\tilde{\chi}\,|\Psi(\boldsymbol{\rho}, t)|^2 + \int\limits_0^\infty f(t-\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau\right], \qquad (9)$$

где $\tilde{\chi} = \int\limits_0^\infty \tilde{G}(\tau)d\tau$ — эффективная статическая восприимчивость, $f(t-\tau) = |\Psi(\boldsymbol{\rho}, t-\tau)|^2 - |\Psi(\boldsymbol{\rho}, t)|^2$. Очевидно, функция $f$ должна удовлетворять следующим условиям

$$\int d^2\boldsymbol{\rho} f(\boldsymbol{\rho}, t-\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to 0}(\boldsymbol{\rho}, t-\tau) = 0.$$

Формально функции $f$ и $\Psi$ связаны друг с другом только через уравнение (2). Перепишем его в новых обозначениях

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\perp}\Delta_\rho\Psi(\boldsymbol{\rho}, t) - \tilde{V}(\boldsymbol{\rho})\Psi(\boldsymbol{\rho}, t) - \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \frac{1}{\xi}\left[\tilde{\chi}\,|\Psi(\boldsymbol{\rho}, t)|^2 + \int\limits_0^\infty f(t-\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau\right] \times$$

$$\times\Psi(\boldsymbol{\rho}, t) + \delta U_{ex}(\boldsymbol{\rho}, t)\Psi(\boldsymbol{\rho}, t) = \tilde{E}\Psi(\boldsymbol{\rho}, t). \qquad (10)$$

Принцип дальнейшего решения задачи состоит в том, чтобы разрешить уравнение (10) относительно $\Psi$ и, таким образом, сделать связь между $f$ и $\Psi$ явной.

## 3. Вариационный функционал

Так как для нелинейного уравнения (10) не найдено аналитического решения, воспользуемся вариационным методом. Для этого найдем функционал, для которого требование обращения в нуль первой вариации по $\Psi$ или $\Psi^*$ эквивалентно уравнению (10). (Напомним, что $\Psi$ и $f$ формально независимы). Легко убедиться, что этому условию удовлетворяет следующий функционал:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \qquad (11)$$

где

$$\Phi_0 = \int d^2\boldsymbol{\rho} \left[ \frac{\hbar^2}{2m_\perp} \left(\nabla_\rho \Psi(t)\right)^2 - \tilde{V}\,|\Psi(t)|^2 - \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \frac{1}{2} \tilde{\chi}\,|\Psi(t)|^4 \right], \qquad (12)$$

$$\Phi_1 = \int d^2\boldsymbol{\rho} \left[ -\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\,|\Psi(t)| \int\limits_0^\infty f(t-\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau \right], \qquad (13)$$

$$\Phi_2 \int d^2\boldsymbol{\rho} \left[ \delta\tilde{U}_{ex}(\rho,t)\,|\Psi(t)|^2 \right] \qquad (14)$$

Поскольку уравнение (10) нелинейно, $\Phi$ не совпадает с энергией полярона. $\Phi_0$ не содержит $f$ и не зависит явно от времени. Вариация $\Phi_0$ дает уравнение для стационарного состояния $2DMP$. Легко показать, что $\Phi_0$ совпадает со свободной энергией системы «экситон + магнитные ионы» (см. [5]); $\Phi_1$ отражает запаздывание обменного потенциала при изменении волновой функции и $\Phi_2$ — флуктуации обменного потенциала.

## 4. Стохастическое уравнение

Минимизация функционала $\Phi$ на подходящем классе пробных функций дает возможность получить уравнения для различных характеристик полярона. В задачу настоящей работы входит исследование временны́х зависимостей радиуса локализации $r_0$ и связанной с ним энергии связи частицы (экситона) в поляроне (в дальнейшем будем называть эту величину просто энергией $2DMP$). Поэтому будет использовано однопараметрическое семейство пробных функций. В качестве вариационного параметра можно взять любую величину, монотонно зависящую от $r_0$. Выберем пробную функцию в виде

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}) = \xi \Psi_0(\rho_0), \qquad \rho_0 = \xi|\boldsymbol{\rho}|, \qquad (15)$$

$\xi$, очевидно, имеет смысл обратного радиуса локализации. Выбор такого вариационного параметра не случаен: как будет видно из дальнейшего, кинетическое уравнение для функции распределения $2DMP$ по $\xi$ имеет наиболее простой вид.

Условие экстремума $\partial\Phi/\partial\xi = 0$ или

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \qquad (16)$$

является основой для получения уравнения для $\xi$.

С помощью несложных преобразований выразим $\partial\Phi_1/\partial\xi$ через $\xi$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\int d^2\boldsymbol{\rho} \left[ \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \frac{\partial |\Psi(t)|^2}{\partial \xi} \int\limits_0^\infty f(\rho, t-\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau \right] \approx$$

$$\approx -\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \int d^2\boldsymbol{\rho} \left(\frac{\partial |\Psi(t)|^2}{\partial \xi}\right)^2 \int\limits_0^\infty \left(\xi(t-\tau) - \xi(t)\right) \tilde{G}(\tau)d\tau =$$

$$= -\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma \int\limits_0^\infty \left(\xi(t-\tau)-\xi(t)\right)\tilde{G}(\tau)d\tau, \tag{17}$$

где

$$\Gamma = \int\limits_0^\infty 2\pi\rho_0 d\rho_0 \left(2\Psi_0^2(\rho_0)+\rho_0\frac{\partial\Psi_0^2(\rho_0)}{\partial\rho_0}\right)^2 .$$

При выводе (17) впервые использовано предположение о малом изменении $\xi$ за время отклика магнитной среды, позволяющее выразить $f$ через приращение $\xi$ в линейном приближении. Несмотря на то что при $|\rho| \gg \xi^{-1}$ $|\Psi(\rho)|^2$ за время отклика может меняться на величину порядка самой себя, приближение $\Delta\left(|\Psi(\rho)|^2\right) = \frac{\partial|\Psi(\rho)|^2}{\partial\xi}\Delta\xi$ под знаком интеграла в (17) допустимо, так как в интеграл вносят основной вклад радиусы порядка или меньше $\xi^{-1}$.

В дальнейшем нас будет интересовать поведение $2DMP$ на масштабе времен, намного превосходящих время отклика среды. Взяв интеграл от (17) по промежутку времени, удовлетворяющему этому условию, получим

$$-\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma \int\limits_{t-\Delta t}^{t} dt' \int\limits_0^\infty \left(\xi(t'-\tau)-\xi(t)\right)\tilde{G}(\tau)d\tau =$$

$$= \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma \int\limits_{t-\Delta t}^{t} dt' \int\limits_0^\infty \tilde{G}(\tau)d\tau \int\limits_0^\infty \dot{\xi}(t'')dt'' \approx$$

$$\approx \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma \int\limits_0^\infty \tilde{G}(\tau)d\tau \int\limits_0^\infty \dot{\xi}(t')dt' =$$

$$= \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi} \int\limits_0^\infty \left(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\right), \tag{18}$$

где $\tau_r \equiv \tilde{\chi}^{-1}\int\limits_0^\infty \tilde{G}(\tau)d\tau$ — время отклика.

Теперь легко получить из (18) следующее уравнение для $\xi$:

$$\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\frac{\Delta\xi}{\Delta t} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi} - \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}(t')dt', \tag{19}$$

(19) — стохастическое уравнение типа уравнения Ланжевена, описывающее изменение $\xi$ под действием «потенциальной силы» $\partial\Phi_0/\partial\xi$, «случайной силы» $\partial\Phi_2/\partial\xi$ и «силы трения» $(\beta J_z/3\mu_B g)^2\zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\dot{\xi}$, справедливое на мелкомасштабной временно́й шкале ($\Delta t \gg \tau_r$).

В пренебрежении флуктуациями (19) сводится к детерминистическому дифференциальному уравнению, эквивалентному полученному в [10].

Если же флуктуациями пренебречь нельзя, $\xi(t)$ представляет из себя случайный процесс. Чтобы найти зависящую от времени функцию распределения этого процесса, воспользуемся стандартным переходом от уравнения Ланжевена к уравнению Фоккера–Планка (см., например, [12]). Для этого найдем линейные по $\Delta t$ части среднего и среднего квадрата приращения $\xi$ за время $\Delta t$. Очевидно,

$$\langle\Delta\xi\rangle = -\left[\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\Delta t + O(\Delta t^2). \qquad (20)$$

Чтобы найти

$$\langle(\Delta\xi)^2\rangle = \left[\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\right]^{-2}\left\langle\left(\int\limits_{t-\Delta t}^{t}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}(t')dt'\right)^2\right\rangle + O(\Delta t^2), \qquad (21)$$

применим флуктуационно-диссипативную теорему (ФДТ) [13], согласно которой спектральную плотность флуктуаций намагниченности можно выразить через мнимую часть обобщенной восприимчивости (которая в свою очередь связана с функцией отклика $\tilde{G}(\tau)$ синус-преобразованием Фурье) и температуру. После несложных, но громоздких выкладок, которые приведены в Приложении, получаем

$$\langle(\Delta\xi)^2\rangle = 2\left[\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\right]^{-1} T\Delta t + O(\Delta t^2), \qquad (22)$$

где $T$ — температура в энергетических единицах.

Удачный выбор переменной $\xi$ обеспечивает независимость $\langle(\Delta\xi)^2\rangle$ от текущего значения $\xi$. При этом функция распределения $2DMP$ $p(\xi)$ удовлетворяет квазилинейному уравнению Фоккера–Планка [12]

$$\dot{p}(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\mu\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}p(\xi) + D\frac{\partial p(\xi)}{\partial\xi}\right] \qquad (23)$$

с подвижностью

$$\mu = \frac{\langle\Delta\xi\rangle}{\Delta t} = \left[\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\right]^{-1}$$

и коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2}\frac{\langle(\Delta\xi)^2\rangle}{\Delta t} = T\left[\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tau_r\tilde{\chi}\right]^{-1},$$

которые удовлетворяют соотношению Эйнштейна $D = T\mu$.

Для свободного $2DMP$ легко получить явный вид $\partial\Phi_0/\partial\xi$, подставив пробную функцию (15) в (12) при условии $\tilde{V}(\rho) \equiv 0$

$$\Phi_0 = \frac{\hbar^2}{2m_\perp}k\xi^2 - \frac{1}{2}\tilde{\chi}\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\eta\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m_\perp}k\left(1 - \frac{\tilde{\chi}}{\chi_c}\right)\xi^2 \qquad (24)$$

и

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi} = 2\frac{\hbar^2}{2m_\perp}k\left(1 - \frac{\tilde{\chi}}{\chi_c}\right)\xi, \qquad (25)$$

где

$$\chi_c \equiv 2\frac{\hbar^2}{2m_\perp}\,\frac{k\zeta}{\eta}\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^{-2}$$

— критическая восприимчивость (см. [5]),

$$k = \int\limits_0^\infty 2\pi\rho_0 d\rho_0\left(\frac{\Psi_0(\rho_0)}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi_0(\rho_0)}{\partial\rho_0}\right)\right),$$

$$\eta = \int\limits_0^\infty 2\pi\rho_0 d\rho_0 \Psi_0^4(\rho_0)$$

— форм-факторы.

Как видно из (25), при $\tilde{\chi} > \chi_c$ «сила» $\partial\Phi_0/\partial\xi$ положительна и стремится увеличить $\xi$, а при $\tilde{\chi} < \chi_c$ отрицательна и толкает полярон в сторону делокализованного состояния $\xi = 0$.

## 5. Условия применимости теории

Вывод уравнений (19) и (23) основан на предположении о малости относительного изменения $\xi$ за время $\tau_r$. Используя формулы (20) и (22) для среднего и среднего квадрата приращения $\xi$, легко найти диапазон параметров структуры, где это предположение выполняется и теория является самосогласованной.

Условие $\langle(\Delta\xi)^2\rangle_{\tau_r}/\xi^2 \ll 1$, согласно (22), эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1}\Gamma\tilde{\chi}\xi^2 \gg T. \qquad (26)$$

Левая часть (26) совпадает с обменной частью свободной энергии $2DMP$ (см. (24)), которая по абсолютной величине одного порядка с его полной энергией ([6], см. также ниже формулу (30)). Это означает, что (26) практически совпадает с условием применимости адиабатического приближения $E \gg T$.

Требование $|\langle(\Delta\xi)\rangle_{\tau_r}|/\xi \ll 1$ более жесткое. С помощью (20) и (25) его легко преобразовать к следующему виду:

$$\eta\Gamma^{-1}\left(1 - \chi_c\,/\,\tilde{\chi}\right). \qquad (27)$$

Условие (27), очевидно, выполняется при $\tilde{\chi} \approx \chi_c$.

Таким образом, изложенная теория, описывающая релаксацию энергии и радиуса локализации $2DMP$ как квазиравновесный диффузионно-дрейфовый процесс, справедлива в диапазоне эффективных магнитных восприимчивостей, близких к критической величине.

## 6. Энергия $2DMP$

Прежде чем перейти к анализу решений уравнения (23), выясним вопрос о связи параметра $\xi$ с энергией полярона. Дело в том, что экспериментально $2DMP$ исследуется по спектрам фотолюминесценции. Поскольку оптические переходы происходят адиабатически быстро, сдвиг энергии фотона люминесценции относительно линии свободного экситона равен собственному значению энергии, задаваемому уравнением Шредингера (2) или (10). В рамках вариационного подхода будем искать эту величину как среднее значение гамильтониана в левой части (10) с волновой функцией вида (15), где $\xi$ является решением уравнения (19).

В области применимости адиабатического приближения, где выполняется условие $E \gg T$, очевидно, можно пренебречь флуктуациями энергии при фиксированном $\xi$, достаточно найти усредненную по ансамблю спиновых конфигураций величину энергии

$$\langle E\rangle = E_0 + \int d^2\rho \left[ -\left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \int\limits_0^\infty \left(\langle \xi(t-\tau)\rangle - \xi(t)\right) \tilde{G}(\tau) d\tau \frac{\partial |\Psi(t)|^2}{\partial \xi} \, |\Psi(t)|^2 \right], \tag{28}$$

где

$$E_0 = \int d^2\rho \left[ \frac{\hbar^2}{2m_\perp} \left(\nabla_\rho \Psi(t)\right)^2 - \tilde{V} \, |\Psi(t)|^2 - \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \tilde{\chi} \, |\Psi(t)|^4 \right]$$

— равновесная часть энергии.

Поскольку $\langle \xi \rangle$ меняется со временем плавно, можно представить $\langle \xi(t-\tau)\rangle - \xi(t)$ как $-\tau\dot{\xi}(t)$. Соответственно в уравнении (19), произведя усреднение, можно перейти к пределу $\Delta t \to 0$ и получить явное выражение для $\dot{\xi}(t)$. По выполнении этих преобразований и подстановок (28) приобретает следующий вид:

$$\langle E\rangle = E_0 - \frac{\eta}{\Gamma} \xi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}. \tag{29}$$

Для свободного полярона ($V(\rho) \equiv 0$)

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m_\perp} k\xi^2 - \tilde{\chi} \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \eta \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m_\perp} k \left(1 - 2\frac{\tilde{\chi}}{\chi_c}\right) \xi^2 \tag{30}$$

(см. пояснения к формулам (24) и (25)),

$$a\xi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} = 2\frac{\hbar^2}{2m_\perp} k \left(1 - \frac{\tilde{\chi}}{\chi_c}\right) \xi^2. \tag{31}$$

Как отмечалось выше, область применимости теории определяется условием $\tilde{\chi} \approx \chi_c$.

Таким образом, для свободного полярона среднее значение энергии при заданном $\xi$ пропорционально $\xi^2$ и отличается от равновесного значения энергии на величину, малую по параметру $|1 - \tilde{\chi}/\chi_c|$. Исходя из этого, можно использовать (30) как приближенное выражение для энергии $2DMP$ при заданном $\xi$.

## 7. Равновесная функция распределения и эффективная плотность состояний

Правая часть диффузионного уравнения (23) представляет собой производную от потока вероятности по оси $\xi$.

Из условия обращения этого потока в нуль при термодинамическом равновесии легко получить равновесную функцию распределения $2DMP$ по $\xi$

$$p(\xi) = \text{const} \cdot \exp\left(-\Phi_0(\xi) \,/\, T\right). \tag{32}$$

Экспоненту в (32) легко получить из термодинамических соображений, если вспомнить, что $\Phi_0(\xi)$ — свободная энергия системы «экситон + магнитные ионы» при данном значении $\xi$. Действительно,

$$p(\xi) = p_0(\xi) \sum_n \exp(-E_n/T) = p_0(\xi) \exp\left(-\Phi_0(\xi) \,/\, T\right), \tag{33}$$

где $n$ нумерует состояния спиновой системы, $E_n$ — соответствующие им энергии, $p_0(\xi)$ — плотность состояний с данным $\xi$. Из сопоставления (32) и (33) следует, что $p_0(\xi) = \text{const}$.

При переходе от $\xi$ к другим переменным $p_0$, вообще говоря, перестает быть постоянной. В частности, функция распределения свободного $2DMP$ по энергии имеет следующий вид:

$$p(E) = p(\xi) \cdot \partial\xi/\partial E \propto E^{-1/2} \exp\left(-\Phi_0(E) \,/\, T\right) \tag{34}$$

(см. предыдущий раздел).

Таким образом, функция распределения $2DMP$ по энергии содержит эффективную плотность состояний, которая при малых энергиях (больших радиусах локализации) пропорциональна $E^{-1/2}$. Особенность в (34) при $E \to 0$ является интегрируемой. Кроме того, формула (34) неприменима при $E \sim T$, когда несправедливо адиабатическое приближение.

Основываясь на (34), приближенном выражении для энергии (30) и свободной энергии $\Phi_0$ (24), проанализируем вид $p(E)$ при различных эффективных восприимчивостях $\tilde{\chi}$. Можно выделить три области значений $\tilde{\chi}$, в которых поведение свободного $2DMP$ качественно различно.

1) $\tilde{\chi} > \chi_c$. Здесь $p(E)$ имеет два пика: один вблизи $E = 0$, обусловленный множителем $E^{-1/2}$, и второй вблизи стационарного состояния полярона, где $\partial\Phi_0/\partial E = 0$.

2) $\chi_c/2 < \tilde{\chi} < \chi_c$. В этом диапазоне восприимчивостей стационарное состояние $2DMP$ делокализовано, но энергия при $\xi > 0$ отрицательна. Поэтому полярон может образовываться термоактивационным путем.

Функция распределения будет иметь вид экспоненциального хвоста

$$p(E) \propto E^{-1/2} \exp\left(-|E| \,/\, E_1\right), \tag{35}$$

где $E_1 = T(2\tilde{\chi} - \chi_c) \,/\, (\chi_c - \tilde{\chi})$.

3) $\tilde{\chi} < \chi_c/2$. Энергия при $\xi > 0$ положительна, свободный полярон не существует.

## 8. Формирование свободного полярона

В соответствии с (25) «сила» $\partial\Phi_0/\partial\xi$ для свободного полярона пропорциональна $\xi$. Поэтому в этом случае кинетическое уравнение (23) имеет простое аналитическое решение (см., например, [12]). Воспользовавшись этим, проанализируем начальные стадии формирования стационарной функции распределения свободных $2DMP$, образованных экситонами, возбужденными в момент времени $t = 0$, например коротким световым импульсом. При этом учтем, что возбуждение может проходить как в состояния свободных экситонов, так и в хвост плотности состояний, образованный флуктуациями намагниченности. В последнем случае энергия связи экситона на флуктуациях в момент рождения $E_0$ задается частотой возбуждающего света. Если выполнено условие $E_0 \gg T$, экситон попадает сразу в одно из неравновесных поляронных состояний. Для таких состояний, как указывалось выше, можно приближенно считать энергию однозначно связанной с величиной $\xi$. Соответственно начальное условие для кинетического уравнения можно записать как

$$p(\xi, t = 0) = \delta(\xi - \xi_\rho), \tag{36}$$

где

$$\xi_0 = E_0^{1/2} \left[\frac{\hbar^2}{2m_\perp} k \left(1 - 2\frac{\tilde{\chi}}{\chi_c}\right)\right]^{-1/2} \approx \left[|E_0| \Big/ \left(\frac{\hbar^2}{2m_\perp} k\right)\right]^{1/2}. \tag{37}$$

Задавшись также граничным условием $(\partial p/\partial\xi)|_{\xi=0} = 0$, получим из решения (23) неравновесную функцию распределения $2DMP$

$$p(\xi, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma(t)} \left[\exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0 e^{t/t_0})}{\sigma^2(t)}\right)^2 + \exp\left(-\frac{(\xi + \xi_0 e^{t/t_0})}{\sigma^2(t)}\right)^2\right] \tag{38}$$

где

$$\sigma^2(t) = T \left[\frac{\hbar^2}{2m_\perp} k \left(\frac{\tilde{\chi}}{\chi_c} - 1\right)\right]^{-1} \left(e^{2t/t_0} - 1\right), \tag{39}$$

$$t_0 = \left(\frac{\beta J_z}{3\mu_B g}\right)^2 \zeta^{-1} \Gamma \tau_r \tilde{\chi} \left[2\frac{\hbar^2}{2m_\perp} k \left(\frac{\tilde{\chi}}{\chi_c} - 1\right)\right]^{-1} = \Gamma \eta^{-1} \left(1 - \chi_c \Big/ \tilde{\chi}\right)^{-1} \tau_r. \tag{40}$$

Несложный анализ показывает, что при $\tilde{\chi} > \chi_c$ в зависимости от величины $\xi_0$ развитие $p(\xi, t)$ во времени может идти двумя путями. При малых $\xi_0$ уширение функции распределения обгоняет ее дрейф в сторону больших $\xi$. В результате через некоторое время после рождения полярона максимум $p(\xi, t)$ перемещается в точку $\xi = 0$. В дальнейшем пик $p(\xi, t)$

вблизи $\xi = 0$ расширяется и «оседает», и постепенно вырастает второй пик вблизи минимума $\Phi_0(\xi)$, отвечающего стационарному состоянию полярона. Такой вариант формирования $2DMP$ назовем диффузионным.

При больших $\xi_0$ дрейф пересиливает диффузионное уширение и пик функции распределения из точки $\xi = \xi_0$ смещается вправо, достигая постепенно равновесного положения в точке минимума $\Phi_0(\xi)$. Этот путь естественно назвать дрейфовым.

Из (38) легко получить граничную величину $\xi_0 = \xi_c$, разделяющую области диффузионного и дрейфового формирования $2DMP$

$$\xi_c = T^{1/2}\left[\frac{\hbar^2}{2m_\perp}k\left(\frac{\tilde{\chi}}{\chi_c} - 1\right)\right]^{-1/2}, \tag{41}$$

а с учетом (37) найти величину граничной энергии

$$E_c = -T\left(2\tilde{\chi} - \chi_c\right) \Big/ \left(\tilde{\chi} - \chi_c\right). \tag{42}$$

Очевидно, «магнитополяронный хвост» при $\tilde{\chi} < \chi_c$ формируется всегда диффузионным путем.

Можно ожидать также перехода от диффузии к дрейфу с ростом энергии начальной локализации при формировании $2DMP$, предварительно локализованного на немагнитной неоднородности потенциала (например, «островке» ширины квантовой ямы).

Однако детальный анализ этого важного, с точки зрения интерпретации экспериментов случая, требует знания формы немагнитного потенциала. В настоящей работе, посвященной рассмотрению основных качественных особенностей кинетики формирования двумерных магнитных поляронов, такой анализ не приводится.

Приведем теперь краткую сводку полученных результатов.

1. В области восприимчивостей вблизи критической величины функция распределения $2DMP$ по энергии может иметь ширину, намного превосходящую температуру, но обусловленную тем не менее тепловыми флуктуациями намагниченности.

2. Существует диапазон восприимчивостей ниже критической восприимчивости $\chi_c$, где полярон может существовать за счет тепловой активации. Функция распределения при этом имеет вид экспоненциального хвоста. Этот диапазон ограничен снизу второй критической восприимчивостью, равной $\chi_c/2$.

3. Равновесная функция распределения $2DMP$ по энергии имеет вид $p_0(E) \cdot \exp(-\Phi_0/T)$, где $-\Phi_0$ — свободная энергия, а $p_0(E)$ — эффективная плотность состояний $2DMP$, которая при малых энергиях $E$ пропорциональна $E^{-1/2}$.

4. Формирование $2DMP$ в критическом диапазоне восприимчивостей происходит через непрерывный ряд квазиравновесных состояний. В зависимости от начальной энергии переход к равновесной функции распределения осуществляется либо дрейфовым, либо диффузионным путем. В последнем случае не наблюдается смещения максимума распределения со временем в сторону больших энергий.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность И.А.Меркулову и Г.Е.Пикусу за полезные замечания и особенно А.В.Кавокину за многократные плодотворные обсуждения.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Вычисление $\langle(\Delta\xi)^2\rangle$

$$\left\langle\left(\int\limits_{t-\Delta t}^{t}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}(t')dt'\right)^2\right\rangle=\left\langle\left(\int\limits_{t-\Delta t}^{t}dt'\int d^2\rho\frac{\partial|\Psi(\rho,t)|^2}{\partial\xi}\delta\tilde{U}_{ex}(\rho,t')\right)\right\rangle^2=$$

$$=\int\limits_{t-\Delta t}^{t}dt_1\int\limits_{t-\Delta t}^{t}dt_2\int d^2\rho_1\int d^2\rho_2\frac{\partial|\Psi(\rho_1,t_1)|^2}{\partial\xi}\frac{\partial|\Psi(\rho_2,t_2)|^2}{\partial\xi}\times$$

$$\times\left\langle\delta\tilde{U}_{ex}(\rho_1,t_1)\delta\tilde{U}_{ex}(\rho_2,t_2)\right\rangle. \quad (\text{П}.1)$$

Из флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) [13] следует, что спектральная плотность $\delta\tilde{U}_{ex}$ определяется откликом $\tilde{U}_{ex}$ на слабое внешнее воздействие, который мы условились считать локальным (см.(8)). Исходя из этого, преобразуем коррелятор в (П.1) следующим образом:

$$\left\langle\delta\tilde{U}_{ex}(\rho_1,t_1)\delta\tilde{U}_{ex}(\rho_2,t_2)\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}\left\langle\delta\tilde{U}^2_{ex}(\rho,t_1)\right\rangle_\omega d\omega\delta(\rho_1-\rho_2),\quad(t\equiv t_2-t_1). \quad (\text{П}.2)$$

В соответствии с ФДТ

$$\left\langle\delta\tilde{U}^2_{ex}(\rho,t_1)\right\rangle_\omega=2\hbar\alpha''_\omega(\rho,t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}\right). \quad (\text{П}.3)$$

Здесь мнимую часть обобщенной восприимчивости можно, используя (8), выразить через функцию отклика $\tilde{G}(\tau)$

$$\alpha''_\omega(\rho_1,t)=\left(\frac{1}{3}\frac{\beta J_z}{\mu_B g}\right)^2\zeta^{-1}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^\infty\tilde{G}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau=\left(\frac{1}{3}\frac{\beta J_z}{\mu_B g}\right)^2\zeta^{-1}\frac{1}{2i}\int\limits_0^\infty G_0(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau, \quad (\text{П}.4)$$

$G_0(\tau)=\tilde{G}(\tau)$ при $\tau>0$ и $G_0(\tau)=-\tilde{G}(-\tau)$ при $\tau<0$. Подставляя (П.2)–(П.4) в (П.1) и интегрируя по $\rho_2$, получаем

$$\left\langle\left(\int\limits_{t-\Delta t}^{t}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}(t')dt'\right)^2\right\rangle=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\frac{\beta J_z}{\mu_B g}\right)^2\zeta^{-1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t}dt_1\int\limits_{-\Delta t}^{+\Delta t}d\tau\int d^2\rho_1\frac{\partial|\Psi(\rho,t_1)|^2}{\partial\xi}\frac{\partial|\Psi(\rho,t_1)|^2}{\partial\xi}Y(\tau), \quad (\text{П}.5)$$

где

$$Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{\hbar}{i} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) \int\limits_{0}^{\infty} G_0(\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau' d\omega. \qquad (\text{П}.6)$$

Учитывая, что изменение $\xi$ за время $\Delta t$ мало, можно упростить (П.5)

$$\left\langle \left( \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}(t') dt' \right)^2 \right\rangle \approx \left( \frac{1}{3} \frac{\beta J_z}{\mu_B g} \right)^2 \zeta^{-1} \Gamma \Delta t \int\limits_{-\Delta t}^{+\Delta t} Y(\tau) d\tau. \qquad (\text{П}.7)$$

Чтобы взять временно́й интеграл, разложим выражение в круглых скобках в (П.6) в степенно́й ряд вблизи $\omega = 0$

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) = \frac{T}{\hbar\omega} - \frac{1}{6} \frac{\hbar\omega}{T} - \frac{1}{24} \left( \frac{\hbar\omega}{T} \right)^2 - \dots . \qquad (\text{П}.8)$$

Интегрируя по частям, легко убедиться, что вклад от членов первой и более высоких степеней по $\omega$ обращается в нуль, если $\tilde{G}(\tau)$, и ее производные становятся пренебрежимо малыми при $\tau \sim \Delta t$. Для этого, кроме условия $\Delta t \gg \tau_r$, необходимо, чтобы $\tilde{G}(\tau)$ спадала при больших $\tau$ по крайней мере экспоненциально. Надо отметить, что реально это дополнительное условие, как правило, выполняется.

Таким образом, вычисление (П.7) сводится к взятию интеграла от первого слагаемого в (П.8), что легко выполняется интегрированием по частям с учетом условия $\Delta t \gg \tau_r$

$$T \int\limits_{-\Delta t}^{+\Delta t} d\tau \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{1}{i\omega} \int\limits_{0}^{\infty} G_0(\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau' d\omega =$$

$$= T \int\limits_{-\Delta t}^{+\Delta t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\tau} G_0(\tau') d\tau' = T \int\limits_{-\Delta t}^{+\Delta t} \tau G_0(\tau) d\tau \approx 2T \int\limits_{0}^{\infty} \tau \tilde{G}(\tau) d\tau = 2T\tilde{\chi}\tau_r. \qquad (\text{П}.9)$$

Подставляя (П.9) в (П.7), получаем

$$\left\langle \left( \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}(t') dt' \right)^2 \right\rangle = 2 \left( \frac{\beta J_z}{3\mu_B g} \right)^2 \zeta^{-1} \Gamma T \tau_1 \Delta t \qquad (\text{П}.10)$$

и с учетом (21) окончательное выражение для $\langle (\Delta\xi)^2 \rangle$ (22).

## Список литературы


[1] Wolff P.A. // Semiconductors and Semimetals. V. 25 / Ed. J.K. Furdyna and J. Kossut. Acad. Press, London, 1988. P. 413.

[2] Golnik A., Ginter J., Gaj J.A. // J. Phys. C. 1983. V. 16. P. 6073–6084.

[3] Yakovlev D.R. // Festkorperprobleme. Advances in Solid State Physics 32 / Ed. U.Rossler. Vieweg, Braunschweig, 1992. P. 251.

[4] Yakovlev D.R., Ossau W., Landwehr G., Bicknell-Tassius R.N., Waag A., Schmeusser S., Uraltsev I.N. // Solid State Comm. 1992. V. 82. P. 29.

[5] Рябченко С.М., Семенов Ю.Г. // ФТТ. 1984. Т. 26. № 10. С. 3347–3352.

[6] Кавокин А.В., Кавокин К.В. // ФТП. 1991. Т. 25. С. 1751–1757.

[7] Кривоглаз М.А. // УФН. 1973. Т. 111. С. 617–654.

[8] Нагаев Э.Л. Физика магнитных полупроводников. М.: Наука, 1979. 432 с.

[9] Yakovlev D.R., Ossau W., Landwehr G., Bicknell-Tassius R.N., Waag A., Kavokin K.V., Kavokin A.V., Uraltsev I.N., Pohlmann A. // Proc. 21 Int. Conf. Phys. Semicond. Bejing, China, 1992.

[10] Kavokin K.V., Kavokin A.V., Uraltsev I.N., Yakovlev D.R., Ossau W., Landwehr G., Pohlmann A. // SPIE Proc. V. 1675. Quantum Well and Superlatt. Physics IV / Ed. G.Doehler, E.Koteles. New Jersey, USA, 1992.

[11] Пекар С.И. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 341–348.

[12] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. 376 с.

[13] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Статистическая физика. Ч. I. М.: Наука, 1976. 584 с.



Физико-технический институт
им.А.Ф.Иоффе РАН
Санкт-Петербург



Поступило в Редакцию
27 января 1993 г.