01

О силах, действующих на заряженную частицу в переменном электрическом поле

© С.А. Солунин, А.М. Солунин, М.А. Солунин

Ивановский государственный энергетический университет
E-mail: solunin@yandex.ru

Поступило в Редакцию 30 декабря 2008 г.

Дается обобщение известного выражения для силы, действующей на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле, для случая движения частицы в среде с линейной по скорости силой трения. Рассматриваются высокочастотный и низкочастотный пределы этого обобщения. Обсуждаются возможные применения полученных результатов.

PACS: 41.20.-q

Известно [1], что на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin \omega t$ действует сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \nabla E^2(\mathbf{r}), \tag{1}$$

именуемая силой Гапонова–Миллера [2] или силой Миллера [3]. С нею связан ряд нелинейных эффектов в физике плазмы, где она называется силой высокочастотного давления [4].

Обобщение силы (1) на случай движения частицы в среде с линейной по скорости силой трения ($\mathbf{F}_{fr} = -m\nu\mathbf{v}$) проведено в [5] и имеет вид

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{2m(\omega^2 + \nu^2)} (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}. \tag{2}$$

Особенностью этого выражения для силы является то, что оно имеет низкочастотный ($\omega/\nu \to 0$) предел. Именно он использован в [5] для качественного объяснения существенного увеличения пробивного напряжения в высоковольтных аппаратах промышленной частоты.

Опираясь на метод, используемый в [5], покажем, что возможно дальнейшее обобщение выражения (2).

1. Уравнения движения частицы в электромагнитном поле с линейной по скорости силой трения имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q\,\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \times \mathbf{B}. \tag{3}$$

Если электрическое поле меняется по закону

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\sin(\omega t + \varphi), \tag{4}$$

то из уравнения поля

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

следует, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

а амплитуды полей связаны соотношением

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \tag{7}$$

Будем считать, что за период осцилляций частица проходит расстояния, в пределах которых амплитуда полей меняется незначительно. Тогда, раскладывая их в ряд, можно ограничиться первым приближением:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{E}(0), \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(0) + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{B}(0). \tag{8}$$

Подставляя это разложение полей в уравнение движения, получим с учетом (7) уравнение движения в первом приближении

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0\sin(\omega t + \varphi) + q(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{E}_0\sin(\omega t + \varphi)$$
$$+ \frac{q}{\omega}\,\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{F}_0)\cos(\omega t + \varphi). \tag{9}$$

Это уравнение в отличие от (3) является линейным и его можно решать методом последовательных приближений. Отбрасывая в нем два последних члена, получим уравнение движения в нулевом приближении

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0\sin(\omega t + \varphi). \tag{10}$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\sin(\omega t+\varphi+\varphi_0),$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\cos(\omega t+\varphi+\varphi_0), \tag{11}$$

где $\operatorname{tg}\varphi_0 = \nu/\omega$. Подставляя это решение в правую часть уравнения (9) и усредняя ее по периоду, получим с учетом тождества

$$\frac{1}{2}\nabla E^2 = (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E}) \tag{12}$$

уравнения движения вида (значок „0“, характеризующий начало разложения, теперь можно отбросить)

$$m\dot{\mathbf{v}} + m\nu\mathbf{v} = \mathbf{F}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}\nabla E^2. \tag{14}$$

Сила (14), как это видно из (12), состоит из двух составляющих. Если убрать вторую составляющую условием

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0, \tag{15}$$

то сила (2) примет вид (14).

2. Условие (15) позволяет сделать дальнейшее обобщение силы (2) следующим образом. Рассмотрим уравнение движения (3) без силы Лоренца

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})\sin(\omega t+\varphi) \tag{16}$$

и его первое приближение

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0\sin(\omega t+\varphi) + q(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{E}_0\sin(\omega t+\varphi). \tag{17}$$

Если теперь вместо частного решения уравнения для нулевого приближения взять его общее решение

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\exp(-\nu t) - \frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\sin(\omega t+\varphi+\varphi_0), \tag{18}$$

а постоянные интегрирования определить из начальных условий

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0, \tag{19}$$

то для них получим

$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_2 + \frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\sin(\varphi+\varphi_0),$$

$$\mathbf{C}_2 = -\frac{\mathbf{v}_0}{\nu} - \frac{q\mathbf{E}_0}{m\nu\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\cos(\varphi+\varphi_0). \tag{20}$$

Подставляя решение (18) уравнения (10) в правую часть уравнения (17) и усредняя ее по времени, получим

$$\mathbf{F}(\varphi) = -\frac{q^2\beta}{\omega^2+\nu^2}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\omega\cos\varphi + \nu\sin\varphi)$$

$$-\frac{q^2\beta}{m(\omega^2+\nu^2)^2}(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\omega^2\cos^2\varphi - \nu^2\sin^2\varphi)$$

$$-\frac{q^2}{2m(\omega^2+\nu^2)}(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}, \tag{21}$$

где

$$\beta = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-\nu t)dt = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{\nu}\left((1-\exp\left(-2\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\right). \tag{22}$$

Начальная фаза колебаний, входящая в выражение (21), меняется случайным образом. Поэтому, считая распределение по фазе однородным и усредняя (21) по ней, получим с учетом (15) выражение для правой части уравнения (13):

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}\left(1+\frac{\omega^2-\nu^2}{\omega^2+\nu^2}\beta\right)\nabla E^2. \tag{23}$$

Найдем предельные значения этого выражения. Высокочастотный предел, когда $\nu/\omega \to 0$, равен

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{2m\omega^2}\nabla E^2, \tag{24}$$

что в два раза превышает соответствующий предел выражения (2). Этот результат обусловлен поступательной частью решения (18). Низкочастотные пределы, когда $\omega/\varphi \to 0$, (23) и (2) совпадают.

Известно (см., например [4]), что в плазме кроме поперечных электромагнитных волн возможны и продольные волны. В этом случае стационарная сила, действующая на заряженную частицу плазмы, имеет вид (23).

3. Приведенные результаты проиллюстрируем примером. Пусть на металлическую пластину толщиной L нормально к ее поверхности падает плоская монохроматическая волна. Внутри металла электрическое поле волны меняется по закону

$$E(z,t) = E_0 \exp(-sz)\sin(kz - \omega t). \qquad (25)$$

Считая, что скорость частиц в металле много меньше скорости волны, получим, что частицы в металле находятся под действием гармонического возмущения с амплитудой

$$E(z) = E_0 \exp(-sz), \qquad (26)$$

где $s = 1/\delta$, δ — толщина скин-слоя. Следовательно сила, действующая на частицу, имеет вид (14) и смысл ее прост — это усредненная по периоду сила Лоренца. Следует иметь в виду, что, поскольку подвижность ионов много меньше подвижности электронов, частоты, при которых допустимо разложение полей (8) для ионов и электронов, различны ($\omega_e \gg \omega_i$). Поэтому если справедливо представление о силе, действующей на ионы, то на электроны такая сила не действует. Напротив, если сила (14) действует на электроны, то сила, действующая на ионы, мала и ею надо пренебречь.

Давление, оказываемое ионами на поверхность металла

$$p = -n\frac{q^2}{4m_i(\omega_i^2 + \nu_i^2)} \int\limits_0^L \frac{d}{dz}\left(E_0^2 \exp(-2sz)\right) dz = \frac{nq^2E_0^2}{4m_i(\omega_i^2 + \nu_i^2)}, \qquad (27)$$

где предположено, что $L \gg \delta$, n — концентрация ионов. Сила, действующая на электроны, смещает их в направлении волны и создает на поверхности металла положительный потенциал [1]

$$\varphi = \frac{1}{q} \int_0^L F(z) dz = \frac{qE_0^2}{4m_e(\omega_e^2 + \nu_e^2)}. \tag{28}$$

Итак, если под действием гармонического возбуждения заряженная частица совершает колебания, то, начиная с определенных частот, на частицу действует стационарная сила (14). Если же частица кроме колебательного совершает и поступательное движение, то при условии (15) на частицу действует сила (23). Поскольку эти силы быстро спадают с ростом частоты возмущения, то особенно важен вопрос о значениях минимальной (пороговой) частоты, когда возможно разложение полей в ряд (8) и, следовательно, правомерно представление об этих силах.

Список литературы

[1] *Гапонов А.В., Миллер М.А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 2. С. 242–243.
[2] *Болотовский Б.М., Серов А.В.* // УФН. 1994. Т. 164. № 5. С. 545–549.
[3] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадхе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1988. 424 с.
[4] *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. 398 с.
[5] *Волков В.Н., Крылов И.А.* // Новые методы исследования в теоретической электротехнике и инженерной электрофизике. Межвуз. сб. научн. Тр. // Иван. энерг. ин-т им. В.И. Ленина. Иваново, 1976. С. 76–83.

[1] Если в пластине существуют продольные электромагнитные волны, то для них вместо (14) надо брать силу (23).