*01*

# О тепловой силе Казимира и теореме Нернста при взаимодействии малой частицы с поверхностью

© *Г.В. Дедков, А.А. Кясов*

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик
E-mail: gv_dedkov@mail.ru

*Поступило в Редакцию 1 апреля 2008 г.*

Показано, что общие теоретические результаты для тепловой силы Казимира, полученные в геометрии „малая сферическая частица–пластина“ для металлических тел (Г.В. Дедков, А.А. Кясов, 2007), согласуются с термодинамической теоремой Нернста при использовании классического выражения для диэлектрической функции Друде в пределе низких частот.

PACS: 05.30-d, 77.22.Ch, 12.20.Ds

Впервые вопрос о выполнимости термодинамической теоремы Нернста в связи с тепловой силой Казимира возник в работах [1,2], в которых применялись различные модели диэлектрической функции в расчетах этой силы на основе формулы Лифшица для конфигурации двух пластин с вакуумной целью. Оказалось [1], что модель Друде, в которой для нормальных металлов низкочастотная асимптотика диэлектрической функции имеет вид $\varepsilon(\omega) \sim \omega^{-1}$ (согласуется с уравнениями Максвелла), в пределе идеально проводящих пластин приводит к вдвое меньшей величине тепловой силы Казимира, чем предсказывается формулой (где $\xi(x)$ — дзета-функция Римана и $\xi(3) = 1.202$)

$$f_C = -\frac{k_B T \xi(3)}{4\pi z^3}, \tag{1}$$

являющейся „реперным“ результатом квантовой электродинамики [3]. Величина $f_C$ в формуле (1) определяет отнесенную к единице площади силу притяжения пластин, $z$ — ширина вакуумной щели между ними, $k_B$ и $T$ — постоянная Больцмана и температура.

Оказалось, что для пластин из нормальных металлов с учетом их материальных свойств модель Друде приводит к очень большим поправкам (более чем на два порядка величины) в тепловую силу Казимира по сравнению со случаем идеально проводящих пластин [1]. Вскоре было показано [4], что модель Друде также нарушает термодинамическую теорему Нернста, согласно которой энтропия системы при $T = 0$ должна строго обращаться в нуль. Заметим, что энтропия, отнесенная к единице площади пластин, определяется стандартным выражением $S = -(\partial E_{reg}/\partial T)_z$, где $E_{reg}$ — регуляризованная часть плотности свободной энергии электромагнитного поля между пластинами. Соответственно, давление Казимира определяется как $P = -(\partial E_{reg}/\partial z)_T$.

Для преодоления возникших затруднений авторы [2,4] предложили использовать плазменную модель диэлектрической функции, в которой $\varepsilon(\omega) \sim \omega^{-2}$ при $\omega \to 0$. Плазменная модель согласуется с (1) и обеспечивает выполнение теоремы Нернста. Рассматривалась также модель Друде для вещества пластин с примесными рашеточными включениями [5], благодаря которым имеется остаточная релаксация при $T = 0$ и, соответственно, трудности теории тоже преодолеваются. Тем не менее, поставленный вопрос продолжает интенсивно дискутироваться [6,7], поскольку применение плазменной модели физически оправдано только для оптических частот, а модель с решеточными включениями не адекватна для совершенных кристаллических структур.

Рассматриваемый вопрос имеет принципиальное значение, поскольку обоснование корректности применения той или иной диэлектрической функции влечет за собой изменение результатов расчета не только тепловой, но и „холодной“ части силы Казимира. Соответственно, от этого критически зависит интерпретация недавних и будущих экспериментов по измерению сил Казимира (см. [6,8] и соотв. ссылки).

В наших недавших работах [9,10] в дипольном приближении флуктуационной электкродинамики было получено точное выражение для силы Казимира между малой сферческой частицей и плоской поверхностью однородной и изотропной полубесконечной среды (толстой пластиной), поэтому выяснение соответствюущих вопросов для этой конфигурации представляет вполне очевидный интерес. При этом оказывается, что никаких ограничений на применимость модели Друде в связи с выполнением теоремы Нернста в данном случае нет.

Для упрощения анализа будем считать, что частица и пластина сделаны из одного не магнитоактивного металла с диэлектрической функцией $\varepsilon(\omega)$, а частица характеризуется дипольными электрической и магнитной поляризуемостью $\alpha_{e,m}(\omega)$. С учетом формул для силы

Казимира $F_C$, приведенных в [9,10], и соотношения $F_z = -\partial F_F/\partial z$, свободную энергию системы частица–поверхность представим в виде

$$E_F(z, T) = E_F(z, 0) - \frac{\hbar}{\pi} \int\limits_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^{-1}$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^1 du \mathrm{Re} \left[ \exp\left(\frac{2i\omega z u}{c}\right) \left(\tilde{f}_e(u, \omega)\alpha_e(\omega) + \tilde{f}_m(u, \omega)\alpha_m(\omega)\right) \right] \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty du \exp\left(-\frac{2\omega z u}{c}\right) \mathrm{Im}\left[ f_e(u, \omega)\alpha_e(\omega) + f_m(u, \omega)\alpha_m(\omega) \right] \right\}, \quad (2)$$

где $E_F(z, 0)$ — не зависящий от температуры вклад

$$E_F(z, 0) = -\frac{\hbar}{2\pi} \int\limits_0^\infty d\xi \left(\frac{\xi}{c}\right)^3 \int\limits_1^\infty du \exp\left(-\frac{2\xi z u}{c}\right)$$

$$\times \left[ \tilde{f}_e(u, i\xi)\alpha_e(i\xi) + \tilde{f}_m(u, i\xi)\alpha_m(i\xi) \right], \quad (3)$$

а функции $f_{e,m}$ и $\tilde{f}_{e,m}$ определены соотношениями:

$$f_e(u, \omega) = (2u^2 + 1)\Delta_e(u, \omega) + \Delta_m(u, \omega), \quad (4)$$

$$f_m(u, \omega) = (2u^2 + 1)\Delta_m(u, \omega) + \Delta_e(u, \omega), \quad (5)$$

$$\tilde{f}_e(u, \omega) = (1 - 2u^2)\tilde{\Delta}_e(u, \omega) + \tilde{\Delta}_m(u, \omega), \quad (6)$$

$$\tilde{f}_m(u, \omega) = (1 - 2u^2)\tilde{\Delta}_m(u, \omega) + \tilde{\Delta}_e(u, \omega), \quad (7)$$

$$\tilde{f}_e(u, i\xi) = (2u^2 - 1)\tilde{\Delta}_e(u, i\xi) - \tilde{\Delta}_m(u, i\xi), \quad (8)$$

$$\tilde{f}_e(u, i\xi) = (2u^2 - 1)\tilde{\Delta}_m(u, i\xi) - \tilde{\Delta}_e(u, i\xi), \quad (9)$$

$$\Delta_e(u, \omega) = \frac{\varepsilon(\omega)u - \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}}{\varepsilon(\omega)u + \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}},$$

$$\Delta_m(u, \omega) = \frac{u - \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}}{u + \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}}, \quad (10)$$

$$\tilde{\Delta}_e(u,\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)u - \sqrt{u^2+\varepsilon(\omega)-1}}{\varepsilon(\omega)u + \sqrt{u^2+\varepsilon(\omega)-1}},$$

$$\tilde{\Delta}_m(u,\omega) = \frac{u - \sqrt{u^2+\varepsilon(\omega)-1}}{u + \sqrt{u^2+\varepsilon(\omega)-1}}, \quad (11)$$

Энтропия определяется отрицательной производной по температуре от интегрального слагаемого (2). Для его упрощения воспользуемся классическими выражениями для функций $\alpha_{e,m}(\omega)$[11]:

$$\alpha_e(\omega) = R^3 \frac{\varepsilon(\omega)-1}{\varepsilon(\omega)+2}, \quad (12)$$

$$\alpha_m(\omega) = -\frac{R^3}{2}\left[1 - \frac{3}{R^2k^2} + \frac{3}{Rk}\cot(Rk)\right], \quad k = (1+i)\sqrt{2\pi\sigma\omega}/c, \quad (13)$$

где $\sigma$ — проводимость, а $R$ — радиус частицы. Благодаря наличию в (2) планковского температурного фактора, переход к пределу $T \to 0$ влечет за собой необходимость рассмотрения низкочастотного вклада в интеграл (2). В этом случае диэлектрическая функция Друде имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 + i \cdot 4\pi\sigma_0/\omega = 1 + a \cdot i$, где $\sigma_0$ — статическая проводимость, причем $a \gg 1$, а частотные зависимости функций, входящих в (2), суть: $\mathrm{Im}\alpha_{e,m} \sim \omega$, $\mathrm{Re}\,\alpha_e \approx 1$, $\mathrm{Re}\,\alpha_m \sim -\omega^2$, коэффициент $\Delta_e$ с учетом (11) упрощается в виде

$$\Delta_e \approx \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \approx 1 + \frac{2}{a} \cdot i, \quad (14)$$

а $\Delta_m$ удобно представить следующим образом:

$$\Delta_m = \frac{x - \sqrt{x^2-i}}{x + \sqrt{x^2-i}} = \Delta'_m(x) + i \cdot \Delta''_m(x), \quad x = u/\sqrt{a}. \quad (15)$$

Интегралы по переменной $u$ в фигурных скобках (2) принципиально различаются по характеру результирующей зависимости от $\omega$ при $\omega \to 0$. В первом из них экспоненциальный фактор всегда близок к 1, и в результате интегрирования по $u$ получаются либо слабо зависящие от $\omega$ функции, либо пропорциональные положительным степеням частоты. В итоге последующего интегрирования по частотам отдельные слагаемые преобретают степенные зависимости от температуры $\sim T^p$, где $p \geqslant 4$, поэтому их вклад в энтропию $S \sim T^{p-1} \to 0$ при $T \to 0$, т. е. теорема Нернста выполняется. Во втором интеграле в фигурных скобках (2) экспоненциальный фактор изменяется от единицы до нуля в зависиммости от $u$, и после интегрирования могут возникать отрицательные степени частоты, поэтому его необходимо рассмотреть более детально.

После развернутой записи выражения для мнимой части соответствующей подынтегральной функции и перехода к переменной интгерования $x$ вместо $u$, отдельные интегральные члены вычисляются аналитически или численно, будучи пропорциональны разным степеням частоты $\omega$, причем оказывается, что наименьшую отрицальную степень $\omega^{-2}$ имеет член $2x^2a(\Delta'_e\alpha''_e + \Delta''_e\alpha'_e)$. Все остальные имеют частотные зависимости с более высокими степенями $\omega$ и после интгерирования по частотам, соответственно, приводят к более высоким степеням температуры $T$, менее критичным по отношению теоремы Нернста. Интегрирование оставшегося члена приводит к вкладу в свободную энергию:

$$E_F^{(T)} \approx -\frac{7}{96}\,k_BT\left(\frac{R}{z}\right)^3\frac{k_BT}{\sigma_0\hbar}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что $S = -\partial E_F^{(T)}/\partial T \sim T \to 0$ при $T \to 0$. Таким образом, формулы (2), (3) и соответствующие им для сил Казимира [9,10] вполне корректны по отношению к теореме Нернста без каких-либо искусственных предположений относительного вида диэлектрической функции в низкочастотном пределе. Из (2) также следует, что при замене материала частицы или пластины (или обоих) на диэлектрик (без или с наличием остаточной низкочастотной проводимости) теорема Нернста также выполняется.

## Список литературы

[1] *Bostrom M., Sernelius B.E.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 4757.
[2] *Genet C., Lambrecht A., Reynaud S.* // Phys. Rev. 2000. V. A62. P. 012110.
[3] *Brown L.S., Maclay G.J.* // Phys. Rev. 1969. V. 184. P. 1272.
[4] *Bordag M., Geyer B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 503.

[5] *Bostrom M., Sernelius B.E.* // Physica. 2004. V. A339. P. 53.
[6] *Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* // Contemp. Phys. 2006. V. 47. P. 131.
[7] *Bezerra V.B., Bimonte G., Klimchitskaya G.L.* et al. // Europhys. J. 2007. V. C52. N 3. P. 701.
[8] *Lamoreaux S.K.* // Rep. Progr. Phys. 2005. V. 68. P. 201.
[9] *Dedkov G.V., Kyasov A.A.* // Eur. Phys. Lett. 2007. V. 74. P. 44005.
[10] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. № 9. С. 61.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 620.