

09

Эффект „вымирания“ квазипериодических режимов в системе диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с импульсным воздействием

© А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: stankevichnv@mail.ru

Поступило в Редакцию 27 ноября 2007 г.

Рассматривается система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля под периодическим импульсным воздействием. Показано, что в случае, когда связанные осцилляторы демонстрируют эффект гибели колебаний, при добавлении импульсного воздействия на плоскости период–амплитуда воздействия возникают острова квазипериодических режимов, которые „вымирают“ при увеличении частотной расстройки.

PACS: 05.45.Xt

Связанные осцилляторы Ван-дер-Поля являются „эталонной“ системой теории колебаний и нелинейной динамики, которой посвящено значительное количество работ (см., например, [1–8]). Она с успехом применяется для описания не только физических, но и химических, биофизических и других вариантов автоколебательных систем [1,2]. Интерес к этой системе, однако, не ослабевает, поскольку она характеризуется большим числом существенных параметров, при вариации которых обнаруживаются все новые особенности динамики и колебательные эффекты [3]. Кроме того, задача допускает описание на разных „уровнях“: с помощью уравнений фазовой динамики [1,2,5], укороченных уравнений в рамках квазигармонического приближения [1–3], численного исследования исходных уравнений [6,8]. В настоящей работе будут обсуждены некоторые колебательные режимы в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с внешним возбуждением. Исходная

система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= A \sum \delta(t - nT), \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y — динамические переменные; λ — параметр, характеризующий степень превышения над порогом бифуркации Андронова–Хопфа в отдельных осцилляторах; δ — частотная расстройка второго осциллятора относительно первого в отсутствие связи; μ — коэффициент диссипативной связи. Мы выбираем внешнее воздействие в виде коротких импульсов, сообщающих системе определенный „толчок“ через моменты времени T . Амплитуда импульсов A , n — количество импульсов.

Одним из характерных эффектов в системе связанных осцилляторов (1) с выключенным внешним воздействием (будем называть ее автономной) является эффект „гибели колебаний“ (oscillator death) [2,4]. Он состоит в том, что достаточно сильная диссипативная связь может приводить при превышении частотной расстройкой определенной величины к тому, что неподвижная точка в начале координат становится устойчивой и колебания исчезают. Теоретическое рассмотрение этого эффекта дано в [2,4]. Он был обнаружен и экспериментально в некоторых физических системах, например в паре связанных термооптических осцилляторов [7].

На рис. 1 показано устройство плоскости параметров частотная расстройка δ –величина связи μ системы (1) с выключенным воздействием при $\lambda = 1$ [8]. На ней обнаруживаются: основная область синхронизации с соотношением частот осцилляторов 1:1, высшие языки взаимной синхронизации осцилляторов, из которых наиболее выражен язык с соотношением частот 1:3, области квазипериодических режимов и характерная область гибели колебаний.

„Включим“ теперь внешнее воздействие. Как и обычно, для неавтономных систем, будем следить за устройством плоскости параметров период T –амплитуда воздействия A . Будем постепенно продвигаться по плоскости параметров автономной системы на рис. 1 из основной области синхронизации в область „гибели колебаний“. С этой целью зафиксируем величину связи, и будем постепенно увеличивать

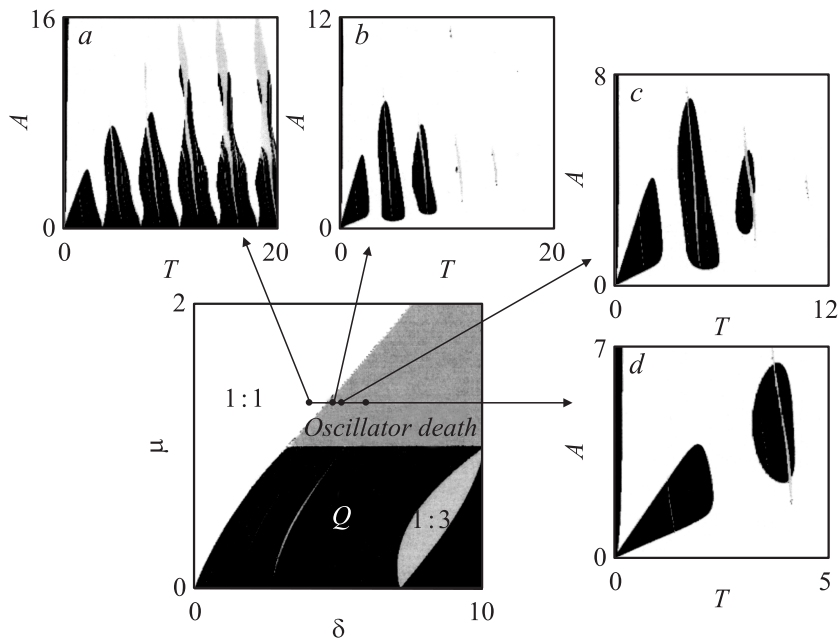


Рис. 1. Языки синхронизации, область гибели колебаний и область квазипериодических режимов Q связанных осцилляторов (1) в отсутствие внешнего воздействия. На вставках: плоскости параметров период T – амплитуда воздействия A неавтономной системы (1); $\mu = 1.3$, a — $\delta = 4$, b — $\delta = 4.8$, c — $\delta = 5$, d — $\delta = 6$.

частотную расстройку δ второго осциллятора относительно первого. Основной вопрос состоит в том, как проявится на плоскости параметров воздействия переход автономной системы из синхронного режима в режим гибели колебаний?

На рис. 1 на вставках показаны четыре характерные плоскости параметров воздействия (T, A) системы (1), отвечающие четырем избранным точкам вблизи границы эффекта гибели колебаний. Устройство плоскостей выявлено с помощью метода карт динамических режимов [9], который состоит в том, что численно определяется период режима в сечении Пуанкаре, а затем соответствующая точка плоскости „окрашивается“ в определенный цвет. Сечения Пуанкаре

в неавтономной системе (1) выбирались через период внешнего воздействия. Цветовая палитра выбрана следующим образом: белый цвет отвечает режиму периода 1, светло-серый — 2 и т.д., черный цвет отвечает хаотическим или квазипериодическим режимам. На рис. 1 на вставках можно видеть, что колебательные режимы, причем достаточно разнообразные, сохраняются и внутри области гибели колебаний.

Можно отметить следующие особенности картины. В точке, отвечающей рис. 1, *a*, в автономной системе наблюдается захват частот колебаний осцилляторов с соотношением 1:1. В этом случае картина синхронизации в неавтономном режиме на плоскости (T, A) в значительной мере аналогична случаю воздействия импульсами на отдельный осциллятор Ван-дер-Поля [10–12]. Соответствие тем лучше, чем больше период воздействия, поскольку в промежутке между импульсами осцилляторы за счет диссипативной связи успевают „подстроить“ режимы колебаний. Некоторое отличие состоит в заметном уменьшении расстояния между вершинами основных языков синхронизации. Это связано с захватом частот первого и второго осцилляторов. Действительно, при $\delta = 4$, в соответствии с (1), собственные частоты несвязанных осцилляторов $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \sqrt{1 + \delta} \approx 2.24$. В режиме синхронизации 1:1 частоты захватываются в окрестности значения $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx 1.62$, а значит, расстояние между вершинами языков синхронизации периода 1 на рис. 1, *a* должно составлять $\Delta T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 3.9$, что находится в хорошем соответствии с рис. 1, *a*.

При продвижении на рис. 1 вдоль выделенной горизонтальной линии в сторону области гибели колебаний, однако, наблюдается существенное изменение картины. С ростом частотной расстройки δ в момент перехода в режим гибели колебаний области квазипериодических режимов „отрываются“ от оси нулевой амплитуды воздействия (переход от рис. 1, *a* к рис. 1, *b*). Теперь они отделены от оси областью периода 1. При этом области квазипериодических режимов образуют отдельные изолированные „острова“. При дальнейшем увеличении частотной расстройки осцилляторов острова постепенно уменьшаются в размерах и поэтапно „вымирают“ (переход от рис. 1, *a* к *b* и *c*). Наиболее долгоживущим является остров, отвечающий наименьшему периоду внешнего воздействия. При этом вымирание островов квазипериодических режимов происходит достаточно глубоко внутри области гибели колебаний системы связанных осцилляторов.

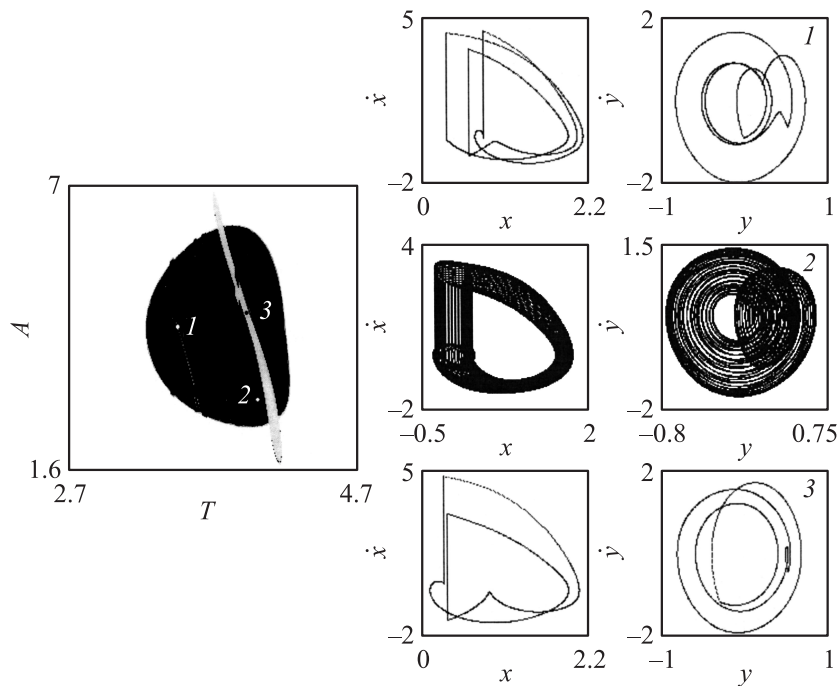


Рис. 2. Остров квазипериодических режимов, отвечающий режиму гибели колебаний автономной системы, и характерные фазовые портреты. Точка и вставка 2 отвечают квазипериодическому режиму, а 1 и 3 — периодическим режимам, наблюдающимся в окнах, пересекающих остров.

Наиболее крупный „долгоживущий“ остров показан на рис. 2. Представлены также его выделенный фрагмент и несколько характерных фазовых портретов. Точка и вставка 2 отвечают квазипериодическому режиму. Можно видеть, однако, что некоторые из областей периодических режимов, как, например, области периода 3 и 2, образуют очень узкие „окна“, пересекающие остров. Они сформировались из высших языков синхронизации разной кратности при переходе от рис. 1, *b* к *d*. На рис. 2 на вставках 1 и 3 представлены аттракторы для двух этих „окон“. На фазовых портретах первого осциллятора можно видеть соответственно три и два характерных скачка, отвечающих действию внешних импульсов.

Таким образом, при наличии большой диссипативной связи две связанные системы Ван-дер-Поля ведут себя как затухающий осциллятор — демонстрируют режим „гибели колебаний“. Однако внешнее импульсное воздействие даже в этом режиме выявляет присущие системе автоколебательные свойства. На плоскости период–амплитуда воздействия возникают острова квазипериодических режимов, которые окружены системой мелкомасштабных языков синхронизации. При продвижении в глубь области гибели колебаний острова последовательно исчезают. Подчеркнем пороговый характер возникновения квазипериодических движений в режиме гибели колебаний автономных осцилляторов. А именно, для фиксированной частоты воздействия необходима некоторая минимальная величина импульсов, начиная с которой квазипериодический режим возможен. В этом существенное отличие от квазипериодических движений в автоколебательном режиме автономной системы: они возможны при сколь угодно малой амплитуде внешнего сигнала. При этом на плоскости период–амплитуда воздействия (T , A) возникают „острова“ квазипериодических режимов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773).

Список литературы

- [1] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
- [2] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [3] Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J. // *Physica D*. 2004. V. 189. P. 8–30.
- [4] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. // *Physica D*. 1990. V. 41. P. 403–412.
- [5] Rand R., Holmes. // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. V. 15. P. 387–399.
- [6] Кузнецов А.П., Паксютов В.И. // *Изв. вузов. ПНД*. 2005. Т. 13. № 4. С. 3–19.
- [7] Herrero R., Figueras M., Rius J., Pi F., Orriols G. // *Phys. Rev. Lett*. 2000. V. 84. N 23. P. 5312–5315.
- [8] Кузнецов А.П., Паксютов В.И. // *Изв. вузов. ПНД*. 2003. Т. 11. № 6. С. 48–64.
- [9] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
- [10] Ding E.J. // *Physica Scripta*. 1988. V. 38. P. 9–16.
- [11] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. // *Изв. вузов. ПНД*. 2001. № 6. С. 69–82.
- [12] Glass L., Sun J. // *Phys. Rev*. 1994. V. 50. N 6. P. 5077–5084.