

09

Стабилизация внешними импульсами системы Ресслера в режиме „убегающей“ траектории

© А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: stankevichnv@mail.ru

Поступило в Редакцию 19 декабря 2007 г.

Рассматривается действие импульсов на систему Ресслера до бифуркации седло-узел с „убегающей“ фазовой траекторией. Показано, что внешнее импульсное воздействие приводит к возникновению в неавтономной системе устойчивых периодических и квазипериодических режимов.

PACS: 05.45.Xt

Проблема управления хаосом в последнее время привлекает большое внимание благодаря как своему теоретическому значению, так и большой практической значимости [1–5]. Традиционно различают два основных направления: стабилизация неустойчивых периодических орбит динамической системы, вложенных в хаотический аттрактор, и стабилизация неустойчивых состояний равновесия (неподвижных точек). В рамках первого направления проблема управления хаосом изучена достаточно широко [5,6]. Одним из наиболее популярных методов решения таких задач является метод Пирагаса — метод автосинхронизации запаздывающей обратной связью [6]. Метод автосинхронизации запаздывающей обратной связью может быть обобщен и на случай стабилизации неустойчивых положений равновесия [7]. Также была показана возможность реализации устойчивых периодических и квазипериодических режимов в системе с неустойчивым предельным циклом под импульсным воздействием [8].

Весьма нетривиальной является задача стабилизации в случае, когда в системе вообще нет положений равновесия, т. е. изображающая точка в фазовом пространстве „убегает“ на бесконечность. Такая ситуация может возникнуть, например, сразу за порогом бифуркации седло-узел, когда сливаются и исчезают устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Особенность трехмерных динамических систем состоит в том,

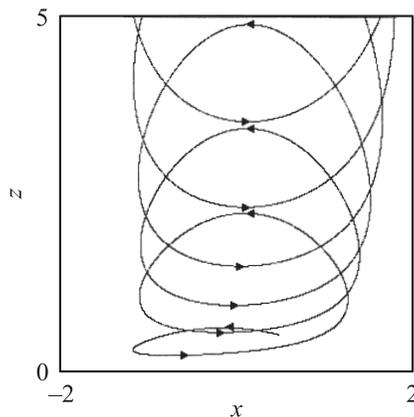


Рис. 1. Проекция фазовой траектории автономной системы Ресслера (1) на плоскость (x, z) до порога бифуркации седло-узел при $p = 0.2, q = 0.2, r = 0.2$.

что в точке седло-узловой бифуркации могут слиться равновесия типа устойчивого фокуса и седло-фокуса, для которых характерно наличие одного действительного и двух комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. В таком случае в результате бифуркации возникает поток фазовых траекторий „с вращением“. Пример соответствующей фазовой траектории автономной системы в проекции на плоскости переменных (x, z) показан на рис. 1. Мы обращаем внимание на то, что это, в свою очередь, создает определенные предпосылки для возможности стабилизации режима „убегающей“ траектории за счет внешнего воздействия, хотя устойчивые и неустойчивые режимы в автономной системе отсутствуют. Такая ситуация не имеет аналога в двумерных системах. Как оказалось, определенный тип внешнего воздействия, а именно периодическая последовательность δ -функций, действительно может инициировать в системе устойчивые периодические и квазипериодические режимы.

В настоящей работе эта проблема рассмотрена на примере эталонной в нелинейной динамике модели — системе Ресслера:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + z(x - r), \quad (1)$$

где x, y, z — динамические переменные, p, q, r — параметры системы. Это автоколебательная система с трехмерным фазовым пространством.

Приравнивая нулю якобиан системы (1), определенный для неподвижных точек, получаем условие бифуркации седло-узел

$$r^2 = 4pq. \quad (2)$$

Таким образом, если $r^2 - 4pq > 0$, то мы имеем две неподвижные точки (устойчивую и неустойчивую); если $r^2 - 4pq = 0$ — одну вырожденную неподвижную точку; а если $r^2 - 4pq < 0$ — неподвижных точек нет и изображающая точка в фазовом пространстве „убегает“ на бесконечность.

Пусть $r^2 - 4pq < 0$. Выберем точку на плоскости параметров системы (1) из этой области: $p = 0.2$, $q = 0.2$, $r = 0.2$. Теперь необходимо выбрать внешнее воздействие. В задачах синхронизации наиболее часто рассматривается случай гармонического сигнала. Одним из альтернативных вариантов является импульсное воздействие, когда внешняя сила представляет собой периодическую последовательность значительных по амплитуде и коротких по времени импульсов. Как показано в [8], такое воздействие для задач стабилизации и инициации устойчивых синхронных и квазипериодических режимов предпочтительнее. В качестве соответствующей модели можно использовать, как это сделано в [8,10–14], периодическую последовательность δ -функции. Рассмотрим случай, когда внешняя сила действует вдоль оси x , т.е. дополнительное слагаемое, отвечающее за воздействие, добавляем в первое уравнение системы (1). В этом случае неавтономную систему можно записать так:

$$\dot{x} = -y - z + A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + z(x - r), \quad (3)$$

где A — амплитуда внешнего воздействия, а T — его период.

На рис. 2, а изображена построенная численно карта динамических режимов для системы (3) на плоскости параметров амплитуда–период внешней силы. На этих картах белым цветом обозначен режим периода 1, светло-серым — режим периода 2 и т.д., черный цвет отвечает хаосу, а область убегания траектории на бесконечность обозначена одним из оттенков серого. Сечение Пуанкаре выбиралось традиционным для неавтономных потоковых систем способом — по периоду внешней силы. На рис. 2 изображена карта, построенная с наследованием, т.е. начальная точка для каждого значения управляющих параметров

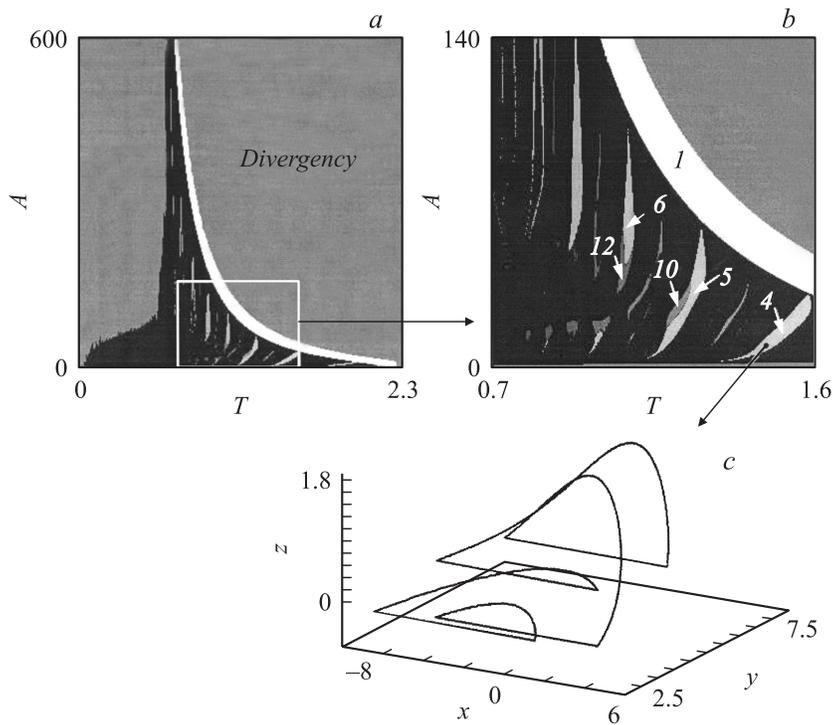


Рис. 2. *a* — карта динамических режимов неавтономной системы Ресслера (3) на плоскости параметров период T — амплитуда A внешнего воздействия для $p = 0.2$, $q = 0.2$, $r = 0.2$; *b* — увеличенный фрагмент карты (цифрами обозначены периоды, реализующиеся в системе в соответствующих областях); *c* — аттрактор неавтономной системы периода 4 в избранной точке на карте.

„наследовалась“ от установившегося режима предыдущего значения параметров. На рис. 2, *b* показан увеличенный фрагмент карты.

Анализ рис. 2 показывает, что в рассматриваемой системе возникают устойчивые режимы, хотя автономная система демонстрирует „убегающие“ фазовые траектории. На рис. 2, *c* показан один из возможных фазовых портретов аттрактора неавтономной системы, отвечающий режиму периода 4.

Обсудим подробнее возникающие устойчивые режимы. На рис. 2, *a, b* мы видим характерную структуру, относящуюся к устойчивым режимам и состоящую из областей периодических и квазипериодических режимов. Выявленная структура областей устойчивых режимов расположена в достаточно малом диапазоне по периоду внешней силы, но в очень широком по амплитуде. Языки периодических режимов имеют острие у вершины и у основания. Аналогичную структуру обычно имеют языки синхронизации на субгармониках на плоскостях амплитуда–период внешней силы для автоколебательных систем с импульсным воздействием [10–14]. В нашем случае мы видим также, что практически внутри всех языков имеются области удвоенного периода.

С увеличением периода языки не становятся более сложно устроенными, а становятся „неразличимыми“ в области квазипериодического поведения. Это связано с тем, что автономная система не имеет периодического аттрактора, а изображающая точка системы (1) движется по спиралевидной траектории (рис. 1). При этом с течением времени увеличивается число витков. Когда мы добавляем внешнее воздействие, то импульс возвращает изображающую точку в начало траектории. Подобную природу в определенной степени имеет и метод автосинхронизации с запаздывающей обратной связью, когда с помощью обратной связи состояние системы возвращается в предыдущее. В нашем же случае вместо обратной связи используется внешний импульс, возвращающий траекторию в прежнее состояние. В зависимости от того, как далеко уйдет изображающая точка без воздействия, т.е. от величины периода внешней силы, импульс стабилизирует систему или нет. Таким образом, можно сказать, что при $T > 2.3$ траектория уже достаточно далеко „убежала“, так что внешний импульс не в состоянии ее стабилизировать. Стоит также обратить внимание на достаточно большую полосу периода 1, в которую упираются все вершины языков синхронизации. Эта полоса разграничивает области разбегания траектории на бесконечность и квазипериодических режимов.

На рис. 3 изображены: проекции периодических аттракторов неавтономной системы (3) на плоскость (x, y) , соответствующие им точки в сечении Пуанкаре (показаны белым цветом). Кроме того, представлены бассейны притяжения данного аттрактора для фиксированного начального значения третьей переменной ($z_0 = 0.5$). Как видно из рис. 3, размеры бассейнов притяжения на плоскостях динамических переменных

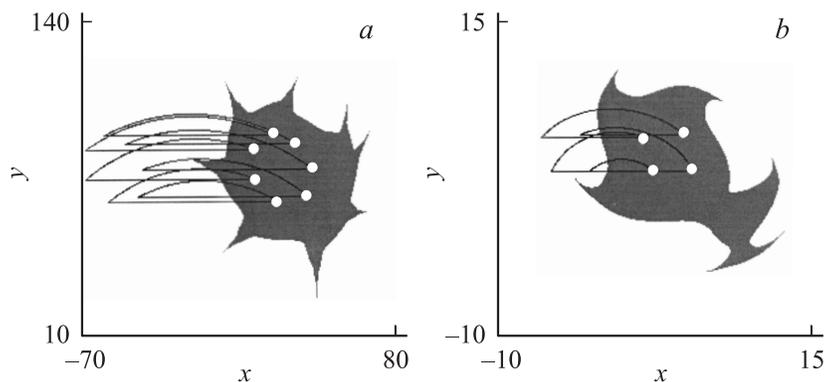


Рис. 3. Неавтономные аттракторы системы Ресслера (3) периода 7 и 4 на плоскости (x, y) , соответствующие им точки в сечении Пуанкаре и бассейны притяжения: $a - A = 77.5, T = 0.9, b - A = 8.0, T = 1.41$.

достаточно большие, что говорит об устойчивости стабилизированных режимов к изменению начальных условий.

Таким образом, в работе показано, что воздействие периодической последовательности δ -импульсов на систему Ресслера до порога бифуркации рождения устойчивой и неустойчивой неподвижной точек приводит к возникновению в неавтономной системе устойчивых периодических и квазипериодических режимов. При этом на плоскости период–амплитуда воздействия выявляются характерные языки синхронизации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-02-16773.

Список литературы

- [1] Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
- [2] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов, 1999.
- [3] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [4] Schuster H.G. Handbook of Chaos Control. Wiley-VCH, Weinheim, 1999.
- [5] Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196.

- [6] *Pyragas K.* // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421.
- [7] *Hoeve P., Schoell E.* // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 709.
- [8] *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* // ПНД. 2006. Т. 14. № 1. С. 72–81.
- [9] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
- [10] *Ding E.J.* // Phys. Rev. 1987. V. A36. N 3. P. 1488–1491.
- [11] *Ding E.J.* // Physica Scripta. 1988. V. 38. P. 9–16.
- [12] *Glass L., Sun J.* // Phys. Rev. 1994. V. 50. N 6. P. 5077–5084.
- [13] *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* // ПНД. 2004. Т. 12. № 5. С. 16–31.
- [14] *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* // ПНД. 2006. Т. 14. № 6. С. 43–53.