01;09

Модифицированный метод коллокации в теории антенн

© *С.И. Эминов*

Новгородский государственный университет
E-mail: tel@novsu.ac.ru,
Theorphy@novsu.ac.ru

Поступило в Редакцию 8 февраля 2005 г.

Изучаются возможности одного из самых распространенных методов в теории антенн, метода коллокации на основе кусочно-постоянного базиса. Показана низкая эффективность метода коллокации в задачах возбуждения. Предложен модифицированный метод, основанный на аналитическом обращении главной части оператора.

Введение. Знакомство с современными тенденциями в вычислительной электродинамике показывает, что многие научные школы по антеннам при решении интегральных уравнений используют метод коллокации на основе кусочно-постоянного базиса. Большая популярность этого метода вызвана следующими причинами:

— метод прост и универсален;

— имеется математическое обоснование метода для ряда уравнений [1];

— построено обобщение метода коллокации для задач дифракции на произвольных криволинейных поверхностях [2].

Однако возможности метода в задачах возбуждения антенн весьма ограничены, внутренняя сходимость метода медленная. И связано это с тем, что первичное поле в указанных задачах локализовано в небольшой, по сравнению с характерным размером антенны, области.

Целью данной работы является разработка модифицированного варианта метода коллокации, обладающего высокой эффективностью.

1. Формулировка метода коллокации. Метод коллокации сформулируем на примере гиперсингулярного уравнения вида

$$(Au)(\tau) + (Nu)(\tau) = v(\tau), \quad -1 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{1}$$

где

$$(Au)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt,$$

$$(Nu)(\tau) = \int\limits_{-1}^{1} N(\tau, t)u(t)dt.$$

Возьмем целое число n. Интервал $[-1, 1]$ разобьем на n равных частей длиной $h = \frac{2}{n}$. Введем границы j-го интервала $a_j = -1 + (j-1)h$, $b_j = -1 + jh$, точки коллокации $\gamma_i = -1 + (i-1)h + \frac{h}{2}$, середины интервалов, а также базисные функции

$$\varphi_j(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \in [-a_j, b_j], \\ 0, & \text{если } \tau \notin [-a_j, b_j]. \end{cases} \tag{2}$$

А теперь разложим неизвестную функцию по базису

$$u(\tau) = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(\tau), \tag{3}$$

подставим в (1) и рассмотрим это уравнение в точках коллокации, т. е. вместо τ последовательно подставим $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(A\varphi_j)(\gamma_i) + \sum_{j=1}^{n} c_j(N\varphi_j)(\gamma_i) = v(\gamma_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4}$$

Матричные элементы гиперсингулярного оператора A находятся аналитически. В самом деле

$$(A\varphi_j)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{a_j}^{b_j}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\left(\ln\frac{1}{|\tau - b_j|} - \ln\frac{1}{|\tau - a_j|}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\tau - a_j} - \frac{1}{\tau - b_j}\right).$$

Отсюда получим

$$(A\varphi_j)(\gamma_i) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\gamma_i - a_j} - \frac{1}{\gamma_i - b_j}\right). \tag{5}$$

А нахождение матричных элементов оператора N сводится к вычислению одномерных интегралов

$$(N\varphi_j)(\gamma_i) = \int\limits_{a_j}^{b_j} N(\gamma_i, t)u(t)dt.$$

Решив систему (4), найдем неизвестные коэффициенты c_j и по формуле (3) неизвестную функцию. В этом суть метода коллокации.

2. Сходимость метода коллокации. Вопросы сходимости метода коллокации будем изучать на примере уравнения вибраторных антенн. Уравнение приводится в приложении. Правую часть будем задавать в виде

$$E^0(\tau) = \frac{U_0}{2T}\begin{cases}1, & |\tau| \leqslant \frac{T}{l} \\ 0, & |\tau| > \frac{T}{l}\end{cases}. \tag{6}$$

Здесь $2T$ — длина участка, где первичное поле отлично от нуля, а $2l$ — длина всей антенны. В таблицах приведены результаты расчета входного сопротивления, определяемого по формуле

$$Z = \frac{U_0}{I(0)} \tag{7}$$

в зависимости от числа базисных функций N и параметра $\frac{T}{l}$.

В табл. 1 приведены результаты расчета, когда $\frac{T}{l} = 1$, т.е. первичное поле равномерно распределено по длине вибратора (задача дифракции).

Таблица демонстрирует хорошую сходимость метода коллокации.

В табл. 2 приводится входное сопротивление для разных значений $\frac{T}{l}$. По мере уменьшения $\frac{T}{l}$ падает скорость сходимости. При малых $\frac{T}{l}$ (задача возбуждения антенн) метод коллокации практически не применим.

3. Модифицированный метод коллокации. Вначале рассмотрим уравнение, которое содержит лишь гиперсингулярный оператор

$$(Au_1)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{-1}^{1} u_1(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt = v(\tau), \quad -1 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{8}$$

Таблица 1.

N	$(kl)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{l}{a}=50$, $\frac{T}{l}=1$		$(kl)=\frac{\pi}{4}$, $\frac{l}{a}=50$, $\frac{T}{l}=1$	
	ReZ	ImZ	ReZ	ImZ
10	125.99	140.23	36.086	−487.95
20	122.93	92.440	34.822	−598.166
40	121.44	84.672	34.309	−621.04
60	121.01	84.883	34.170	−623.20
80	120.81	84.772	34.105	−624.20
100	120.69	84.600	34.065	−624.19
200	120.46	83.939	33.987	−629.15
300	120.39	83.383	33.960	−630.51

Таблица 2.

N	$(kl)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{l}{a}=50$, $\frac{T}{l}=0.05$		$(kl)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{l}{a}=50$, $\frac{T}{l}=0.02$	
	ReZ	ImZ	ReZ	ImZ
20	50.052	28.946		
40	98.086	49.799		
60	148.02	73.302	59.210	29.321
80	97.144	49.663	79.341	38.438
100	80.283	41.624	99.584	47.352
120	96.719	49.362	119.92	56.115
140	84.157	43.372	140.352	64.762

Решение этого уравнения в аналитическом виде получено в работе [3] и имеет вид

$$u_1(\tau)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\nu(t)\left(\frac{\ln 2}{2}+\ln\sin\frac{\theta(t)+\theta(\tau)}{2}-\frac{1}{2}\ln|\tau-t|\right)dt, \qquad (9)$$

где $\theta(t)=\arccos(t)$.

Решение уравнения (1) будем искать в виде суммы

$$u=u_1+u_2.$$

Таблица 3.

N	$(kl)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{l}{a}=50$, $\frac{T}{l}=0.05$		$(kl)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{l}{a}=50$, $\frac{T}{l}=0.02$	
	ReZ	ImZ	ReZ	ImZ
11	124.04	85.381	124.39	77.049
21	103.98	54.980	104.45	50.738
41	98.724	49.780	101.35	47.418
61	98.006	49.861	100.93	47.692
81	97.465	49.682	100.48	47.556
101	97.181	49.537	99.931	47.278

А для нахождения u_2 с учетом (9) получим уравнение

$$(Au_2)(\tau)+(Nu_2)(\tau)=-(Nu_1)(\tau), \quad -1\leqslant\tau\leqslant 1. \tag{10}$$

Правая часть этого уравнения в отличие от правой части уравнения (1) разлагается в хорошо сходящийся ряд. Поэтому уравнение (10) эффективно решается методом коллокации.

Табл. 3 демонстрирует хорошую внутреннюю сходимость.

Предложенный здесь метод является численно-аналитическим. Решение ищется в виде двух слагаемых, одно из которых находится аналитически, а другое численно, методом коллокации.

Поэтому метод обладает высокой эффективностью и полностью решает проблему расчета вибраторных и многих других типов антенн, а также задач дифракции, когда источники первичного поля расположены вблизи поверхности дифракции.

Приложение. Гиперсингулярное уравнение вибраторных антенн. Рассмотрим трубчатый цилиндрический вибратор длиной $2l$, радиусом a. Под воздействием первичного поля E^0, которое полагаем осесимметричным, на идеально проводящей поверхности наводятся аксиальные токи. Плотность поверхностных токов $j_z(z)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$-\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\iint\limits_S j_z(z')\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}dS'=i\omega\varepsilon E_z^0(z), \tag{11}$$

где

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2[1 - \cos(\varphi - \varphi')]}, \quad dS' = a\,d\varphi' dz'.$$

Легко показать, что в уравнении (11) интеграл не зависит от переменной φ. Далее, переходя к безразмерным переменным по формулам

$$z = l\tau, \quad z' = lt, \quad E_z^0(l\tau) = E^0(\tau), \quad I(\tau) = 2\pi a\, j_z(l\tau), \tag{12}$$

запишем уравнение (11) в виде

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + (kl)^2\right)\int_{-1}^{1} B(\tau, t)I(t)dt = il\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0(\tau), \tag{13}$$

где

$$B(\tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(-i\tilde{R})}{\tilde{R}}\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(-i\tilde{R})}{\tilde{R}}\,d\psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\exp(-i\tilde{R})}{\tilde{R}}\,d\psi, \tag{14}$$

$$\tilde{R} = \sqrt{(kl)^2(\tau - t)^2 + 4(ka)^2\sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

А теперь выделим логарифмическую особенность в ядре. С этой целью из подынтегральной функции в (14) отнимем и прибавим функцию, имеющую такую же особенность и интегрируемую в аналитическом виде:

$$B(\tau, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\exp(-i\tilde{R})}{\tilde{R}} - \frac{1}{\sqrt{(kl)^2(\tau - t)^2 + (ka)^2\psi^2}}\right]d\psi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{(kl)^2(\tau - t)^2 + (ka)^2\psi^2}}\Bigg]d\psi.$$

Вычисляя второй интеграл аналитически, получим

$$B(\tau,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left[\frac{\exp(-i\tilde{R})}{\tilde{R}}-\frac{1}{\sqrt{(kl)^2(\tau-t)^2+(ka)^2\psi^2}}\right]d\psi$$

$$+\frac{1}{\pi(ka)}\ln\left[\frac{\pi a}{l}+\sqrt{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2+(\tau-t)^2}\right]+\frac{1}{\pi(ka)}\ln\frac{1}{|\tau-t|}$$

$$\equiv\frac{1}{\pi(ka)}\ln\frac{1}{|\tau-t|}+B_1(\tau,t). \tag{15}$$

С учетом (15) из (13) получим окончательное интегродифференциальное уравнение

$$\beta(AI)(\tau)+(KI)(\tau)=il\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0(\tau), \tag{16}$$

где

$$\beta=\frac{1}{4\pi(ka)},$$

$$(AI)(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,$$

$$(KI)(\tau)=-\frac{(kl)^2}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}B(\tau,t)I(t)dt-\frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{d\tau^2}\int\limits_{-1}^{1}B_1(\tau,t)I(t)dt.$$

Список литературы

[1] *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО „Янус“, 1975.

[2] *Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982.

[3] *Эминов С.И.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 22. С. 8–16.