

01;09

Анализ переходных процессов в потоковой радиофизической системе

© Е.Н. Егоров, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“
E-mail: Egorov@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 19 февраля 2004 г.

Проведено исследование переходных процессов в потоковой радиофизической системе третьего порядка. Исследована карта зависимости длительностей переходных процессов от начальных условий. Полученные данные сопоставлены с расположением подмногообразий устойчивого и неустойчивого циклов в сечении Пуанкаре изучаемой системы.

Как правило, основное внимание при изучении тех или иных динамических систем уделяется установившимся режимам и очень мало внимания уделяется процессам, которые предшествуют установлению в системе некоторого устойчивого динамического состояния. Однако знание того, как ведет себя изображающая точка до выхода на аттрактор, длительности этого процесса и его зависимости от управляющих параметров помогает лучше понять и объяснить явления и процессы, происходящие в системе (например, переходной хаос — явление, которое по своей сути является переходным процессом [1–3]). Достаточно подробно переходные процессы для дискретных отображений изучены в работах [4–6].

Целью настоящей работы является изучение переходных процессов в системе с непрерывным временем, а также вопрос о том, как меняется характер переходных процессов в зависимости от режима колебаний и расположения многообразий седловых циклов в фазовом пространстве.

Изучаемая система представляет собой двухконтурный радиофизический автогенератор, описанный в статье Л. Чуа с соавторами [7]. Поведение исследуемого автогенератора описывается следующей систе-

мой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{(\alpha - 1)f(x) - z}{\gamma}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\alpha f(x)}{\gamma}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \gamma(x + y),\end{aligned}\quad (1)$$

где α и γ — управляющие параметры, а $f(x)$ — безразмерная функция, описывающая вольт-амперную характеристику нелинейного элемента автогенератора, вида

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}(|x + 1| - |x - 1|). \quad (2)$$

Вольт-амперная характеристика (2) представляет собой трехсегментную кусочно-линейную функцию. Эта система достаточно хорошо изучена [8–11] и, несмотря на простоту схемного решения и вида характеристической функции нелинейного элемента, может демонстрировать сложнопериодические, квазипериодические, а также хаотические колебания при отсутствии внешнего воздействия [8]. В работе рассматриваются значения управляющих параметров, для которых система демонстрирует явление мультистабильности [9,10]. При значениях управляющих параметров $\alpha = 1.5$, $\gamma = 3.0$ в системе при различных начальных условиях реализуются колебания с периодом 7, 8 или 15.

Зависимость длительностей переходных процессов от начальных условий строилась в сечении Пуанкаре фазового пространства системы плоскостью $z = 0$. Поскольку использование процедуры сечения Пуанкаре сводит потоковую n -мерную систему к $(n - 1)$ -мерной системе с дискретным временем [12], то для определения длительности переходного процесса можно использовать метод, апробированный для отображений [4,5]: для всех значений начальных условий (x_0, y_0) производился обсчет фазовой траектории длиной в некоторое число итераций методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0.005 и, таким образом, определялась некоторая последовательность точек пересечения фазовой траектории с плоскостью сечения Пуанкаре. Априори считалось, что по истечении этого достаточно большого числа итераций переходный процесс уже завершен. Далее полученная последовательность точек пересечения проверялась на совпадение координат точек с некоторой

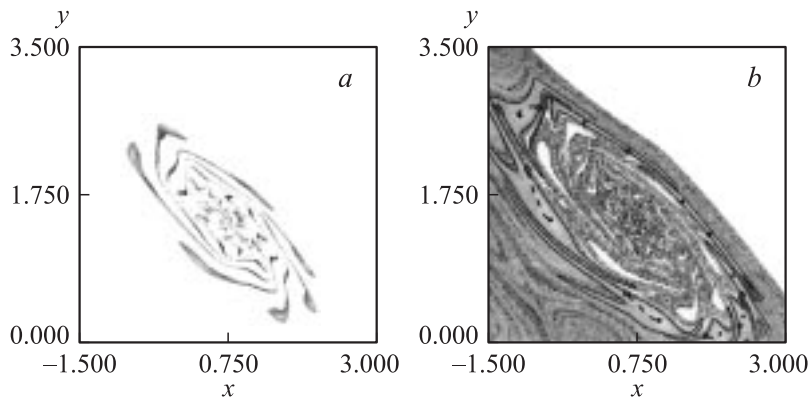


Рис. 1. Вид зависимости длительности переходного процесса от начальных условий для циклов с периодом 7 (*a*) и 8 (*b*). Более светлые участки обозначают более короткие переходные процессы, более темные — более длительные переходные процессы соответственно. *b* — сплошными линиями обозначены устойчивые многообразия седлового цикла 1:8, пунктирными — неустойчивые многообразия (чтобы не загромождать рисунок изображены не все неустойчивые многообразия). Черные точки — точки устойчивого цикла, светлые — седлового цикла. Область, отмеченная единицей, соответствует начальным условиям, стартуя с которых фазовая траектория „уходит“ на бесконечность.

заданной точностью. Если при проверке не обнаруживалось точек с совпадающими координатами, выбирался более длительный переходный процесс и вся процедура повторялась до тех пор, пока не определялся режим, на который выходит система.¹ Период цикла, на который вышла изображающая точка, определяется по количеству точек сечения Пуанкаре между двумя точками с совпадающими координатами, а количество итераций, осуществленных к этому моменту, умноженное на шаг по времени, дает длительность переходного процесса. Различия в длительности отмечались на карте с помощью градации серого цвета.

На рис. 1, *a, b* представлены зависимости длительности переходных процессов от начальных условий для циклов периода 7 и 8 соответственно. Видно, что на этих картах присутствуют более и менее

¹ Методика определения длительности переходного процесса в хаотическом режиме описана в [5,6].

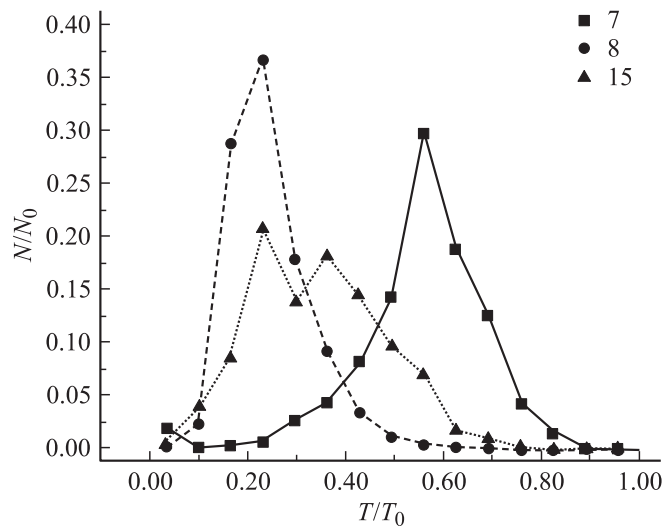


Рис. 2. Нормированное распределение точек бассейнов притяжения по интервалам длительностей переходных процессов для различных циклов. Нормировка проводилась по максимальным значениям длительностей переходных процессов (T/T_0) для данного цикла и по количеству точек в том или ином бассейне (N/N_0). Треугольниками обозначен цикл 1:8, нормирован на $T_0 = 3130$, $N_0 = 420\,900$; кружки — цикл 1:7, нормирован на $T_0 = 1519$, $N_0 = 36\,339$; квадраты — 2:15, нормирован на $T_0 = 3681$, $N_0 = 72\,198$.

интенсивно окрашенные области. При этом более темные районы расположены у краев закрашенных областей, а более светлые — внутри. Переходным процессам с меньшей длительностью соответствуют светлые области, более длинным — темные.

Исследовался также вопрос о том, какие длительности (более длинные или более короткие) преобладают при данных значениях управляющих параметров для каждого из режимов колебаний. Для этого строилось распределение начальных условий (x_0, y_0) , лежащих в сечении Пуанкаре (N) по интервалам длительностей переходных процессов (ΔT): выбирался некоторый интервал длительности переходных процессов $|T, T + \Delta T|$ и подсчитывалось количество начальных условий бассейна притяжения в сечении Пуанкаре, для которых длительности переходных процессов попадали в заданный интервал. Графики данной зависимости приведены в нормированном виде на рис. 2. По оси абсцисс

величины нормировались на максимальную длительность переходного процесса (T_0), а по оси ординат — на общее количество точек данного бассейна притяжения аттрактора (N_0). При такой нормировке площадь под кривой равна единице. Видно, что пики распределений для циклов периода 8 и 15 смещены в области меньших значений длительности, т.е. для этих циклов преобладают относительно короткие переходные процессы (длительности для различных циклов при этом изменяются в различных, более или менее широких диапазонах). Это подтверждается, в частности, видом рис. 1, *b* для цикла 1:8. Наиболее темные области на этом рисунке (т.е. области, для которых длительности переходных процессов имеют наибольшие значения) занимают на этом рисунке наименьшую площадь. Это связано с расположением устойчивых многообразий неустойчивых (седловых) циклов, формирующих границы бассейнов притяжения аттракторов. Расположение пика распределения для цикла 1:7 ближе к середине диапазона длительностей может быть связано с тем, что сам по себе бассейн притяжения для данного цикла невелик по сравнению с бассейнами притяжения других циклов (общее количество точек, по которым строилось распределение для данного цикла порядка 36 000, в то время как для цикла 1:8 их число в десять раз больше, а для цикла 2:15 количество точек распределения больше в два раза) и основная его часть при этом лежит в области, удаленной от области расположения притягивающего цикла. То есть множество изображающих точек с начальными условиями, удаленными от предельного цикла, затрачивают достаточно длительное время на переход к притягивающему множеству. Другой особенностью приведенного распределения является наличие двух „горбов“ в распределении для цикла 2:15. Это также может быть связано с особенностями строения данного бассейна притяжения, который сильно рассеян по всему сечению Пуанкаре. Другой возможной причиной подобной неравномерности могла быть бедность статистики, однако в ходе работы проводился расчет карты длительностей с числом начальных условий, различающимся в четыре раза, при этом никаких кардинальных изменений в распределении не наблюдалось. Поэтому вполне оправданно говорить о том, что подобный вид распределения есть свойство самой системы.

На рис. 1, *b* представлено расположение устойчивых и неустойчивых многообразий седлового предельного цикла 1:8 в сечении Пуанкаре. Вблизи неподвижной точки многообразие будет представлять собой отрезок прямой, который совпадает с собственным вектором матрицы

монодромии [13]. „Набрасывая“ в его окрестности некоторое количество точек и прослеживая их эволюцию, можно в общем виде определить расположение многообразий (более строгие способы построения многообразий можно найти в [14]). Сплошными линиями показаны устойчивые многообразия, пунктирными — неустойчивые. При этом точки пересечения неустойчивого седлового цикла и плоскости сечения Пуанкаре обозначены незакрашенными кружками, закрашенными — точки пересечения плоскости $z = 0$ и устойчивого цикла. На данном рисунке видно, что наиболее темные области зависимости переходных процессов совпадают с устойчивыми многообразиями седлового цикла. Именно на этих участках наблюдаются наибольшие длительности переходных процессов. Это связано с тем, что движение изображающей точки по данному многообразию занимает длительное время из-за того, что при приближении к седловой точке (в данном случае это седловой цикл) по устойчивому многообразию скорость движения точки стремится к нулю. В то же время линии неустойчивых многообразий направлены в области с большими длительностями переходных процессов в области с более короткими переходными процессами, которые окружают точки пересечения устойчивого цикла и сечения Пуанкаре. При этом устойчивое многообразие соединяет устойчивый и неустойчивый седловой циклы. Как бы близко ни была изображающая точка к неустойчивому циклу или его устойчивому многообразию, она достаточно быстро придет к устойчивому циклу. То есть лишь небольшое число изображающих точек, которые начинают движение из начальных условий, расположенных в ближайшей окрестности устойчивого многообразия, совершают действительно длинные „переходы“. Этот вывод подтверждается тем, что в распределении длительностей переходных процессов преобладают более короткие переходные процессы (рис. 2).

Таким образом, в работе проведено исследование переходных процессов в потоковой радиофизической системе третьего порядка — автогенераторе семейства Чуа, детально выяснена карта длительностей переходных процессов на плоскости сечения Пуанкаре в области значений управляющих параметров, при которых система демонстрирует мультистабильность, а также приведено распределение количества точек начальных условий по длительностям переходных процессов. При этом были выявлены особенности распределения переходных процессов для бассейнов притяжения различных циклов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02–02–16351), программы „Университеты России. Фундаментальные исследования“ (проект УР.01.01.065), программы поддержки ведущих научных школ РФ и ФЦП „Интеграция“ Б 0057.

Список литературы

- [1] *Imre M., Janosi, Tamas Tel* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. N 4. P. 2756–2763.
- [2] *Liqiang Zhu, Arving Raghu, Ying-Cheng Lai* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. N 18. P. 4017–4020.
- [3] *Grebogi C., Ott E., James A. Yorke* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 13. P. 935–938.
- [4] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // Докл. РАН. 2002. В. 386. № 3. С. 322–325.
- [5] *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. ПНД. 2002. Т. 10. № 5. С. 25–31.
- [6] *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. № 8. С. 32–40.
- [7] *Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R.* // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1987. V. 34. N 3. P. 240.
- [8] *Кипчатов А.А., Короновский А.А.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. В. 2, 3. С. 17–23.
- [9] *Андрушкевич А.В. и др.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII. № 11. С. 1195–1203.
- [10] *Егоров Е.Н., Короновский А.А.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. № 1, 2. С. 104–112.
- [11] *Anishchenko V.S.* // World scientific series on nonlinear science — Series A. V. 8. World scientific. Singapure, New Jersey, London, Hong Kong, 1995.
- [12] *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
- [13] *Ефимов Н.В.* Квадратичные формы и матрицы. М.: Физматгиз, 1963. С. 126–130.
- [14] *Kostelich E.J., Yorke J.A., You Z.* // Physica D. 1996. V. 93. P. 210–220.