

09

Время покрытия аттрактора, временная размерность и ее связь с емкостной размерностью

© А.А. Короновский, А.В. Стародубов, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“

E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 22 апреля 2003 г.

Исследуется зависимость времени полного покрытия хаотического аттрактора ячейками от размера этих ячеек. Показано, что исследуемая зависимость с хорошей степенью точности описывается степенным законом. Для описания аттрактора системы вводится новая величина, названная временной размерностью, по аналогии с емкостной размерностью. Изучено, каким образом эти величины соотносятся между собой, и показано, что для однородного хаотического аттрактора, характеризующегося равномерным инвариантным распределением плотности вероятности, эти величины совпадают. В случае неоднородного хаотического аттрактора временная размерность оказывается больше емкостной.

Изучение переходных процессов является важной, а иногда и первоочередной задачей при анализе динамики многих систем, так как в ряде случаев переходный процесс несет важную информацию о системе и ее динамике в целом [1–4]. В том случае, если динамическая система демонстрирует периодическое во времени поведение, существует достаточно простой и эффективный метод анализа переходного процесса [5–7], используемый для отображений. Этот метод может также быть применен к потоковым системам с помощью сечения Пуанкаре [8]. Однако, если система демонстрирует сложные хаотические колебания, анализ переходных процессов сильно затрудняется [9]. Сложность в основном заключена в определении длительности переходного процесса, которое основано на построении „опорного“ массива ячеек аттрактора [10]. Предлагаемая в этом случае в работах [9,10] методика следующая: область начальных условий, где расположен аттрактор, покрывается сеткой (одномерной, двумерной

или n -мерной в зависимости от размерности динамической системы) с размером ячейки ε . Исследуемая система итерируется достаточно большое число раз N , заведомо большее, чем максимальная предполагаемая длительность переходного процесса. В процессе итерирования изображающая точка движется по сетке, описывая аттрактор, попадая в те или иные ячейки сетки. Начиная с некоторого момента дискретного времени, когда переходный процесс считается завершенным, ячейки, в которые попала исходная точка в результате итерирования (эти ячейки принадлежат хаотическому аттрактору), подсчитываются. После завершения процесса итерирования получается „опорный“ массив ячеек аттрактора, на основе которого определяется длительность переходного процесса [10].

Для корректного определения длительности переходного процесса желательно найти как можно большее количество ячеек аттрактора. В качестве величины, характеризующей время, необходимое для поиска „опорного“ массива, введем *время покрытия* аттрактора $T_c(\varepsilon)$, под которым для динамических систем с дискретным временем будем понимать число итераций, необходимое для полного покрытия ячейками размера ε всех элементов хаотического аттрактора, усредненное по большому числу начальных условий.

Таким образом, время покрытия связано с количеством ячеек аттрактора, поскольку при уменьшении размера ячейки ε количество ячеек покрывающей аттрактор сетки возрастает, следовательно возрастает и общее количество ячеек аттрактора. Как следствие, возрастает время, необходимое для отыскания ячеек аттрактора. Исследуем зависимость времени покрытия аттрактора $T_c(\varepsilon)$ от величины ε на примере логистического отображения

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (1)$$

являющегося эталонной моделью нелинейной динамики и теории колебаний. Величина λ является управляющим параметром, который определяет режимы колебаний. В настоящей работе использовалось значение параметра $\lambda = 3.58$, при котором в системе (1) реализуется хаотический режим колебаний.

На рис. 1 приведена зависимость времени покрытия хаотического аттрактора $T_c(\varepsilon)$ от размера ячейки покрытия ε . Данная зависимость была получена усреднением по ста наблюдениям с различными начальными условиями для каждого значения ε . Следуя определению, для каждого ε временем покрытия считался номер итерации, при которой была получена последняя ячейка аттрактора, далее итерирование продолжалось

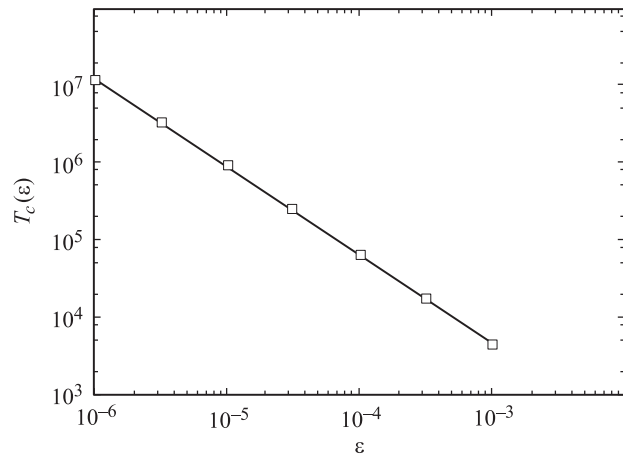


Рис. 1. Зависимость времени покрытия аттрактора $T_c(\epsilon)$ от ϵ для управляющего параметра $\lambda = 3.58$. Результат усреднен по 100 начальным условиям для каждого значения ϵ при количестве итераций для каждого начального условия $N = 10^9$. Символы \square соответствуют результатам численного моделирования, сплошная линия — степенная зависимость (2) с показателем степени $a = 1.1375 \pm 0.002$.

еще достаточно большое число единиц дискретного времени, чтобы убедиться, что хаотический аттрактор покрыт полностью и добавления новых ячеек аттрактора в опорный массив не происходит. После этого определялось время покрытия аттрактора для того же самого значения ϵ и других начальных условий, а затем усреднялось по большому числу измерений.

Из рисунка видно, что зависимость $T_c(\epsilon)$ с хорошей степенью точности описывается степенным законом

$$T_c(\epsilon) \sim \epsilon^{-a}. \quad (2)$$

Для выбранного значения управляющего параметра λ степенной коэффициент, определенный по методу наименьших квадратов, имеет значение $a = 1.1375 \pm 0.002$.

Очевидно, что при изменении значения параметра λ аттрактор системы изменится, соответственно изменится его время покрытия $T_c(\epsilon)$, а следовательно, неизбежно изменится и коэффициент a . Таким образом, время покрытия и степенной коэффициент a являются неотъемлемыми характеристиками хаотического аттрактора.

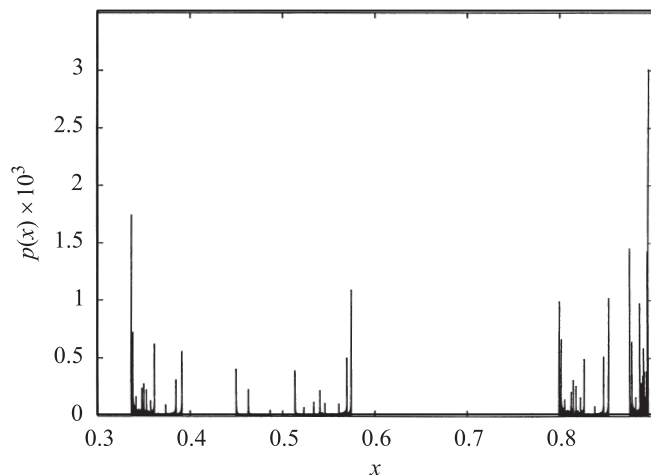


Рис. 2. Инвариантное распределение плотности вероятности посещения ячеек аттрактора $p(x)$ в логистическом отображении для значения управляющего параметра $\lambda = 3.58$. Распределение получено за $N = 10^9$ единиц дискретного времени. Шаг дискретизации сетки $\varepsilon = 10^{-5}$.

Так как увеличение времени покрытия при уменьшении ε связано с увеличением количества ячеек аттрактора, то степенной коэффициент в соотношении (2) может быть связан с емкостной размерностью D_0 [11], потому что именно данная характеристика определяет изменение количества ячеек аттрактора при изменении размера ячейки ε , покрывающей аттрактор сетки. Зависимость количества ячеек аттрактора от величины ε определяется следующим образом [11]:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}, \quad (3)$$

где $N(\varepsilon)$ — количество ячеек сетки, которые покрывают аттрактор при шаге дискретизации сетки, равном ε ; D_0 — емкостная размерность аттрактора. Логарифмируя соотношение (3) и устремляя ε к нулю, можно получить явное выражение для емкостной размерности

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (4)$$

где основание логарифма произвольное. По аналогии с емкостной размерностью D_0 можно ввести в рассмотрение величину τ_0 , которую

будем называть „временной размерностью“

$$\tau_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log T_c(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (5)$$

и которая будет характеризовать зависимость времени покрытия аттрактора $T_c(\varepsilon)$ от размера ячейки покрытия ε . Похожий подход используется при изучении времени возврата изображающей точки в малую окрестность некоторой фиксированной точки [12], когда в рассмотрение вводится спектр обобщенных размерностей времен возврата.

Так как обе характеристики аттрактора τ_0 и D_0 связаны с количеством ячеек аттрактора, представляется интересным рассмотреть вопрос о том, как эти величины соотносятся между собой. Сопоставление емкостной D_0 и временной размерностей τ_0 приводит к выводу о том, что величина τ_0 оказывается больше, чем величина емкостной размерности D_0 (для изучаемой системы $D_0 = 0.9983 \pm 0.0001$ при $\lambda = 3.58$).

Можно предположить, что причина, лежащая в основе неравенства τ_0 и D_0 , заключена в неоднородности существующего в фазовом пространстве системы аттрактора.¹ Действительно, существуют ячейки аттрактора (или области, состоящие из ячеек аттрактора), которые посещаются изображающей точкой довольно редко, в то время как другие ячейки (области ячеек) аттрактора посещаются чаще. Этот факт иллюстрирует рис. 2, на котором представлено инвариантное распределение плотности вероятности посещения ячеек аттрактора изображающей точкой для рассматриваемой системы. Из рисунка видно, что существуют ячейки, вероятность посещения которых меньше, чем всех остальных. При уменьшении величины ε число ячеек аттрактора возрастает в соответствии с соотношением (3). Если бы аттрактор был однородным, т.е. инвариантное распределение плотности вероятности было равномерным ($p(x) = \text{const}$), то можно было бы ожидать, что увеличение времени покрытия аттрактора $T_c(\varepsilon)$ будет соответствовать увеличению числа ячеек $N(\varepsilon)$, а следовательно, для однородного аттрактора временная размерность τ_0^h может совпадать с емкостной размерностью D_0^h .

¹ В данном случае под неоднородностью мы понимаем тот факт, что разные точки аттрактора характеризуются различной вероятностью посещения их изображающей точкой.

Действительно, предположим, что некоторая динамическая система с дискретным временем $x_{n+1} = f(x_n)$ характеризуется однородным хаотическим аттрактором с емкостной размерностью D_0 и инвариантным распределением плотности вероятности $p(x) = \text{const}$. Количество ячеек аттрактора будет зависеть от величины ε в соответствии с соотношением (3) как $N(\varepsilon) = N_0 \varepsilon^{-D_0}$. Тогда вероятность посещения отдельной ячейки аттрактора будет составлять

$$P = (1/N_0)\varepsilon^{D_0^h}. \quad (6)$$

Далее, учитывая высокую степень зависимости динамики системы, находящейся в режиме хаотических колебаний, от начальных условий и сделанное ранее предположение об однородности аттрактора, будем полагать, что вероятность того, что изображающая точка в n -й момент дискретного времени попадет в какую-либо фиксированную ячейку аттрактора, слабо зависит от того, в какой ячейке аттрактора находилась изображающая точка в $(n-1)$ -й момент дискретного времени, и определяется в соответствии с соотношением (6). Тогда вероятность P_k того, что весь аттрактор будет покрыт ячейками за k итераций, будет составлять

$$P_k = N_0 \varepsilon^{-D_0^h} \exp\left(-\frac{k}{N_0 \varepsilon^{-D_0^h}}\right), \quad (7)$$

а условие того, что время покрытия аттрактора $T_c(\varepsilon) = K$ будет иметь вид $P_K = 1$. Следовательно, для рассматриваемого случая время покрытия аттрактора $T_c(\varepsilon)$ будет определяться как

$$T_c(\varepsilon) = N_0 \varepsilon^{-D_0^h} \ln(N_0 \varepsilon^{-D_0^h}). \quad (8)$$

Тогда в соответствии с определением временной размерности (5)

$$\tau_0^h = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_0 \varepsilon^{-D_0^h} \ln(N_0 \varepsilon^{-D_0^h}))}{\ln \varepsilon} = D_0^h. \quad (9)$$

Таким образом, в случае однородного хаотического аттрактора, характеризующегося равномерным инвариантным распределением плотности вероятности, временная и емкостная размерность совпадают. В случае неоднородного аттрактора ситуация будет иной: как правило, прежде всего будут покрыты ячейки аттрактора, характеризующиеся наибольшими значениями вероятности, а ячейки аттрактора с наименьшей вероятностью посещения будут в большинстве своем покрываться

позже. Учитывая неоднородность аттрактора, время покрытия будет больше по сравнению с однородным аттрактором. Следовательно, на графике зависимости $T_c(\varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе увеличивается угол наклона, что приводит к увеличению значения временной размерности τ_0 по сравнению с временной размерностью однородного аттрактора τ_0^h . Поэтому, по всей видимости, величина временной размерности τ_0 будет всегда больше D_0 в том случае, если аттрактор неоднороден. Следует отметить, что аналогичный вывод о том, что спектр обобщенных размерностей времен возврата не совпадает со спектром обобщенных размерностей, содержится в [12]. Таким образом, в работе предложены характеристики аттрактора для дискретных динамических систем, такие как время покрытия аттрактора $T_c(\varepsilon)$ и временная размерность τ_0 , установлена связь между найденными характеристиками с емкостной размерностью D_0 .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01-02-17392 и 02-02-16351) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ.

Список литературы

- [1] Астахов В.В. и др. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38 (2). С. 291–295.
- [2] Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9 (3). С. 3–14.
- [3] Bezruchko V.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A. // Phys. Rev. 2001. E 64. P. 036210.
- [4] Triandaf I., Bollt E.M., Schwartz I.B. // Phys. Rev. 2003. V. E 67. P. 037201.
- [5] Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11.
- [6] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Докл. РАН. 2002. Т. 383 (3). С. 322–325.
- [7] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV (10). С. 880–886.
- [8] Hénon M. // Physica. 1982. D5. P. 412–414.
- [9] Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10 (5). С. 25–31.
- [10] Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 8. С. 32–40.
- [11] Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. „Современная теория колебаний и волн“. М.: Физматлит, 2001.
- [12] Hadyn N., Luevano J., Mantica G., Vaienti S. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88 (22). P. 224502.