

09

Символический анализ в пространстве „скорость—кривизна“ структуры хаоса в режиме синхронизации

© А.В. Макаренко

Научно-исследовательская группа „Конструктивная кибернетика“,
Москва
E-mail: avm.science@mail.ru

Поступило в Редакцию 19 сентября 2011 г.

Предложен новый способ символического анализа через конечную дискретизацию пространства „скорость—кривизна“. Естественным образом введен в рассмотрение минимальный алфавит. Над ним определен ряд исходных аналитических мер, позволяющих изучать структуру динамики дискретных отображений. Проведено тестирование метода на примере двух однонаправленно связанных логистических отображений. Показано, что данный метод позволяет обнаруживать и изучать перестройку структуры аттракторов. Исследованы особенности структуры аттрактора ведомой системы тестового примера при выходе из режима полной синхронизации.

Символическая динамика [1–4] является эффективным инструментом анализа динамических систем, заданных дискретными отображениями вида

$$s_{k+1} = f(s_k \dots s_{k-r}, \mathbf{p}), \quad s \in S \subset \mathbb{R}, \quad k \in K \subseteq \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где \mathbf{p} — вектор коэффициентов; r — параметр памяти системы, $r \geq 0$. Отображение Пуанкаре [5] позволяет эффективно изучать также и непрерывные системы (потoki).

Название отражает основную идею метода: описание динамики системы (1) в пространстве S при помощи допустимых последовательностей символов (допустимых слов) $\{C_k\}_{-\infty}^{\infty}$ из конечного или бесконечного набора символов (алфавита) J посредством кодировки траекторий $\{s_k\}_{-\infty}^{\infty}$ [4]. В настоящее время символическая динамика позволяет исследовать такие сложные явления в динамических системах, как: хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость и т.п. Имеется и прикладной аспект ее применения [6,7].

Компьютерно-ориентированный метод описания динамических систем в терминах конечных алфавитов предложил Ч. Шу [8] — метод „отображение ячейка–ячейка“, и его обобщенный вариант, приводящий к конечным марковским цепям.

Г.С. Осипенко ввел понятие символического образа динамической системы относительно конечного покрытия [9,10]. Под символическим образом понимается ориентированный граф, у которого вершина i соответствует ячейке $M_i \in S$, а ребро $i \rightarrow j$ существует, если в M_i найдется точка s , образ $f(s)$ которой лежит в M_j .

М. Делниц с соавторами разработали технику подразбиений для численного исследования динамических систем [11,12]. Суть этого метода заключается в том, чтобы, следуя определенным условиям, исключать из рассмотрения ненужные ячейки M_i и проводить более мелкое подразбиение остальных ячеек. При этом более мелкое покрытие порождает более точную аппроксимацию.

Для изучения свойств систем вида (1) алфавит символической динамики обычно определяют над пространством S , разбивая его на ячейки M_i по тем или иным правилам [3,4,8,9,11], но подобная дискретизация обладает рядом недостатков:

1. Алфавит неинвариантен к преобразованиям сдвига и масштаба $as + b \rightarrow s$, что сужает его аналитические возможности по изучению систем с мультипликативной или/и аддитивной нестационарностью.

2. Определение символов в виде разбиения пространства S на ячейки M_i нельзя назвать однозначным, поэтому, как правило, под каждую систему требуется собственная схема разбиения.

3. Существуют различные правила подстановки символа при попадании траектории на границу ячейки. Подобная неопределенность может приводить к различным трактовкам вероятностных мер, определенных над разбиением пространства S на ячейки M_i .

4. Количество символов в алфавите подбирается эмпирически, отсутствует формализованный критерий минимальной мощности разбиения. Следовательно, затруднительно априорно оценить информационную компактность и информативность алфавита.

При задании алфавита символической динамики возможно перейти от разбиения пространства S к разбиению пространства „скорость–кривизна“ [13]: $A \times \Phi_0$, $A \ni \alpha^T$, $\Phi_0 \ni \varphi_0^T$. Для функций $g(t)$, таких, что $g \in C^2(T)$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, величины α^T — скорость и φ_0^T — кривизна выражаются в виде гладких функций [13], а для дискретных отображений вида (1) величины α^T и φ_0^T определим через конечные разности

$$\alpha^T = c_{ss}\dot{g}, \quad \varphi_0^T = \frac{c_{ss}c_{as}\ddot{g}}{1 + c_{ss}^2\dot{g}^2}, \quad \alpha_k^T = c_{ss}(s_{k+1} - s_k),$$

$$\varphi_{0,k}^T = c_{as} \operatorname{tg} \frac{\arctg \alpha_k^T - \arctg \alpha_{k-1}^T}{2}, \quad (2)$$

где точка сверху обозначает производную по переменной t , а коэффициенты c_{ss} , $c_{as} > 0$.

Исходя из определения (2), на пространстве $A \times \Phi_0$ для величин α^T и φ_0^T можно вполне естественно ввести минимальный конечный, однозначный алфавит, который свободен от недостатков, указанных выше. Алфавиты C^α и C^φ для компонент α^T и φ_0^T соответственно определим в виде:

$$C_k^\alpha = \begin{cases} \text{U } \alpha_k^T > \delta_\alpha^+, \\ \text{D } \alpha_k^T < \delta_\alpha^-, \\ \text{Z } \alpha_k^T \in [\delta_\alpha^-, \delta_\alpha^+], \end{cases}$$

$$C_k^\varphi = \begin{cases} \text{L } \varphi_{0,k}^T \in [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \vee C_k^\alpha = C_{k-1}^\alpha = \text{Z}, \\ \text{E } \varphi_{0,k}^T \notin [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \wedge \{C_k^\alpha = \text{D} \wedge C_{k-1}^\alpha = \text{U}\} \vee \{C_k^\alpha = \text{U} \wedge C_{k-1}^\alpha = \text{D}\}, \\ \text{B иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что алфавит C^φ сконструирован исходя из свойств φ_0^T как кривизны [13]. Параметры δ_α^\pm и δ_φ^\pm являются управляющими для соответствующих компонент и позволяют расширить аналитические возможности алфавитов.

Из символов C^α и C^φ сформируем термы $T^{\alpha\varphi}$ и закодируем их через T_\circ :

$$T_k^{\alpha\varphi} = \begin{bmatrix} C_k^\varphi \\ C_k^\alpha \end{bmatrix}, \quad T^{\alpha\varphi} \ni T_k^{\alpha\varphi},$$

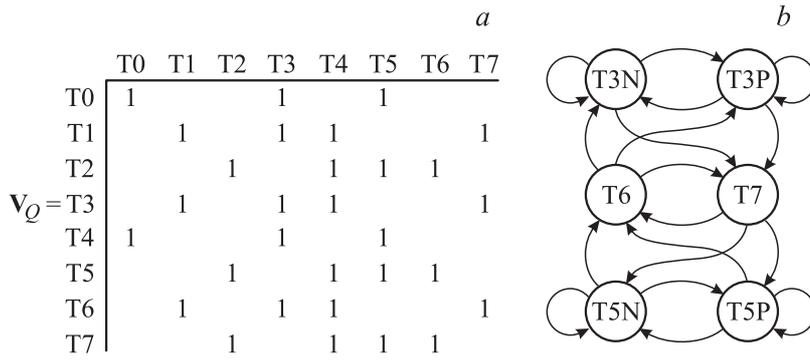


Рис. 1. *a* — матрица инцидентности V_Q . *b* — граф допустимых переходов между термами T6, T7 и субтермами TnP, TnN, $n = 3, 5$ (для $\{\xi_k\}$: $\Delta_\xi^{T6} = \Delta_\xi^{T7} \rightarrow 1/3$, $\Delta_\xi^{TnN} = \Delta_\xi^{TnP} \rightarrow 1/12$, $\Delta_\xi^{67} = \Delta_\xi^{76} \rightarrow 5/24$, $\Delta_\xi^{63N} = \Delta_\xi^{63P} = \Delta_\xi^{75N} = \Delta_\xi^{75P} \rightarrow 1/16$, $\Delta_\xi^{nNnN} = \Delta_\xi^{nPnP} = \Delta_\xi^{nNnP} = \Delta_\xi^{nPnN} \rightarrow 1/96$).

$$T^{\alpha\varphi} : \begin{matrix} & & \text{B} & \text{L} & \text{E} \\ \text{U} & \left| \begin{array}{ccc} \text{T5} & \text{T2} & \text{T7} \\ \text{T4} & \text{T0} & \text{x} \\ \text{T3} & \text{T1} & \text{T6,} \end{array} \right. & & & \end{matrix} \quad (3)$$

здесь x — недопустимая комбинация символов в терме. Определим также вспомогательный алфавит \tilde{C}^φ для обнаружения расщепления термов T3, T4, T5 на субтермы $T \circ P$ и $T \circ N$:

$$\tilde{C}_k^\varphi = \begin{cases} \text{L} & \varphi_{0,k}^T \in [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \vee C_k^\alpha = C_{k-1}^\alpha = Z, \\ \text{P} & \varphi_{0,k}^T > \delta_\varphi^+ \wedge \{C_k^\alpha \neq Z \vee C_{k-1}^\alpha \neq Z\}, \\ \text{N} & \varphi_{0,k}^T < \delta_\varphi^- \wedge \{C_k^\alpha \neq Z \vee C_{k-1}^\alpha \neq Z\}. \end{cases}$$

$$T^{\alpha\varphi} : Tn \begin{array}{c} \text{P} \quad \text{N} \\ \hline \text{TnP} \quad \text{TnN} \end{array}, \quad n = 3, 4, 5. \quad (4)$$

Сформируем V_Q — матрицу допустимых переходов между термами $T_k^{\alpha\varphi} \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}$ (рис. 1, *a*), причем 1 — это разрешенный переход между термами. Строка матрицы V_Q — это состояние $T_k^{\alpha\varphi}$, а столбец — $T_{k+1}^{\alpha\varphi}$. Переход между термами $T_k^{\alpha\varphi} \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}$ обозначим через $Q_k^{\alpha\varphi}$, $Q^{\alpha\varphi} \ni Q_k^{\alpha\varphi}$. Этот переход кодируется символами Qij , где i, j — это составные

части кодов $T i|_k$ и $T j|_{k+1}$, определенных матрицами (3) и (4). Таким образом, получим граф $\Gamma^{TQ} = \langle T^{\alpha\varphi}, Q^{\alpha\varphi} \rangle$ — расширенное подобие, в пространстве $A \times \Phi_0$, символического образа динамической системы, введенного в [9,10] для пространства S . С целью количественного оценивания характеристик структуры последовательности $\{s_k\}_{-\infty}^{\infty}$ в пространстве $A \times \Phi_0$ введем меры Δ° — частоты появления в $\{s_k\}_{-\infty}^{\infty}$ символов $T^{\alpha\varphi}$ и переходов $Q^{\alpha\varphi}$ ($0 \leq \Delta^\circ \leq 1$):

$$\Delta^{\alpha\varphi} : \Delta^{Tn} = \frac{|M^{\alpha\varphi}|}{|K|}, \quad n = \overline{0, 7}, \quad M^{\alpha\varphi} \ni T_k^{\alpha\varphi} : T_k^{\alpha\varphi} = Tn, \quad (5a)$$

$$\Delta^Q : \Delta^{Qij} = \frac{|M^Q|}{|K| - 1}, \quad i, j = \overline{0, 7}, \quad M^Q \ni Q_k^{\alpha\varphi} : Q_k^{\alpha\varphi} = Qij, \quad (5b)$$

здесь $|\circ|$ — мощность множества. В (5a) и (5b) индексы n, i, j включают также субтермы (4). Аналогичные меры возможно определить и для символов C^α, C^φ .

Отметим, что вычисление величин (5a) и (5b) делает граф Γ^{TQ} — размеченным, а производные функций $\Delta^\circ(\delta_\circ^\mp)$ по параметрам δ_\circ^\mp несут дополнительную и весьма существенную информацию о структуре $\{s_k\}_{-\infty}^{\infty}$ в пространстве $S \times K$.

Предложенный подход к определению символической динамики над пространством $A \times \Phi_0$ был применен для исследования структуры колебаний при выходе из режима полной синхронизации хаоса системы двух однонаправленно связанных логистических отображений [14,15]:

$$x_{k+1} = 4\lambda x_k(1 - x_k), \quad y_{k+1} = 4\lambda [y_k + \gamma(x_k - y_k)](1 - [y_k + \gamma(x_k - y_k)]), \quad (6)$$

где x_k, y_k — переменные состояния соответственно ведущего и ведомого процессов, $x, y \in [0, 1]$; γ — параметр связи между процессами, $\gamma \in [0, 1]$; λ — управляющий параметр, задающий режим колебаний, $\lambda \in [0, 1]$. Логистическое отображение хорошо изучено [16] и является эталонным объектом нелинейной и хаотической динамики [5].

Анализ (6) проводился при условии $\delta_\alpha^\circ = \delta_\varphi^\circ = 0$. Величины Δ° оценивались на интервале $k \in \overline{1 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5}$. Подобный сдвиг от $k = 0$ объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Кроме того, все оценки анализируемых величин усреднялись по 300 реализациям начальных условий: $x_0 = \xi_1, y_0 = \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ — некоррелированные равномерно распределенные

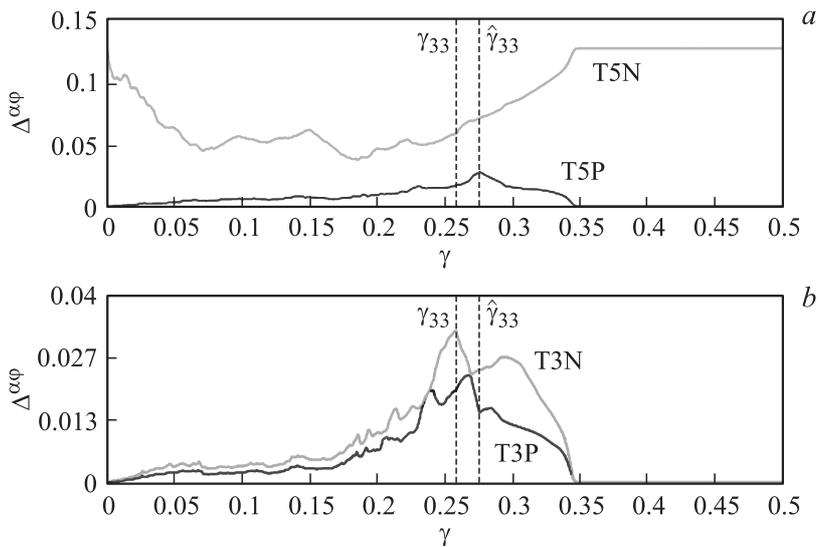


Рис. 2. Зависимость $\Delta^{\alpha\varphi}$ от значения параметра связи γ .

случайные величины. Это позволило нейтрализовать на траекториях процессов $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ эффект памяти, индуцированный начальными условиями. Значение параметра связи изменялось на интервале $\gamma \in [0, 0.5]$ с дискретой $1 \cdot 10^{-4}$. Значение управляющего параметра было принято $\lambda = 0.95$ — режим существования в (6) развитого хаоса [5]. Выбор объясняется необходимостью взаимного анализа и согласования результатов, полученных в данной работе, с результатами работ [14,15]. Граница обнаружения символов, связанная с объемом проведенных вычислений, соответствует уровню $\check{\Delta}^{\circ} = 1.(1) \cdot 10^{-8}$.

Как указано в работах [14,15], при $\gamma \leq 0.35$ начинается выход системы (6) из режима полной синхронизации, а при $\gamma = \gamma_2 = 0.14$ в системе y наблюдается перестройка аттрактора. При $\gamma = \gamma_{33} \approx 0.2606$ (рис. 2 в [15]) структура аттрактора $\{y_k\}$ также существенно отлична от таковой для свободной системы ($\gamma = 0$).

Проведенный анализ показал, что траектория ведомой системы состоит преимущественно из пикообразных импульсов (термы T6, T7) с небольшой примесью термов T3, T5 (рис. 2), что подтверждает выводы работы [15]. Причем терм T3 и субтерм T5P встречаются только

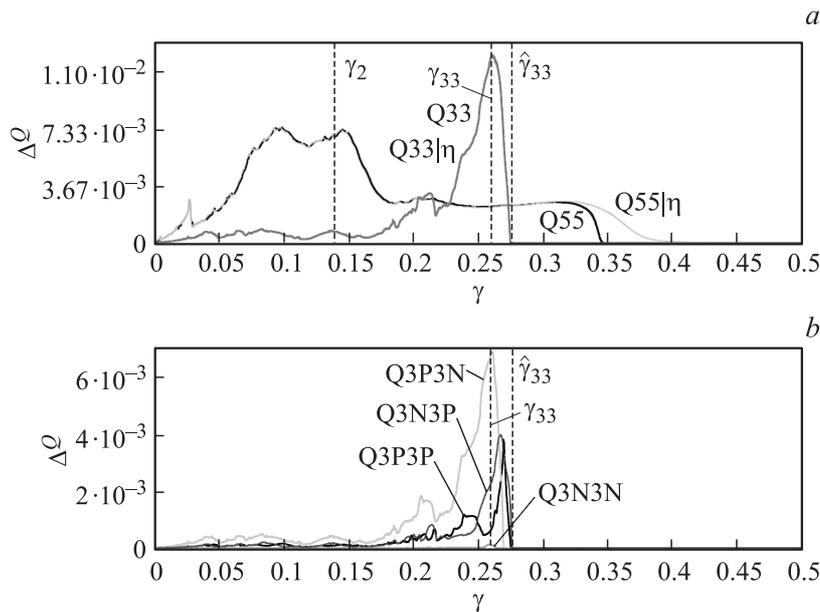


Рис. 3. Зависимость Δ^Q от значения параметра связи γ . Оценки для $Q33|\eta$ и $Q55|\eta$ получены при аддитивном подмешивании в ведомую систему малого шума: $x_k \rightarrow x_k + \eta(\xi'_k - x_k)$, $\eta = 10^{-3}$, $\xi'_k \in [0, 1]$, ξ'_k — некоррелированные равномерно распределенные случайные величины.

на интервале $\gamma \in (0, 0.35)$. Таким образом, последовательность $\{y_k\}$ существенно асимметрична относительно термов ТЗ, Т5 и их субтермов (рис. 2). При $\gamma = \gamma_{33}$ наблюдается почти максимальная концентрация субтерма ТЗН в последовательности $\{y_k\}$ ($\Delta^{ТЗН} \approx 0.03$).

Как видно из рис. 3, *a*, переход ТЗ \rightarrow ТЗ — достаточно жесткий структурный инвариант, сохраняющийся при воздействии внешнего шума с интенсивностью порядка 10^{-3} . Его доля в последовательности $\{y_k\}$ максимальна при $\gamma = \gamma_{33}$, и он полностью исчезает при $\gamma \geq \hat{\gamma}_{33} \approx 0.2755$. Изменение $\Delta^Q|\eta$ для Т5 \rightarrow Т5 в области $\gamma > \gamma_i \approx 0.3365$ вызвано негрубостью режима синхронизации на этом участке [14]. Рис. 3, *b* указывает на значительную асимметрию переходов между субтермами ТЗР и ТЗН, причем основной вклад в Δ^{33} при $\gamma = \gamma_{33}$ вносит переход ТЗР \rightarrow ТЗН. Для сравнения в подписи к рис. 1

приведены Δ° параметры $\{\xi_k\}$ — некоррелированной случайной последовательности с равномерным распределением.

Таким образом, рис. 2 и 3 наглядно демонстрируют вырождение степени стохастичности [17] колебаний логистического отображения и своеобразии структуры траектории при $\lambda = 0.95$ не только для ведомой системы $\{y_k\}$, но и для свободного осциллятора тоже ($\gamma = 0$). Это выражается в „плохом“ соотношении для термов ТЗ и Т5Р и их субтермов как по $\Delta^{\alpha\phi}$, так и по Δ^Q относительно последовательности $\{\xi_k\}$.

Итак, в данной работе предложено новое определение символической динамики через разбиение пространства $A \times \Phi_0$ и введен в рассмотрение минимальный алфавит. Данный подход свободен от недостатков символического анализа на основе алфавитов с разбиением пространства S и позволяет детально изучать форму (структуру геометрии) траекторий дискретных отображений в пространстве $S \times K$ (о важности этой характеристики см. [17] и приведенные ссылки). Продемонстрирована информативность применения символического анализа в пространстве $A \times \Phi_0$ к задачам изучения структуры колебаний синхронизирующихся динамических систем. Обнаружена существенная асимметрия в структуре колебаний исследованной системы, приводящая к вырождению степени их стохастичности. Использование предложенного аналитического инструмента позволяет раскрывать детали устройства аттрактора ведомой динамической системы, а также изучать характер внешнего воздействия на управляемую систему. Предполагается в дальнейшем расширить аналитические возможности предложенного инструментария, распространить его на многомерные системы и задачи управления хаотической динамикой и подавления хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий.

Список литературы

- [1] Morse H.M. // Amer. J. Math. 1921. V. 43 (1). P. 33.
- [2] Morse H.M., Hedlung G.A. // Amer. J. Math. 1938. V. 60 (4). P. 815. 1940. V. 62 (1). P. 1.
- [3] Birkhoff G.D. // Collected Math. Papers, Amer. Math. Soc. Provid., R.I. 1950. V. 32. P. 530.
- [4] Боуэн Р. Методы символической динамики: Сб. статей / Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 245 с. (Bowen R. // Amer. J. Math. 1973. V. 95. P. 429).

- [5] *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с. (*Tabor M.* Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: AN Introduction. Wiley-Interscience, 1989. 384 p.).
- [6] *Balakrishnan G., Shoeb A., Syed Z.* // IEEE EMBC. 2010. 4683.
- [7] *Douglas L., Brian M.* An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding. Publisher: Cambridge University Press, 1996.
- [8] *Hsu C.S.* Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems. N.Y.: Springer-Verlag, 1987.
- [9] *Osipenko G.S., Komarchev I.* // WSSIAA. 1995. V. 4. P. 573.
- [10] *Osipenko G.S., Ilyin I.V.* // Proceedings of Dynam. Sys. and App. 1996. V. 2. P. 451.
- [11] *Dellnitz M., Hohmann A.* // Numerische Mathematik. 1997. V. 75 (3). P. 293.
- [12] *Dellnitz M., Junge O.* // Comput. Visual. Sci. 1998. V. 1 (2). P. 63.
- [13] *Макаренко А.В.* // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. 2006. № 4. С. 71–86.
- [14] *Шабунин А.В., Демидов В.В., Астахов В.В., Анищенко В.С.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 11. С. 78.
- [15] *Макаренко А.В.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 16. С. 86.
- [16] *May R.M.* // Nature. 1976. V. 261. P. 459.
- [17] *Лоскутов А.Ю.* // УФН. 2010. Т. 180 (12). С. 1305.