

01

Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре

© В.С. Анищенко, М.Е. Хайрулин

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 10 февраля 2011 г.

Рассматривается влияние шума на характеристики времен возврата Пуанкаре в одномерном отображении с квазиаттрактором. Обосновывается справедливость теоремы Каца применительно к зашумленным системам. Приводятся результаты расчета распределений времен возврата в системе с шумом.

Динамические системы со сложным характером траекторий можно описывать с точки зрения геометрии предельных множеств в фазовом пространстве, а также эволюцией фазовых траекторий во времени. Одной из фундаментальных особенностей временной динамики систем является так называемый возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что любая траектория, стартующая из некоторой точки x_0 , во времени бесконечное число раз пройдет сколь угодно близко от начального состояния [1]. Такие движения в динамических системах Пуанкаре назвал устойчивым по Пуассону [1,2]. Примером подобных систем являются системы, реализующие режим странного аттрактора. Фазовые траектории на странном аттракторе всегда неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону. Анализ проблемы возврата Пуанкаре посвящено очень большое количество работ, библиографию которых можно найти в [3], например. Однако не все вопросы, в особенности касающиеся ряда прикладных проблем, исследованы в полной мере. Одним из них является вопрос о влиянии флуктуаций в устойчивых по Пуассону системах на характеристики возвратов Пуанкаре, рассматриваемый в нашей работе.

Для хаотических динамических систем, которые в силу наличия перемешивания заведомо эргодические, справедлива лемма Каца [4], где доказано, что среднее время возврата в ε -окрестность точки x_0 обратно

пропорционально вероятности

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle = P^{-1}(x_0 \pm \varepsilon/2), \quad (1)$$

где $P(x_0 \pm \varepsilon/2) \cong p(x_0) \cdot \varepsilon$, $p(x_0)$ — плотность распределения вероятностей в точке $x = x_0$. В работе [5] приведена приближенная оценка для среднего времени возврата, совпадающая с выражением (1). Отметим, что (1) справедливо для индивидуальных траекторий системы, стартующих из некоторой начальной точки на аттракторе. Такой подход мы будем называть „точечным“.

Наиболее общее выражение для среднего времени возврата Пуанкаре, вычисленного по множеству всех траекторий, обсуждается в [6,3]:

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle = \phi^{-1}(\varepsilon^{d/\alpha_c}), \quad (2)$$

где ε — малая окрестность $\varepsilon \ll 1$, d — размерность фазового пространства, α_c — некоторый коэффициент, связанный с размерностью Песина, а функция ϕ может иметь различный вид, определяемый топологической энтропией системы [6]. Наиболее часто выражения для средних по множеству траекторий времен возврата имеют вид

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{d/\alpha_c}, \quad (3)$$

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_c} \ln \varepsilon. \quad (4)$$

Результаты (2)–(4) получены на основе анализа ансамблей траекторий и характеризуют множество фазовых траекторий системы в целом. Такой подход к проблеме возвращаемости Пуанкаре мы будем называть „теоретико-множественным“. На основе этого подхода в [3,6] делается вывод, что для хаотических систем справедливо выражение (4), что подтверждено в работе [7].

Представляется важным выяснить, какое из выражений (1), (3) или (4) и в каких случаях является верным? Кроме того, интересно с прикладной и теоретической точек зрения ответить на вопрос о влиянии шума на времена возврата Пуанкаре. Ответу на эти вопросы и посвящена настоящая работа.

Как следует из (1), основной характеристикой, определяющей времена возврата в окрестность точки x_0 , является вероятностная мера $p(x)$ на аттракторе. Хаотическая система с квазиаттрактором

характеризуется как правило множеством вероятностных мер, которые в строгом смысле нужно рассматривать только в присутствии ограниченного шума. В этом случае мера $p(x)$ существует и меняется при вариации параметров системы и интенсивности шумового воздействия. В качестве примера системы с квазиаттрактором выберем кубическое отображение:

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp\left(-\frac{x_n^2}{B}\right) + \sqrt{2D} \xi(n), \quad (5)$$

где α — управляющий параметр, $B = 10$ — коэффициент в экспоненциальном сомножителе, введенном для ограничения степени роста переменной x_n , D — интенсивность шума, $\xi(n)$ — источник ограниченного белого шума. Особенностью системы (5) является сосуществование множества симметричных хаотических аттракторов, претерпевающих внутренние бифуркации и кризисы при изменении параметров α и D . Нас будет интересовать кризис объединения двух симметричных аттракторов в единый, который индуцирует шумом при фиксированном $\alpha = 2.7$ [8]. Для иллюстрации эволюции плотности распределения $p(x, D)$ в системе (5) при $\alpha = 2.7$ рассмотрим графики, приведенные на рис. 1. Как видно из рис. 1, при $D \leq 10^{-4}$ в системе (5) реализуются два симметричных ($x_n \rightarrow -x_n$) аттрактора. При $D \cong 10^{-3}$ аттракторы объединяются в один. Из рис. 1 видно, что с ростом интенсивности D форма функции $p(x_n)$ заметно эволюционирует. Мы покажем, что это вызывает соответствующие изменения количественных характеристик времени возврата. Отметим, что в численных экспериментах плотность $p(x_n)$ определялась приближенно:

$$p(x_n) = \frac{\Delta P(x_n \pm \Delta x_n/2)}{\Delta x_n}, \quad (6)$$

где ΔP — вероятность попадания траектории в интервал переменной x_n , $\Delta x_n \leq 10^{-3}$ — величина интервала. Данные расчета $p(x_n)$ (6) для всей области определения x_n нормировались так, чтобы сумма всех вероятностей была равна единице.

Выберем пять характерных точек аттрактора системы (5), которым отвечают различные плотности вероятностей $p(x_0^i)$, $i = 1, 2 \dots 5$; $x_0^1 = 0.37$, $x_0^2 = 0.65$, $x_0^3 = 0.95$, $x_0^4 = 1.25$ и $x_0^5 = 1.46$. Рассчитаем средние времена возврата $\langle \tau_r(x_0^i \pm \varepsilon/2) \rangle$ в ε -окрестности выбранных

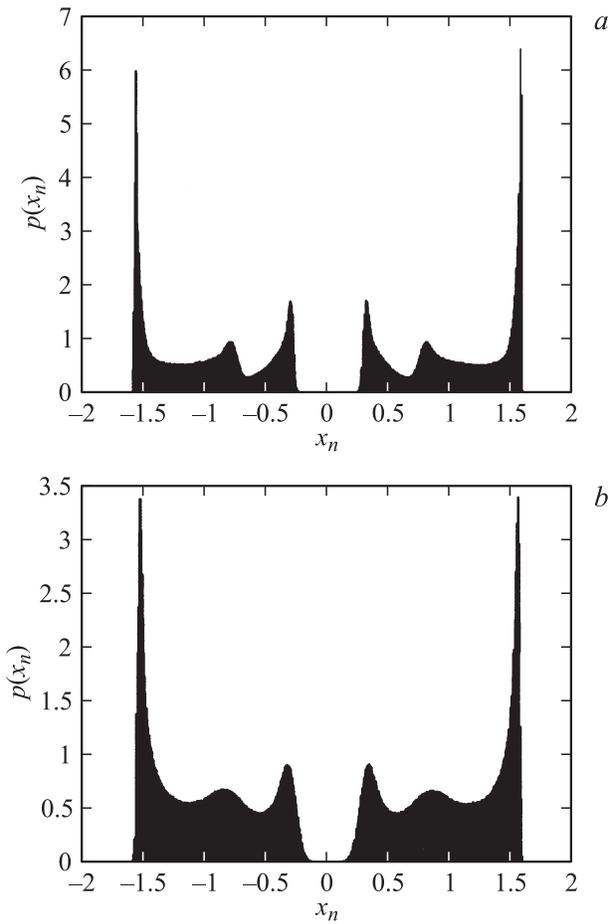


Рис. 1. Плотность распределения $p(x_n)$ для различных значений интенсивности шума D : $a - D = 10^{-5}$, $b - D = 10^{-4}$, $c - D = 10^{-3}$, $d - D = 10^{-2}$.

точек для $\varepsilon = 0.1$ в зависимости от интенсивности шума D . Результаты расчетов приведены на рис. 2, a , из которого следует: 1 — прохождение кризиса с увеличением $D \geq 10^{-4}$ ведет к резкому росту среднего времени возврата для всех пяти выбранных точек; 2 — с ростом

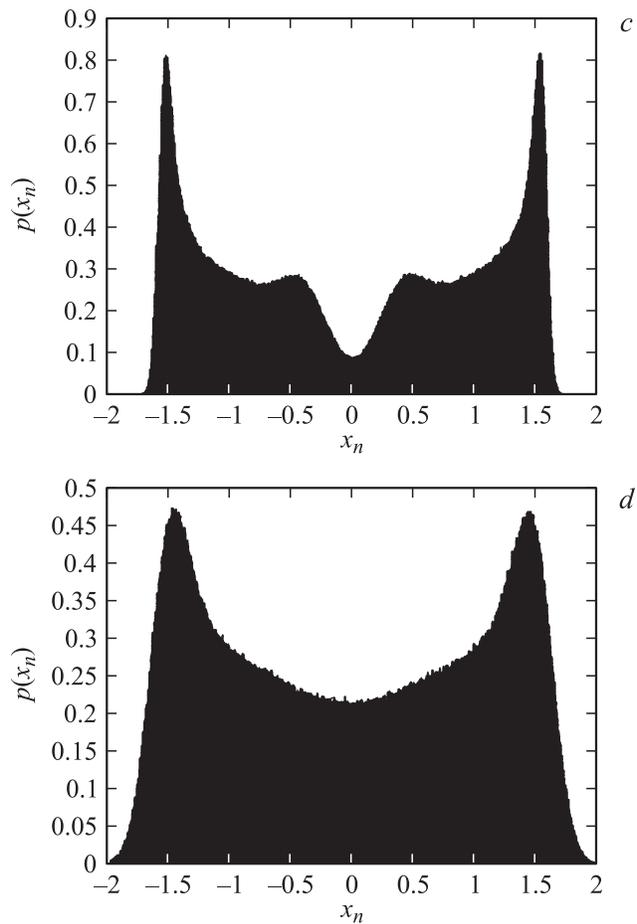


Рис. 1 (продолжение).

интенсивности шума среднее время возврата ведет себя принципиально нелинейным образом. Наблюдается как уменьшение, так и увеличение времени возврата в зависимости от интенсивности шума. Если внимательно сопоставить рис. 2, *a* и рис. 1, то ясно видно, что возрастание $\langle \tau_r(D) \rangle$ обусловлено уменьшением $P(x_n)$, а уменьшение — ростом $P(x_n)$ в полном соответствии с (1).

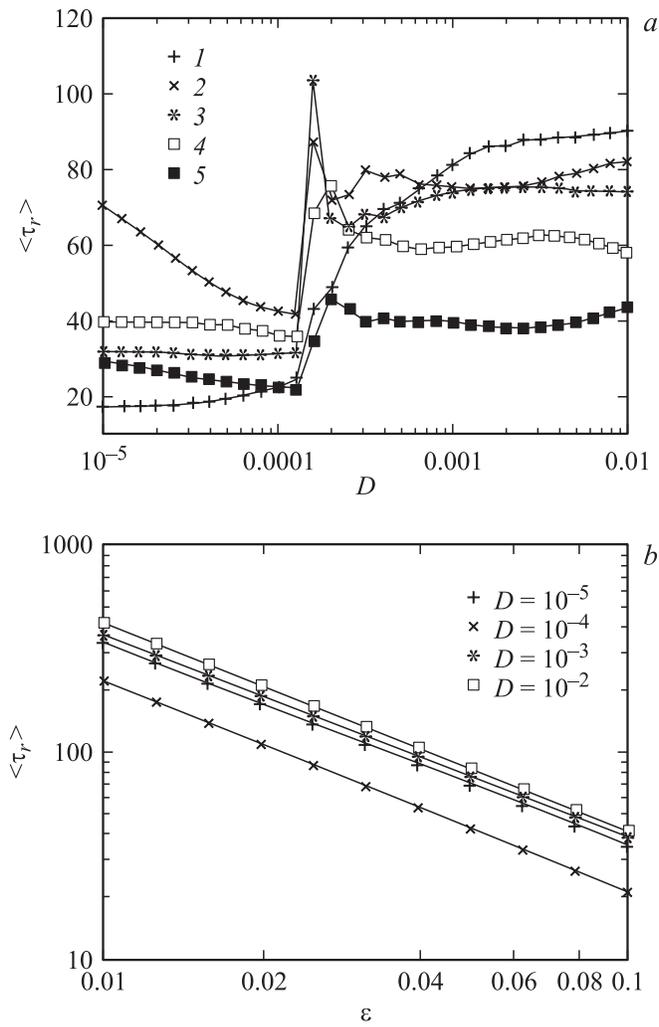


Рис. 2. Средние времена возврата $\langle \tau_r \rangle$ в зависимости от интенсивности шума для пяти выбранных точек аттрактора (а), в зависимости от ε (двойной логарифмический масштаб) (б).

Теперь выясним характер зависимости $\tau_r(\varepsilon)$ и сопоставим данные с теорией. С этой целью рассмотрим фиксированную точку $x_0^3 = 0.65$. Будем рассчитывать средние времена возврата в ε -окрестность x_0 для значений ε от 10^{-2} до 10^{-1} . Данные численного эксперимента представлены на рис. 2, *b*.

Аппроксимацией методом наименьших квадратов установлено, что графики рис. 2, *b* в двойном логарифмическом масштабе соответствуют прямым

$$\lg\langle\tau\rangle r(\varepsilon) = \lg C(D) - k \lg \varepsilon, \quad (7)$$

причем $k = 1.00 \pm 0.02$, а от интенсивности шума зависят исключительно коэффициенты C :

$$\begin{aligned} C_1 &= 3.756(D = 10^{-5}), & C_2 &= 1.958(D = 10^{-4}), \\ C_3 &= 3.900(D = 10^{-3}), & C_4 &= 4.012(D = 10^{-2}). \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты $C(D)$ (8) и коэффициент $k = 1.00 \pm 0.02$ получены непосредственно из аппроксимации данных рис. 2, *b*. Если теорема Каца (1) верна и в случае, когда в системе (5) присутствует источник шума, то коэффициенты $C(D)$ [8] должны соответствовать величинам $p^{-1}(x_0)$, которые задаются соответствующими распределениями рис. 1, рассчитанными для значений D в интервале $10^{-5} \div 10^{-2}$. Простые расчеты показали, что значения коэффициентов, полученные с использованием плотностей вероятности $p(x_0, D)$, с точностью $\pm 5\%$ совпадают с данными аппроксимации (8).

Действительно, выражения (1) можно переписать следующим образом:

$$\langle\tau_r(\varepsilon)\rangle = C\varepsilon^{-1}, \quad \text{где } [p(x_0)]^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом, экспериментальные результаты рис. 2, *b*, которые аппроксимируются выражениями (7) и (8), полностью соответствуют (1) как в случае отсутствия, так и при наличии аддитивного шума в системе (5).

В заключение обсудим характер распределения времен возврата. Последовательность времен возврата $\tau = n_{k+1} - n_k$ для гиперболических динамических систем представляет собой случайный процесс, подчиняющийся распределению Пуассона [9]:

$$p(\tau) = C \exp(-\gamma\tau), \quad (10)$$

где γ — некий постоянный коэффициент. В логарифмическом масштабе зависимость (10) будет прямой линией, наклон которой определяется

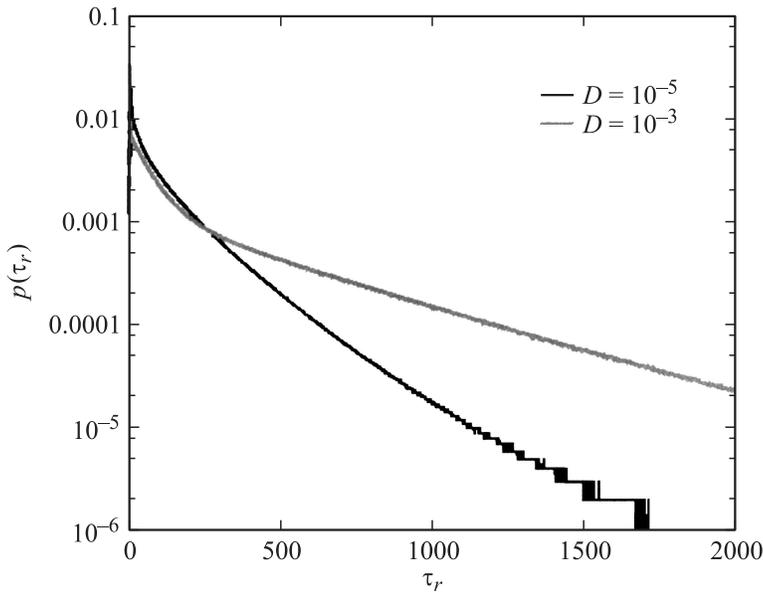


Рис. 3. Распределения времен возврата для различных значений интенсивности шума: $D = 10^{-5}$ (до кризиса, нижний график) и $D = 10^{-3}$ (верхний график).

величиной γ . Распределение $p(\tau)$ строилось численно на основе реализации x_n системы (5), полученной для $n = 2 \cdot 10^8$. Результаты представлены на рис. 3 для двух характерных значений интенсивности шума $D = 10^{-5}$ (нижний график) и $D = 10^{-3}$ (верхний график). Из графиков рис. 3 следует два важных вывода. Во-первых, распределения $p(\tau)$ как при малых, так и при больших интенсивностях шума не удовлетворяют закону Пуассона (10). Графики рис. 3 не являются прямыми линиями. Во-вторых, рис. 3 свидетельствует о том, что индуцированный шумом кризис аттракторов вызывает существенное изменение характера распределения $p(\tau)$. Установлено также, что нарушение закона Пуассона не является следствием воздействия шума. В отсутствие шума зависимость $p(\tau)$ практически совпадает с графиком $p(\tau)$ для $D = 10^{-5}$ (нижний график рис. 3). Отклонения от распределения Пуассона по нашему мнению связано с тем, что отображение (5) не относится к классу гиперболических систем.

В заключение авторы хотели бы выразить глубокую благодарность В.С. Афраймовичу за ряд консультаций и полезные обсуждения затронутых проблем.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда им. Александра фон Гумбольдта и гранта АВЦП „Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2011 годы“.

Список литературы

- [1] *Математическая энциклопедия*. М., 1984. Т. 4. С. 750–751.
- [2] *Шильников Л.П.* и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 1998.
- [3] *Афраймович В., Угальде Э., Урнас Х.* Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. М.; Ижевск: Изд. РХД, 2011.
- [4] *Кас М.* Probability and Related Topics in Physical. Lectures in Applied Mathematics. Interscience. London, 1957; New York, 1959.
- [5] *Анищенко В.С., Нейман А.Б.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. В. 8. С. 117–118.
- [6] *Afraimovich V.S.* // Chaos. 1997. V. 7 (1). P. 12–20.
- [7] *Afraimovich V.S., Lin Wen-Wei, Rulkov N.F.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. P. 2323–2337.
- [8] *Анищенко В.С.* и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 399–402.
- [9] *Hirata M.* Poisson law for dynamical systems with the „self-mixing“ condition. Dynamical Systems and Chaos 1: 87 (World Sci. Pub., New York, 1995).