

01;02

Динамика стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии

© П.И. Хаджи, А.П. Зинган

Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,
Молдова, Тирасполь

E-mail: fmfdekan@spsu.ru

Институт прикладной физики АНМ, Молдова, Кишинев

Поступило в Редакцию 4 октября 2010 г.

Изучена динамика стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате, которая состоит в периодическом либо апериодическом связывании двух различных бозе-атомов в гетеромолекулу. Показано, что период и амплитуда колебаний плотности молекул существенно зависят от начальных плотностей частиц и начальной разности фаз.

В настоящее время особый интерес представляет исследование динамики связанных атомно-молекулярных бозе-эйнштейновских конденсатов. В [1,2] был изучен процесс конверсии двух одинаковых атомов в гомоядерную молекулу в присутствии двух импульсов резонансного лазерного излучения. Было показано, что имеют место как периодический, так и апериодический режимы конверсии.

К настоящему времени наблюдалось связывание атомов в гомоядерные молекулы K_2 [3], Li_2 [4], Cs_2 [5] и др. Большим успехом является наблюдение не только гомоядерных молекул, но и гетероядерных, состоящих из двух различных атомов. При этом наблюдалась атомно-молекулярная конверсия в Ферми–Ферми, Бозе–Бозе и Ферми–Бозе смесях атомов с образованием гетероядерных молекул ${}^6Li^{40}K$ [6], ${}^6Li^{23}Na$ [7], ${}^7Li^{133}Cs$ [8], ${}^{23}Na^{133}Cs$ [9], ${}^{85}Rb^{133}Cs$ [10], ${}^{39}K^{85}Rb$ [11] и др. Большинство экспериментов было нацелено на обнаружение двухатомных гомоядерных либо гетероядерных молекул. Однако совсем недавно наблюдались гомоядерный тетрамер Cs_4 [12] и трехатомная гетероядерная молекула ${}^{87}Rb^{40}K^6Li$ [13]. Это обстоятельство свидетельствует о возможности образования и более сложных молекул в условиях бозе-конденсации.

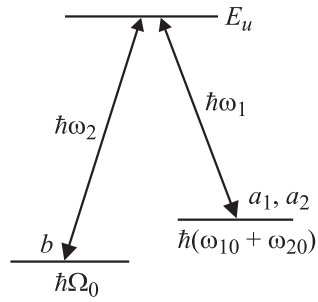


Рис. 1. Энергетическая схема и квантовые переходы в трехуровневой Λ -схеме.

Цель данной работы состоит в исследовании особенностей стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии с образованием гетероядерной молекулы как единого, одноступенчатого процесса. Пусть два различных бозе-конденсированных атома a_1 и a_2 с энергиями $\hbar\omega_{01}$ и $\hbar\omega_{02}$ переходят в основное состояние гетероядерной молекулы b с энергией $\hbar\Omega_0$ через возбужденное состояние молекулы E_u , одновременно поглощая и излучая кванты света c_1 и c_2 с энергиями $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ соответственно (рис. 1). Изучаемый процесс можно представить в виде реакции $a_1 + a_2 + c_1 \leftrightarrow b + c_2$, где a_1 и a_2 представляют два различных атома, например, ^{41}K и ^{87}Rb , а b — гетероядерную молекулу $^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$. Что касается промежуточного, возбужденного молекулярного состояния с энергией E_u , то его можно исключить из рассмотрения, используя принцип адиабатического следования. Результаты работы [14] указывают на то, что населенность промежуточного уровня с энергией E_u исчезающе мала. Это дает возможность описывать рассматриваемый процесс стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии как одноступенчатый (единый) процесс. В этом случае можно обобщить гамильтониан взаимодействия H_{int} из [2,3], описывающий единый процесс индуцированной атомно-молекулярной конверсии, и представить его в виде

$$H_{int} = \hbar g (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{b} \hat{c}_1^+ \hat{c}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}^+ \hat{c}_1 \hat{c}_2^+), \quad (1)$$

где \hat{a}_1 , \hat{a}_2 и \hat{b} — бозонные операторы уничтожения атомных и молекулярных состояний соответственно, \hat{c}_1 и \hat{c}_2 — операторы уничтожения фотонов, а g — константа взаимодействия. Используя (1),

легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов $\hat{a}_{1,2}$, \hat{b} , $\hat{c}_{1,2}$. Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля (mean field approximation) [1,2], можно получить систему нелинейных уравнений для амплитуд (параметров порядка) материального $\langle \hat{a}_{1,2} \rangle = a_{1,2}$, $\langle \hat{b} \rangle = b$ и электромагнитного $\langle \hat{c}_{1,2} \rangle = c_{1,2}$ полей

$$\begin{aligned} i\dot{a}_k &= \omega_{0k}a_k + ga_{3-k}^*bc_k^*c_{3-k}, \\ i\dot{b} &= \Omega_0b + ga_1a_2c_1c_2^*, \end{aligned} \quad (2)$$

$$i\dot{c}_k = \omega_kc_k + ga_k^*a_{3-k}^*bc_{3-k} \quad (k = 1, 2).$$

Вводя в рассмотрение плотности частиц n_1 , n_2 , N , f_1 и f_2 и соответствующие им фазы

$$a_k = \sqrt{n_k}e^{i\varphi_k}, \quad b = \sqrt{N}e^{i\psi}, \quad c_k = \sqrt{f_k}e^{i\psi_k} \quad (k = 1, 2), \quad (3)$$

из (2) легко получить четыре независимых интеграла движения для плотностей частиц

$$f_1 + N = f_{10} + N_0, \quad f_2 - N = f_{20} - N_0 \quad (4)$$

$$n_1 + N = n_{10} + N_0, \quad n_2 + N = n_{20} + N_0,$$

и свести всю систему уравнений (2) к одному нелинейному дифференциальному уравнению для плотности молекул N :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \pm 2g \left\{ N(N_0 + n_{10} - N)(N_0 + n_{20} - N)(N_0 + f_{10} - N)(N - N_0 + f_{20}) \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\Delta}{2g}(N - N_0) + \sqrt{N_0n_{10}n_{20}f_{10}f_{20}} \cos \theta_0 \right]^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где N_0 , n_{10} , n_{20} , f_{10} , f_{20} и ψ_0 , φ_{10} , φ_{20} , ψ_{10} , ψ_{20} — начальные плотности частиц и соответствующие им начальные фазы, $\theta_0 = \psi_0 + \psi_{20} - \psi_{10} - \varphi_{10} - \varphi_{20}$ — начальная разность фаз, $\Delta = \omega_{01} + \omega_{02} - \Omega + \omega_1 - \omega_2$ — расстройка резонанса. Общее решение уравнения (5) формально можно представить в квадратурах в виде обобщенного, гиперэллиптического интеграла, который не выражается через известные функции. Поэтому дальнейшее рассмотрение можно провести с использованием численных методов. Из (5) видно, что

особенности динамики системы существенно определяются начальными плотностями частиц, начальной разностью фаз и расстройкой резонанса. Изучим далее особенности эволюции системы только для случая точного резонанса, полагая в [5] $\Delta = 0$. Тогда легко видеть, что если начальная плотность хотя бы одной из подсистем равна нулю, то эволюция системы не зависит от начальной разности фаз. Кроме того, система не эволюционирует, если одновременно две какие-либо из начальных плотностей частиц равны нулю.

Поскольку интерес представляет процесс производства молекул, то мы будем считать, что в начальный момент времени в системе отсутствуют молекулы ($N_0 = 0$). Тогда временная эволюция плотности молекул $N(t)$ выражается интегралом

$$\int_0^N \frac{dy}{\sqrt{y(n_{10} - y)(n_{20} - y)(f_{10} - y)(f_{20} + y)}} = 2gt. \quad (6)$$

Из (6) видно, что возможна как периодическая, так и аperiodическая эволюция плотности молекул в зависимости от соотношений между начальными плотностями частиц. В общем случае, когда $f_{20} \neq 0$ и $n_{10} \neq n_{20} \neq f_{10}$, эволюция системы является периодической и период колебаний T определяется интегралом вида

$$\int_0^{n_m} \frac{dy}{\sqrt{y(n_{10} - y)(n_{20} - y)(f_{10} - y)(f_{20} + y)}} = gT, \quad (7)$$

где $n_m = \min(n_{10}, n_{20}, f_{10})$ есть наименьшая из плотностей, содержащихся в скобках под знаком функции \min . При этом амплитуда колебаний плотности молекул A также равна n_m .

Результаты численного интегрирования выражения (6) представлены на рис. 2. видно, что при $n_{10} = 0$ плотность молекул также равна нулю, так как в отсутствие атомов одного из двух сортов гетеромолекула образоваться не может. С ростом отношения n_{10}/n_{20} в пределах от нуля до единицы плотность молекул испытывает осцилляционное поведение с амплитудой $N = n_{10}$. Таким образом, при любом изменении соотношения между плотностями n_{10} , n_{20} и f_{10} наименьшая из них определяет амплитуду колебаний плотностей

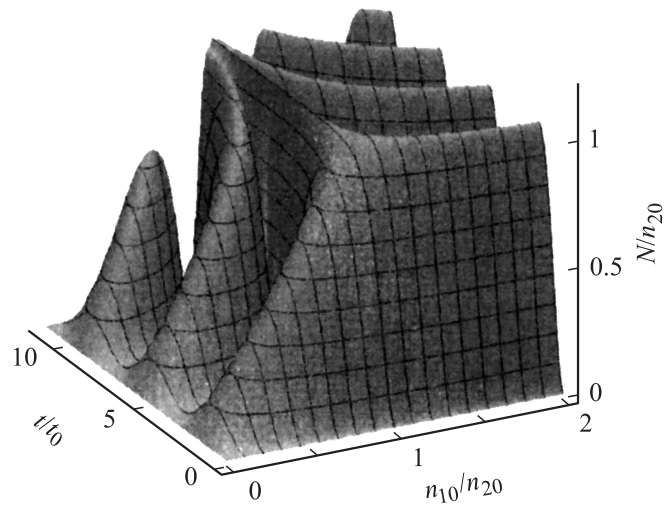


Рис. 2. Временная эволюция нормированной плотности молекул N/n_{20} в зависимости от значений параметра n_{10}/n_{20} при $f_{10}/n_{20} = f_{20}/n_{20} = 50$, $N_0 = 0$.

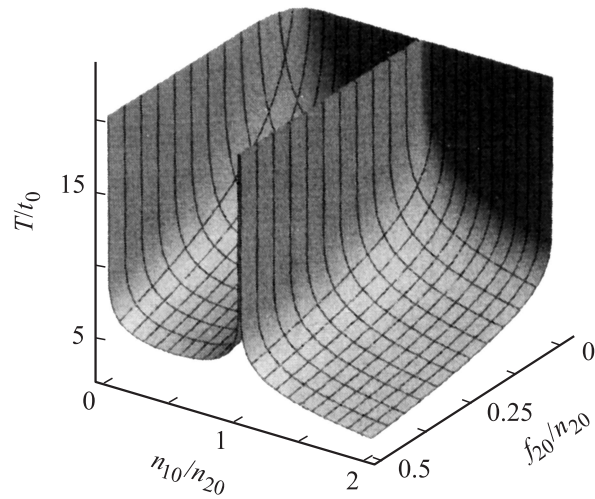


Рис. 3. Зависимость периода колебаний плотности молекул от параметров f_{20}/n_{20} и n_{10}/n_{20} при $f_{10}/n_{20} = 80$, $N_0 = 0$.

молекул $N(t)$ во времени. На рис. 3 представлена зависимость периода T колебаний от начальных плотностей системы, полученная численным интегрированием уравнения (7). Из рис. 2 и 3 видно, что с ростом n_{10}/n_{20} амплитуда и период колебаний монотонно растут. При приближении n_{10}/n_{20} к единице период колебания начинает быстро расти и обращается в бесконечность при $n_{10}/n_{20} = 1$. Следовательно, с ростом n_{10} периодический режим эволюции трансформируется в аperiodический при $n_{10} = n_{20}$. При этом плотность молекул монотонно растет с ростом n_{10}/n_{20} от нуля при $t/t_0 = 0$ до единицы при $n_{10}/n_{20} = 1$. Из рис. 2 видно, что плотность молекул монотонно растет со временем и асимптотически стремится к величине n_{10} снизу. Обратный процесс, т.е. диссоциация молекул на атомы, в этом случае не идет из-за сложного индуцирования процесса атомно-молекулярной конверсии. Если все атомы с начальными плотностями $n_{10} = n_{20}$ связываются в молекулы, то в отсутствие атомов прекращается процесс индуцирования ими и диссоциация молекул не происходит. Далее с ростом n_{10}/n_{20} при $n_{10}/n_{20} > 1$ восстанавливается периодический процесс атомно-молекулярной конверсии, однако амплитуда колебаний плотности молекул теперь равна n_{20} (т.е. меньшей из плотностей n_{10} и n_{20}) и остается постоянной с ростом n_{10} . Период колебаний при $n_{10}/n_{20} \geq 1$ сначала быстро убывает с ростом отношения n_{10}/n_{20} , а затем имеет место медленное монотонное уменьшение периода (рис. 2). Из рис. 2 можно также заметить, что интервал значений параметра n_{10}/n_{20} в окрестности единицы, соответствующий переходу от колебательного режима в аperiodический и затем снова в колебательный, периодический режим, очень узкий, т.е. период колебаний молекул начинает быстро расти только в небольшой окрестности параметра $n_{10}/n_{20} = 1$ (рис. 3). Что касается зависимости периода колебаний от плотности фотонов f_{20} , то с ростом отношения f_{20}/n_{20} имеет место сначала быстрое (в окрестности значения $f_{20}/n_{20} \geq 0$), а затем замедленное уменьшение периода колебаний. Это означает, что если бы во входном канале присутствовали атомы обоих сортов n_{10} и n_{20} и фотоны с плотностью f_{10} , но отсутствовали бы фотоны во входном канале реакции ($f_{20} = 0$), то процесс образования молекул оказывался невозможным, что также обусловлено особенностями стимулирования: при $N_0 = f_{20} = 0$ стимулирование отсутствует. С ростом f_{20} восстанавливается периодический режим процесса конверсии.

Отметим, что решение уравнения (6) при $n_{10} = n_{20} = n_0$ имеет вид

$$\Pi\left(\varphi, k^2\left(1 + \frac{f_{20}}{n_0}\right), k\right) + \frac{n_0}{f_{20}}F(\varphi, k) = gn_0(n_0 + f_{20})\sqrt{f_{10}/f_{20}}t,$$

где

$$\varphi = \arcsin \sqrt{(1 + f_{20}/n_{10})/(1 + f_{20}/N)}, \quad k^2 = \frac{f_{10}}{f_{10} + f_{20}},$$

$\Pi(\varphi, n, k)$ и $F(\varphi, k)$ — неполные эллиптические интегралы третьего и первого рода с модулем k и параметрами φ и n соответственно [15,16]. Отметим, что с ростом f_{10} и f_{20} период колебаний молекул монотонно убывает. Поэтому в пределе заданной плотности фотонов обоих импульсов ($f_{10}, f_{20} \gg n_{10}, n_{20}, N_0 = 0$) получаем

$$N = n_m \operatorname{sn}^2(g\sqrt{f_{10}f_{20}n_M}t), \quad k^2 = n_m/n_M,$$

$$T = 2K(k)/(g\sqrt{f_{10}f_{20}n_M}), \quad A = n_m$$

при $n_{10} \neq n_{20}$ и

$$N = n_0 \operatorname{th}^2(g\sqrt{f_{10}f_{20}n_0}t)$$

при $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$, где $n_m = \min(n_{10}, n_{20})$, $n_M = \max(n_{10}, n_{20})$, т.е. меньшая и большая из двух начальных плотностей n_{10} и n_{20} . Здесь $\operatorname{sn}(x)$ — эллиптический синус, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [15,16]. Амплитуда колебаний A равна меньшей из двух начальных плотностей атомов, а период колебаний определяется большей из них. Период колебаний монотонно убывает с ростом параметра $|n_{10} - n_{20}|$ и обращается в бесконечность при $n_{10} = n_{20}$ (рис. 3).

Таким образом, видно, что имеют место как периодический, так и аperiodический режимы превращения пары различных бозе-атомов в гетероядерную молекулу в зависимости от начальных условий.

В заключение приведем оценку периода колебаний плотности частиц. Сравнивая гамильтониан (1) с гамильтонианом (2) из [17], можно получить соотношение $g = \chi/\hbar\sqrt{f_{10}f_{20}}$, где константа χ из [17] равна $8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1}$. Полагая плотности частиц порядка 10^{14} см^{-3} , для периода колебаний получаем величину порядка $10^{-3} - 10^{-4} \text{ с}$.

Список литературы

- [1] *Хаджи П.И., Ткаченко Д.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 83. N 120
- [2] *Khadzhi P.I., Tkachenko D.V.* // J. Nanoelectronics and Optoelectronics. 2009. V. 4. N 101.
- [3] *Regal C.A., Ticknor G., Bohn J.L., Jin D.S.* // Nature. 2003. V. 424. N 47.
- [4] *Strecker K.E., Partridge G.B., Hulet R.G.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. N 080406.
- [5] *Herbig J., Kraemer T., Mark M., Weber T., Chin C., Nägerl H.-C., Grimm R.* // Science. 2003. V. 301. N 1510.
- [6] *Voigt A.-C., Taglieber M., Costa L., Aoki T., Wieser W., Hänsch T.W., Dieckmann K.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. N 020405.
- [7] *Stan C.A., Zwierlein M.W., Schunck C.H., Raupach S.M.F., Ketterle W.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. N 143001.
- [8] *Soderberg K.-A.B., Gemelke N., Chin C.* // New J. Phys. 2009. V. 11. N 055022.
- [9] *Haimberger C., Kleinert J., Bhattacharya M., Bigelow N.P.* // Phys. Rev. 2004. V. A70. N 021402(R).
- [10] *Sage J.M., Sainis S., Bergeman T., De Mille D.* // Phys. Lett. 2005. V. 94. N 203001.
- [11] *Kim J.T., Wang D., Eylar E.E., Gould P.L., Stwalley* // New. J. Phys. 2009. V. 11. N 055020.
- [12] *Chin C., Kraemer T., Mark M., Herbig J., Waldburger P., Nägerl H.-C., Grimm R.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 123201.
- [13] *Taglieber M., Voigt A.-C., Aoki T., Hänsch T.W., Dieckmann K.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. N 010401.
- [14] *Koštrun, Mackie M., Cote R., Javanainen J.* // Phys. Rev. 2000. V. A62. N 063616.
- [15] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* // Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
- [16] *Korn Г., Korn Т.* // Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
- [17] *Heinzen D.J., Wynar R., Drummond P.D., Kheruntsyan K.V.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. N 5029.