01;03

Определение параметров следового течения двух противофазно синхронизованных дорожек Кармана посредством рассмотрения устойчивости конфигурации

© Г.В. Гембаржевский

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
E-mail: gvgemb@ipmnet.ru

Поступило в Редакцию 23 июня 2010 г.

В пределе невязкого несжимаемого течения рассматривается задача определения параметров ближнего следа за группой из двух цилиндрических плохообтекаемых тел по данным одноточечных спектров пульсации скорости. Для этого в рамках модели течения в форме двух противофазно синхронизованных дорожек Кармана проводится рассмотрение устойчивости этой конфигурации следа относительно бесконечно малых возмущений равновесной локализации вихрей. Получено необходимое условие устойчивости течения.

В работе [1] сообщается о наблюдении перестройки режима плазменного течения ближнего следа за двумя цилиндрами, вызванного увеличением тока тлеющего разряда, протекающего в плазме (от моды противофазной синхронизации дорожек Кармана к моде синфазной синхронизации). Конкуренция этих мод в нейтральном потоке активно обсуждается [2]. По имеющимся экспериментальным данным, в рамках одномерной модели течения в форме связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, удалось оценить интенсивность взаимодействия осцилляторов-дорожек и параметр демпфирования [1,3]. Однако для полноценного понимания эффекта необходимо определение целого набора параметров этого течения в условиях дефицита экспериментальных данных. На этом этапе исследования имеет смысл обратиться к рассмотрению гидродинамической двумерной модели течения и рассмотреть вопрос устойчивости кинематически возможных конфигураций следового течения с целью выделения реализуемых устойчивых режимов. Для решения этой задачи следует воспользоваться классическими работами по устойчивости до-

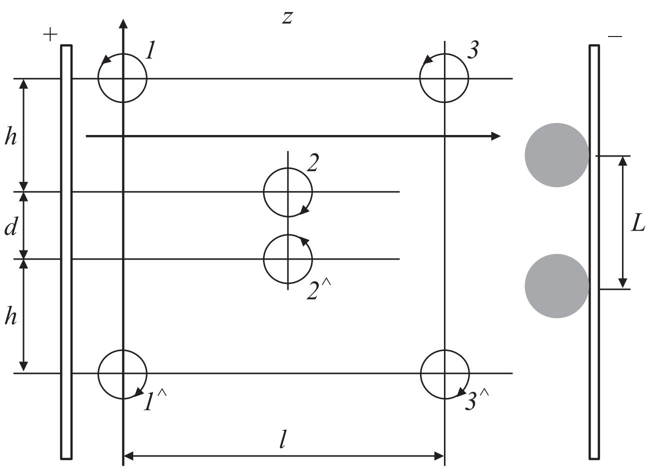

Рис. 1. Схема ближнего следового течения за группой из двух цилиндров в форме двух противофазно синхронизованных дорожек Кармана.

рожки Кармана [4]. При высоких числах Рейнольдса течения эволюция сформировавшихся дорожек Кармана под действием сил вязкости будет сравнительно медленной, и соответственно вязкостью течения можно пренебречь в первом приближении. Для численной оценки эффекта воспользуемся соответствующим параметром малости для динамики вязкого уединенного вихря [4]:

$$\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \sim \exp\left(-\frac{\mathrm{Re\,Sh}}{4}\right) \ll 1,$$

где ν — кинематическая вязкость, Re и Sh — числа Рейнольдса и Струхаля соответственно. Для численной оценки этого параметра малости в условиях турбулентного течения ($\mathrm{Re} \sim 10^3$) в приведенной оценке следует использовать критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}_{cr} \sim 47$ (иными словами использовать эффективную турбулентную вязкость), $\mathrm{Sh} \sim 0.2$. Из приведенных оценок следует, что определяющий параметр действительно мал.

Схема модельного течения плазменного следа за двумя цилиндрами в форме двух противофазно синхронизованных дорожек Кармана приведена на рис. 1. Для условий эксперимента [1] ток основного разряда (с емкостной несамостоятельной ионизацией) протекает между тонкотрубчатыми катодом и анодом, маркированными на схеме знаками „−“ и „+“. Приведены геометрические параметры дорожек Кармана: l — их продольный период, h — ширина (одной) дорожки, d — зазор между дорожками.

Рассматриваем модель сформировавшегося следа в виде плоского невязкого несжимаемого течения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где u, v — компоненты скорости, ρ — плотность, p — давление.

Ввиду ортогональности осей катода и цилиндров течение номинально трехмерно. Однако можно ожидать,что интересующая нас крупномасштабная структура течения будет близка к двумерной, если достаточно мал параметр отношения диаметра катода к диаметру цилиндра; в рассматриваемом случае эта величина составляет 4/15. Согласно [5], ширина области возмущенного (трехмерного) течения на нижнем по потоку цилиндре составляет половину диаметра (верхнего) цилиндра $\sim 4\,\mathrm{mm}/2$. Форма течения — две параллельные противофазно синхронизованные дорожки Кармана (рис. 1), описываемые комплексным потенциалом w [4]:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\,\ln\sin\left(\pi\,\frac{z - z_1}{l}\right) - \frac{\Gamma^*}{2\pi i}\,\ln\sin\left(\pi\,\frac{z - z_2}{l}\right)$$

$$- \frac{\Gamma}{2\pi i}\,\ln\sin\left(\pi\,\frac{z - z_{1\wedge}}{l}\right) + \frac{\Gamma^*}{2\pi i}\,\ln\sin\left(\pi\,\frac{z - z_{2\wedge}}{l}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = u - iv. \tag{2}$$

Центры нитеподобных вихрей z_k расположены в точках комплексной плоскости $z = x + iy$ согласно рис. 1, причем обозначение центров вихрей второй дорожки Кармана имеет в индексе символ „$^\wedge$“. Условие стационарности течения (т.е. перемещения всей картины течения вдоль оси x как целого) есть условие (3) на соотношение γ интенсивностей вихрей во внешних Γ и внутренних Γ^* рядах вихрей в следе и геометрию дорожек:

$$\gamma \equiv \frac{\Gamma^*}{\Gamma} = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(a+b) - \mathrm{cth}(2a+b)}{\mathrm{th}(a) - \mathrm{th}(a+b) + \mathrm{cth}(b)}, \quad a = \pi\,\frac{h}{l}, \quad b = \pi\,\frac{d}{l}. \tag{3}$$

В соответствии с (3) две противофазно синхронизованные стационарные дорожки Кармана реализуются только при достаточной их ширине h. Это условие реализуемости имеет вид

$$q \geqslant \max\left\{0;\ \ \frac{\sqrt{4 - 11p^2 + 10p^4 - 3p^6} - (p + 3p^3)}{2(1+p^4)}\right\},$$

$$q = \mathrm{th}(b), \quad p = \mathrm{th}(a). \tag{4}$$

Зависимость относительной интенсивности вихрей от геометрии стационарной пары дорожек проиллюстрирована на рис. 2 посредством линий уровня относительной циркуляции γ. (Результат $\gamma < 1$ для противофазной синхронизации дорожек был получен L. Landweber [6].)

Рассмотрим устойчивость этого течения относительно бесконечно малых возмущений расположения вихрей $z_k \to z_k + \delta z_k$, причем $\delta z_{k+4} = \delta z_k$, $\delta z_{k+2} = -\delta z_k$. Полученная подобным образом линеаризованная система уравнений возмущенного движения обладает свойством симметрии $\delta z_{k^\wedge} = \pm\delta\overline{z}_k$, позволяющим понизить ее порядок до четвертого (черта сверху символа обозначает комплексное сопряжение), что приводит к системе двух комплексных уравнений:

$$\frac{\partial\delta\overline{z}_1}{i\partial\tau} = A_1\delta z_1 + A_{1^\wedge}\delta\overline{z}_1 + i\gamma D\delta z_2 - i\gamma D_\wedge\delta\overline{z}_2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\delta\overline{z}_2}{i\partial\tau} = -iD\delta z_1 - iD_\wedge\delta\overline{z}_1 - A_2\delta z_2 - A_{2^\wedge}\delta\overline{z}_2, \quad \tau = t\,\frac{\pi\Gamma}{8l^2}. \tag{6}$$

Решения системы (5), (6) ищем в форме $\delta z_k = \delta z_k(0)\exp(\omega\tau)$, с комплексной частотой ω. Условие существования нетривиальных решений системы

$$\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \tag{7}$$

приводит к условиям устойчивости (в данном случае — нейтральной) течения:

$$B \geqslant 0, \quad C \geqslant 0; \quad B^2 - 4C \geqslant 0. \tag{8}$$

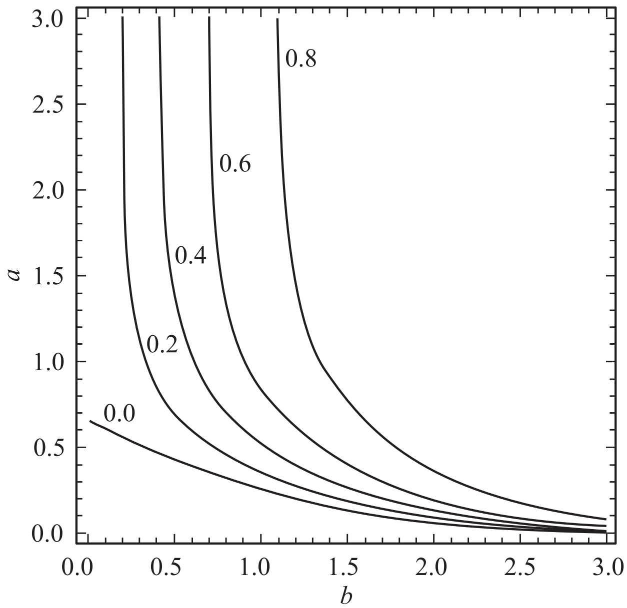

Рис. 2. Зависимость относительной циркуляции вихрей γ во внутренних и внешних рядах течения от геометрии дорожек в модели стационарного следа.

Коэффициенты системы (5), (6) и уравнения (7) есть

$$B = 2\gamma(D^2 - D_\wedge^2) - (A_1^2 - A_{1\wedge}^2) - (A_2^2 - A_{2\wedge}^2),$$

$$C = \left[(A_1 + A_{1\wedge})(A_2 - A_{2\wedge}) + \gamma(D + D_\wedge)^2\right] \times \left[(A_1 - A_{1\wedge})(A_2 + A_{2\wedge}) + \gamma(D - D_\wedge)^2\right], \tag{9}$$

$$A_1 = 2 + \frac{4}{\operatorname{sh}^2(2a+b)} + \gamma E, \quad A_2 = \gamma\left[2 + \frac{4}{\operatorname{sh}^2(b)}\right] + E,$$

$$E = \frac{4}{\operatorname{ch}^2(a+b)} - \frac{4}{\operatorname{ch}^2(a)},$$

$$A_{1\wedge} = -4\,\frac{\operatorname{ch}(2a+b)}{\operatorname{sh}^2(2a+b)}, \qquad A_{2\wedge} = -4\gamma\,\frac{\operatorname{ch}(b)}{\operatorname{sh}^2(b)},$$

$$D = 4\,\frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}^2(a)}, \qquad D_\wedge = 4\,\frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}^2(a+b)}.$$

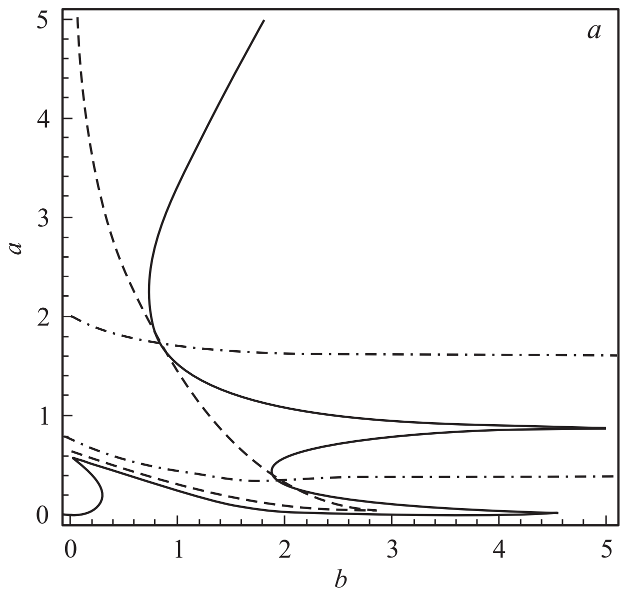

Рис. 3. Область устойчивости течения двух противофазно синхронизованных дорожек Кармана: *a* — границы выполнения условий (8), *b* — треугольник устойчивости течения.

Границы области устойчивости течения, согласно условиям (8), изображены на рис. 3, *a*: $B^2 - 4C = 0$ — сплошными линиями, $C = 0$ — пунктиром, $B = 0$ — штрихпунктиром. Соответственно сама область устойчивости на плоскости геометрических параметров дорожек a, b представляет собой внутренность криволинейного треугольника (рис. 3, *b*).

Полученный результат позволяет объяснить известный экспериментальный факт, что след за двумя цилиндрическими телами в форме противофазно синхронизованных дорожек Кармана удается наблюдать только при достаточно большом зазоре между телами. Согласно полученным выше результатам и с учетом дестабилизирующего влияния турбулентности течения, противофазная синхронизация дорожек в следе может наблюдаться в ограниченном диапазоне углов $b/a = d/h$ на плоскости a, b:

$$d/h \in (\sim 0.8; \sim 3.3),$$

проиллюстрированном на рис. 3, *b* штриховыми лучами.

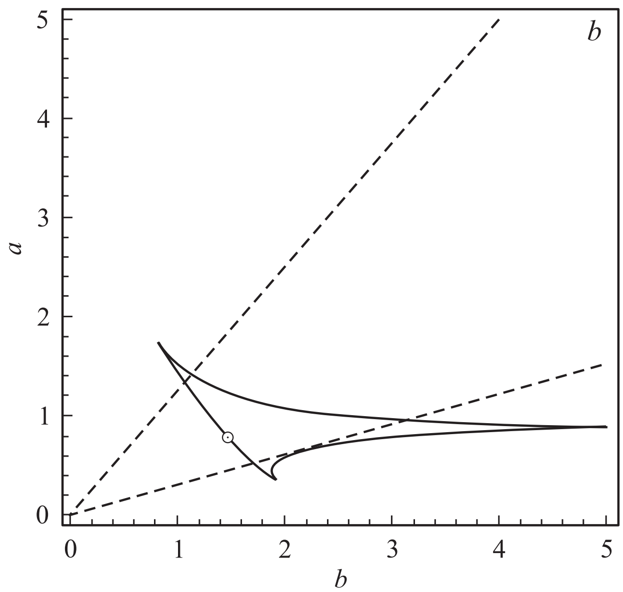

Рис. 3 (*продолжение*).

Ввиду громоздкости полученных условий устойчивости течения (8), (9) имеет смысл использование аппроксимаций. Так, для левой стороны треугольника устойчивости (рис. 3, b) получено разложение в точке $b = 0$, имеющее погрешность $\leqslant 3\%$ для значений $b < 1.75$:

$$\exp(-2a) = \frac{b^2 + b^3 + (5/6)b^4 + (1/2)b^5 + \ldots}{64}. \tag{10}$$

Сопоставление данных по локализации области устойчивости течения противофазно синхронизованных дорожек Кармана с полученными экспериментальными данными по расщеплению — сдвигу частот квазигармонических пульсаций плазменного течения следа [1,3] позволяет сделать следующий вывод. В процессе формирования следа противофазной синхронизации след претерпевает уширение, причем минимальное значение коэффициента уширения

$$\min \chi_\pi = \frac{h + d}{L} = 1.14,$$

где L — расстояние между осями цилиндров. Тогда безразмерные геометрические параметры следа принимают значения, обозначенные кружком на рис. 3, b:

$$a = 0.77, \quad b = 1.47.$$

В результате выполненной работы найдены необходимые условия устойчивости течения двух противофазно синхронизованных дорожек Кармана. Из сопоставления полученных результатов с экспериментальными данными по пульсациям скорости плазменного следового течения следует вывод о необходимости учета уширения ближнего следа в процессе его формирования. Удалось выполнить оценку геометрии плазменного следового течения с противофазной сихронизацией дорожек Кармана для условий эксперимента [1].

Основные результаты работы были представлены в докладах на VIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях и на IUTAM симпозиуме Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations-6.

Автор признателен Э.В. Теодоровичу за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00845.

Список литературы

[1] *Гембаржевский Г.В.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 5. С. 95–102.
[2] *Ravi A.B., Tan M., and Price W.G.* // Eur. Phys. J. Special Topics. 2008. V. 165. P. 151–160.
[3] *Gembarzhevskii G.V.* // VI Int. conf. on Plasma Physics and Plasma Technology. Contributed papers. Minsk: Polifact, 2009. V. 1. P. 27–30.
[4] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963.
[5] *Zdravkovich M.M.* // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 231–246.
[6] *Bearman P.W., Wadcock A.J.* // J. Fluid Mech. 1973. V. 6. Part 3. P. 499–511.