*01*

# Точное стационарное решение кинетического уравнения Компанейца

© *А.Е. Дубинов*

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Нижегородская обл.
E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

*Поступило в Редакцию 29 августа 2008 г.*

Получены и проанализированы ранее неизвестные точные стационарные решения кинетического уравнения Компанейца, описывающие спектры фотонов, взаимодействующих с разреженным электронным газом. Решения, описывающие стационарные спектры комптонизации при наличии потока фотонов вдоль оси частот, выражены через функции Гойна. Показано, что точки ввода и вывода фотонов всегда соответствуют конечным значениям частот.

PACS: 02.30.Gp, 02.30.Hq, 05.30.Jp.

Для описания эволюции спектра фотонного газа при его комптоновском рассеянии в разреженной нерелятивистской электронной плазме А.С. Компанейцем [1] было получено кинетическое уравнение, имеющее следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right], \tag{1}$$

где $t$ — безразмерное время, $x$ — безразмерная частота, $n(x, t)$ — число заполнения фотонов спектрального участка $dx$. Первый член в круглых скобках (1) описывает изменение частоты благодаря эффекту Доплера, второй член — изменение частоты за счет отдачи, третий — за счет индуцированного рассеяния. Процесс, в котором происходит эволюция фотонного газа по (1), получил название процесса его „комптонизации“.

Решение уравнения (1) в пренебрежении третьим членом, когда (1) становится линейным уравнением, дано в [1] и представлено в [2]. Более общее уравнение переноса фотонов с правой частью, но опять же с пренебрежением третьим членом, исследовалось в [3–6]. Решение уравнения (1) в пребрежении вторым членом получено и проанализировано методом характеристик в [3,7,8] и показано, что в спектре фотонов могут устанавливаться ударные волны (квазилинии). Эти решения, а также результаты численных исследований (1) представлены в [9].

О стационарном решении известно следующее (из [8]): планковское $(\exp x - 1)^{-1}$ и бозе-эйнштейновское $[\exp(x+\mu) - 1]^{-1}$ выражения обращают внутреннюю скобку (поток фотонов $Q$ в $x$-пространстве) в нуль (здесь $\mu$ — постоянная, имеющая смысл химического потенциала). Там же отмечается, что существуют и другие стационарные решения уравнения (1) с $Q = \mathrm{const} \neq 0$, которые формируются, как указано в [8], за счет постоянного притока фотонов в $x = \infty$ и их стока в $x = 0$ при $Q < 0$ (или притока в $x = 0$ и стока в $x = \infty$ при $Q > 0$). Точные решения (1) такого типа до настоящего момента были неизвестны. Цель данной работы — найти точные стационарные решения с $Q \neq 0$.

Стационарная форма уравнения Компанейца при постоянном $Q$ имеет вид

$$\frac{dn}{dx} + n + n^2 = \frac{Q}{x^4}. \tag{2}$$

Оно относится к классу дифференциальных уравнений Риккати, про которые известно [10], что если удается найти какое-либо нетривиальное частное решение, то нахождение общего решения сводится к решению линейного уравнения первого порядка. Однако даже частные решения уравнения Риккати вида (2) в литературе не описаны.

Сначала представим частное решение более общего уравнения

$$A\frac{dn}{dx} + Bn + Cn^2 = \frac{Q}{x^4}, \tag{3}$$

где $A, B, C$ — некоторые постоянные коэффициенты. Оно записывается через дважды выржденую функцию Гойна[1] HeunD [11,12] и ее производную HeunD′ по $x$ и имеет вид

$$n_0 = \frac{A - Bx}{2Cx} - \frac{4Ax}{C(x^2+1)^2}\,\frac{\mathrm{HeunD}'}{\mathrm{HeunD}}, \tag{4}$$

[1] Семейство функций Гойна представляет собой наиболее общий набор функций, включающий в себя, как частные случаи, гипергеометрические функции, функции Матье и Ламе и др. Функции Гойна не часто употребляются в физических задачах, и пока у них нет единого обозначения. Мы пользуемся обозначениями символьной системы Maple, в последние версии которой они уже введены.

в котором параметры и аргументы функций HeunD и HeunD′ здесь и ниже одинаковы

$$\mathrm{HeunD}\left(0, -\frac{A^2+B^2+4CQ}{4A^2}, -\frac{B^2-4CQ}{2A^2}, \frac{A^2-B^2-4CQ}{4A^2}, \frac{x^2+1}{x^2-1}\right). \tag{5}$$

Приведем для справки правила дифференцирования функций Гойна

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{HeunD}(a,b,c,d,x) = \mathrm{HeunD}'(a,b,c,d,x), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{HeunD}'(a,b,c,d,x) = \frac{a+2x+ax^2-2x^3}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{HeunD}'(a,b,c,d,x) - \frac{d+(c+2a)x+bx^2}{(x^2-1)^3}\,\mathrm{HeunD}(a,b,c,d,x). \tag{7}$$

В справедливости частного решения (4) легко убедиться путем его прямой подстановки в (3), дающей тождество. Записать общее решение (3) теперь не представляет большого труда: с помощью замены $n = n_0 + n_1$ уравнение (3) сводится к уравнению Бернулли, которое всегда разрешимо в квадратурах [10]. Приведем окончательное выражение для общего решения (3) с произвольной постоянной интегрирования $c_1$:

$$n = \frac{c_1\left\{\left[(A-Bx)\mathrm{HeunD}^2 - \frac{8Ax^2\mathrm{HeunD}\mathrm{HeunD}'}{(x^2-1)^2}\right]\int\frac{dx}{x\mathrm{HeunD}^2} + 2A\right\} + (A-Bx)\mathrm{HeunD}^2 - \frac{8Ax^2\mathrm{HeunD}\mathrm{HeunD}'}{(x^2-1)^2}}{2Cx\mathrm{HeunD}^2\left(c_1\int\frac{dx}{x\mathrm{HeunD}^2} + 1\right)}. \tag{8}$$

Так как аргумент входящей в (6) функции Гойна имеет особенность при $x = 1$, да и сама эта функция имеет особенности, то стационарный спектр фотонов в соответствии в (8) может иметь более сложный, чем бозе-эйнштейновский, вид.

Рассмотрим численные примеры типовых стационарных фотонных спектров при $A = B = C = 1$. Рассчитанные спектры показаны на рис. 1 при различных значениях потока $Q$ и при различных значениях полного числа фотонов в системе.

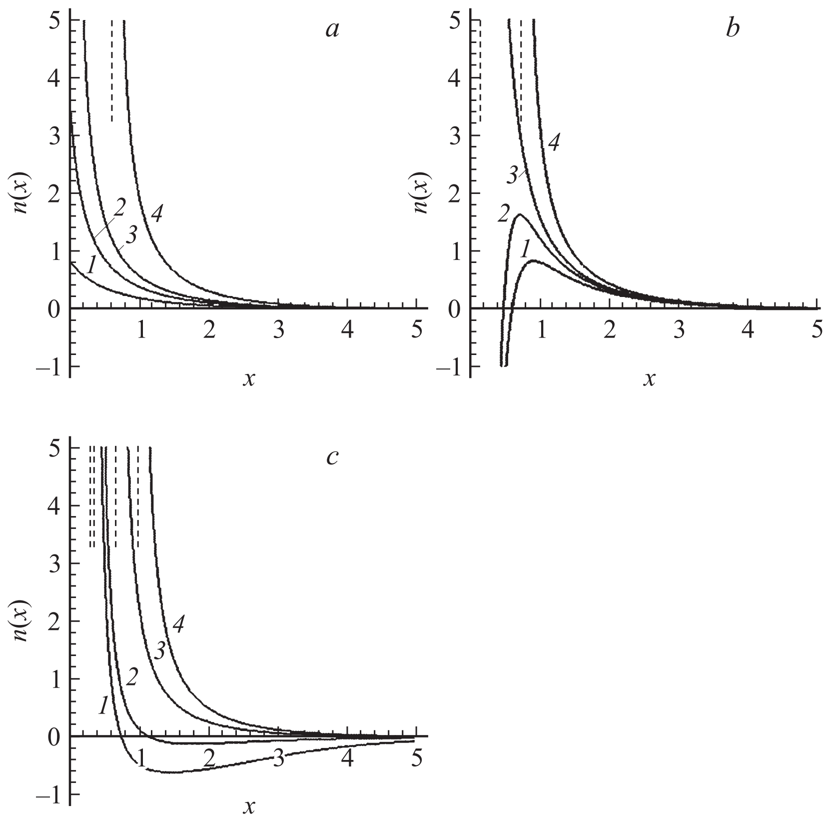


**Рис. 1.** Стационарные фотонные спектры; везде пунктиром показаны вертикальные асимптоты, бо́льшим номерам кривых (от *1* до *4*) соответствуют бо́льшие значения полного числа фотонов в системе: *a* — при $Q = 0$ (*1, 2* — бозе-эйнштейновские зависимости, *3* — планковская зависимость, *4* — ограниченная слева зависимость); *b* — при $Q > 0$; *c* — при $Q < 0$.

На рис. 1, *a* показаны бозе-эйнштейновские и планковское решения, а также решение, имеющее вертикальную асимптоту. Последнее, по-видимому, соответствует описанной в работах [3,7,8] стационарной спектральной ударной волне (квазилинии).

На рис. 1, *b* показаны решения, соответствующие положительному потоку фотонов в $x$-пространстве. Эти решения ограничены слева или

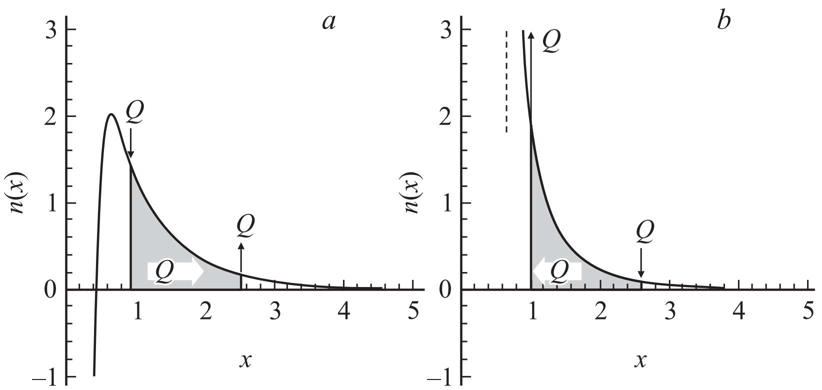


**Рис. 2.** Направления стационарных фотонных потоков в $x$-пространстве: $a$ — при $Q > 0$; $b$ — при $Q < 0$.

асимптотой (квазилинией), или точкой ухода кривой в отрицательную область. Поясним, какой энергетической цепочке они могли бы соответствовать. Эта цепочка, по которой протекает поток фотонов $Q$, такова: ввод в электронный газ фотонов, имеющих некоторую частоту, набор энергии фотонным газом при взаимодейтвии с электронами и вывод или поглощение их на некоторой частоте, бóльшей, чем частота ввода (рис. 2, $a$), причем поток фотонов всегда проходит на отрезке, где всюду $n$ положительно.

На рис. 1, $c$ показаны решения, соответствующие отрицательному потоку фотонов в $x$-пространстве. Эти решения ограничены слева асимптотой, а справа — точкой ухода кривой в отрицательную область. Цепочка следования фотонов по спектру здесь аналогична рассмотренной выше (рис. 2, $b$), но имеет противоположное направление. Решения с отрицательным $Q$ вполне могут реализоваться на практике. Необходимо также отметить, что точки ввода и вывода (поглощения) фотонов в $x$-пространстве обязательно конечны и отличны от нуля, вопреки указаниям [8], так как физически разумное решение всегда ограничено своими асимптотой и корнем.

Итак, в работе получены и проанализированы ранее неизвестные точные стационарные решения кинетического уравнения Компанейца, описывающие спектры комптонизированных фотонов, взаимодействующих с электроннным газом. Показано, что точки ввода и вывода фотонов всегда соответствуют конечным значениям частот.

Работа поддержана грантом правительства Нижегородской обл.

## Список литературы

[1] *Компанеец А.С.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. № 5(11). С. 876–885. (см. также *Компанеец А.С.* Физико-химическая и релятивистская газодинамика: Сб. статей. М.: Наука, 1977. С. 23–36.)
[2] *Железняков В.В.* Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997.
[3] *Зельдович Я.Б., Левич Е.Ф.* // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. № 6(12). С. 2423–2429.
[4] *Becker P.A., Begelman M.C.* // Astrophys. J. 1986. V. 310. N 1. P. 534–551.
[5] *Becker P.A., Begelman M.C.* // Astrophys. J. 1986. V. 310. N 1. P. 552–560.
[6] *Becker P.A.* // Astrophys. J. 1988. V. 327. N 2. P. 772–793.
[7] *Зельдович Я.Б., Сюняев Р.А.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 1. С. 153–160.
[8] *Зельдович Я.Б.* // УФН. 1975. Т. 115. № 5. С. 161–197.
[9] *Нагирнер Д.И.* Комптоновское рассеяние в астрофизических объектах. СПб.: СПбГУ, 2001.
[10] *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1961.
[11] *Славянов С.Ю., Лай В.* Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб.: Невский диалект, 2002.
[12] *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск: НИЦ „РХД“, 2005.