

01;03

О вычислении потока тепла от сферической частицы в молекулярном газе

© С.А. Савков, Е.Ю. Тюлькина

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Орловский государственный университет», Орел
E-mail: ane12702@orel.ru

Поступило в Редакцию 27 мая 2008 г.

Рассмотрен вопрос о вычислении потока тепла от равномерно нагретой сферической частицы в молекулярном газе. Приведены результаты численных расчетов для модели Хансона–Морзе линеаризованного уравнения Ван Чанга–Уленбека при условии чисто диффузного отражения молекул газа от ее поверхности. Получены значения коэффициента скачка температуры для конкретных газов.

PACS: 51.10+y

Изучение процесса теплопереноса остается одной из актуальных задач кинетической теории газов. При этом подавляющее большинство авторов ограничивается рассмотрением атомарного газа. Решение аналогичной задачи в случае молекулярного газа для простейшей модели интеграла столкновений приведено в [1]. В данной работе рассматривается модель Хансона–Морзе для уравнения Ван Чанга–Уленбека. До настоящего времени решение указанного уравнения в приложении к рассматриваемой задаче представлено лишь в рамках квадратурного метода [2]. При этом критерием точности являлась согласованность результатов, полученных с использованием 41 и 81 точечных квадратурных формул, что, как показано в [3], не дает реальной оценки погрешности.

В данной работе используется моментный метод решения кинетического уравнения. Предложена схема построения функции распределения, позволяющая получать любую желаемую точность. Критерием точности изложенного подхода является надежная сходимост

тов при последовательном увеличении числа удерживаемых моментов в функции распределения, а также возможность подсчета коэффициента скачка температуры, который в рамках поставленной задачи никем не вычисляется.

Рассмотрим равномерно нагретую до температуры T_s сферическую частицу с радиусом R , находящуюся в газе, в котором поддерживается постоянная на бесконечности температура T_0 . Перепад температуры $\Delta T = T_s - T_0$ условимся считать достаточно малым для линеаризации задачи. Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы. Следуя [2], для описания состояния газа примем уравнение Ван Чанга–Уленбека [4]:

$$\mathbf{V} \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{r}} = J_{st}[f_l]. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{V} — собственная (тепловая) скорость поступательного движения молекул газа, f_l — функция распределения для молекул, находящихся в состоянии с внутренней энергией E_l , J_{st} — интегральный оператор столкновений, \mathbf{r} — радиус-вектор рассматриваемой точки.

В силу линейности представим функцию распределения в виде

$$f_l = f_l^0(1 + \varphi_l),$$

где

$$f_l^0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \frac{1}{\Theta} \exp(-C^2 - \varepsilon_l)$$

— равновесная функция распределения,

$$C = \mathbf{V} \sqrt{\frac{m}{2kT_0}}, \quad \varepsilon_l = \frac{E_l}{kT_0}, \quad \Theta = \sum_l \exp(-\varepsilon_l),$$

m — масса молекул газа, T_0 , n_0 — некоторые, принятые за равновесные, значения температуры и концентрации молекул газа, k — постоянная Больцмана.

Поправка φ_l определяется из соответствующего (1) линеаризованного уравнения, которое с учетом сферической симметрии задачи может быть записано в виде:

$$C_r \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} + \frac{C^2 - C_r^2}{r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial C_r} = I_{st}[\varphi_l], \quad (2)$$

C_r — проекция вектора \mathbf{C} на направление \mathbf{r} . В качестве интеграла столкновения примем модель Хансона–Морзе [5]:

$$I_{st}[\varphi_l] = \sum_{m=1}^6 \psi_m A_m - \varphi_l. \quad (3)$$

Функции ψ_m и A_m приведены в [3]. За единицу длины выбрана величина

$$l = \frac{\eta}{n_0} \sqrt{\frac{2}{mkT_0}},$$

η — коэффициент вязкости газа.

В качестве граничного условия на поверхности частицы примем закон чисто диффузного отражения молекул газа

$$\varphi_l|_{C_r > 0, r=R} = \Phi_r = \frac{\Delta n}{n_0} + \left(C^2 - \frac{3}{2} + \varepsilon_l - G \right) \frac{\Delta T}{T_0}, \quad (4)$$

$G = \frac{c_v^{int}}{k} = \frac{1}{\Theta} \sum_l \varepsilon_l \exp(-\varepsilon_l)$, c_v^{int} — теплоемкость внутренних степеней свободы, приходящихся на одну молекулу газа. Значение Δn определяется из условия отсутствия массового движения газа.

По аналогии с [6] представим искомую функцию распределения в виде

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^4 \varphi_l^i H_i, \quad (5)$$

где $H_1 = H(C_r - \beta C)$, $H_2 = H(C_r) - H_1$, $H_3 = H(-C_r) - H_4$, $H_4 = H(-C_r - \beta C)$, $\beta = \sqrt{1 - R^2/r^2}$, $H(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ — стандартная функция Хевисайда,

$$\varphi_l^i = \sum_{k=1}^N \varphi_l^{i,k}, \quad (6)$$

$$\varphi_l^{i,1} = a_1^i + a_2^i C^2 + a_3^i \varepsilon_l + a_4^i C_r + a_5^i C_r C^2 + a_6^i C_r \varepsilon_l,$$

$$\varphi_l^{i,2} = a_7^i C^4 + a_8^i C^2 \varepsilon_l + a_9^i C_r^2 + a_{10}^i C_r^2 C^2 + a_{11}^i C_r^2 \varepsilon_l,$$

$$\varphi_l^{i,3} = a_{12}^i C_r^3 + a_{13}^i C_r^3 C^2 + a_{14}^i C_r^3 \varepsilon_l + a_{15}^i C_r^3 C^4 + a_{16}^i C_r^3 C^2 \varepsilon_l \text{ и т.д.,}$$

т.е. функции $\varphi_l^{i,1}$ (первое приближение) содержат моменты, входящие в функцию Чепмена–Энскога, что обеспечивает переход решения в газодинамический режим, а функции $\varphi_l^{i,2}$, $\varphi_l^{i,3}$ и т.д. учитывают моменты, получающиеся при подстановке предыдущих в левую часть кинетического уравнения.

Коэффициенты a_j^i определяются из системы дифференциальных уравнений, для составления которой кинетическое уравнение (2) следует последовательно умножить на все входящие в (5) моменты и проинтегрировать по всему пространству скоростей.

Искомый поток тепла определяется соотношением

$$q = \sum_l \int V_r \left(\frac{mV^2}{2} + \varepsilon_l \right) f_l^0 \varphi_l d^3V$$

и может быть представлен в виде

$$q = n_0 \sqrt{\frac{2k^3 T_0^3}{m}} \frac{R^2}{r^2} Q \frac{\Delta T_s}{T_0},$$

где

$$Q = \frac{1}{\pi^{3/2} \Theta} \sum_l \int C_r (C^2 + \varepsilon_l) \varphi_l |_{r=R} \exp(-C^2 - \varepsilon_l) d^3C$$

— безразмерное значение потока тепла, вычисленное на поверхности частицы.

Результаты расчетов приведены в таблице. Там же указаны значения C_t (коэффициента скачка температуры), определяемого при $R \rightarrow \infty$ из соотношения

$$Q = \frac{3}{8} \frac{(3 + 2G)F_1}{(1 + KnC_t)R},$$

здесь $Kn = \lambda/R$, $\lambda = \sqrt{\pi}/2$, F_1 — фактор Эйкена. Характеристики столкновительных параметров для конкретных газов взяты из [2].

Как видно из представленных данных, в случае мелкой ($R \leq 0.1$) и крупной ($R > 10$) частицы значения потока тепла практически не зависят от числа удерживаемых в функции распределения моментов. Наибольшее отличие наблюдается для R , лежащих в диапазоне от 0.5 до 5. При этом различие значений, полученных при $N = 1$ и $N = 2$, составляет порядка 2%, а учет следующих моментов ($N = 3$) дает

Зависимость обезразмеренного потока тепла от числа удерживаемых в функции распределения моментов (N_2 : $F_1 = 1.96$, $Z = 5.08$, $G = 1$; CO_2 : $F_1 = 1.629$, $Z = 7$, $G = 1.412$)

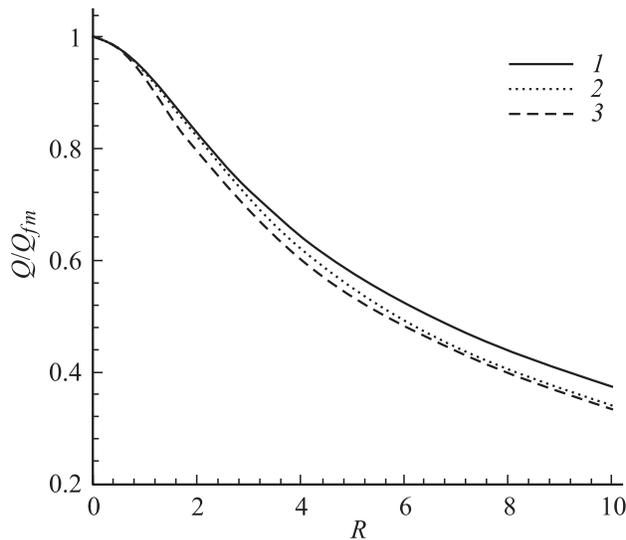
R	N_2			CO_2		
	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
0.01	0.846542	0.846092	0.846031	0.962022	0.961920	0.961297
0.1	0.846331	0.832901	0.832129	0.957326	0.956332	0.955838
0.5	0.830364	0.819915	0.819049	0.921731	0.910391	0.909157
1	0.788909	0.769761	0.768903	0.858887	0.838147	0.838244
2	0.688899	0.667205	0.667934	0.729048	0.706894	0.707099
3	0.597439	0.580171	0.581202	0.621048	0.603902	0.603978
4	0.522530	0.509833	0.510473	0.536467	0.524037	0.524732
5	0.462151	0.452883	0.453320	0.470210	0.461426	0.461816
6	0.413237	0.406405	0.406709	0.417708	0.411280	0.411340
7	0.373137	0.368069	0.368242	0.375270	0.370528	0.370671
8	0.339786	0.335966	0.336099	0.340388	0.336800	0.336901
9	0.311769	0.308822	0.308601	0.311255	0.308540	0.308603
10	0.287898	0.285576	0.285636	0.286654	0.284550	0.284555
25	0.132962	0.132772	0.132769	0.130286	0.130113	0.130025
50	0.069872	0.069852	0.069839	0.068061	0.068045	0.068031
100	0.035828	0.035828	0.035828	0.034793	0.034793	0.034792
1000	0.003665	0.003665	0.003665	0.003549	0.003549	0.003549
C_t	2.888201	2.881304	2.876257	2.527996	2.521301	2.519967

поправку, не превышающую 0.1%. Аналогичная зависимость от числа удерживаемых моментов наблюдается и для коэффициента скачка температуры, что, в свою очередь, свидетельствует о надежной сходимости метода.

Для сравнения на рисунке представлена зависимость отношения Q/Q_{fm} от радиуса частицы. Здесь Q_{fm} — поток тепла в свободномолекулярном пределе:

$$Q_{fm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{G}{2} \right).$$

Как видно из графиков, квадратурный метод [2] дает результат, совпадающий с рассчитанным лишь при $R \leq 1$, тогда как по мере роста радиуса



Зависимость отношения Q/Q_{fm} от размера частицы, рассчитанная для азота: 1 — результаты, полученные квадратурным методом [2], 2 и 3 — результаты моментного метода для $N = 1$ и 2 соответственно (в случае $N = 3$ график практически полностью сливается с кривой 3).

частицы отличие становится все более существенным, достигая 10% уже при $R = 10$. Таким образом, в газодинамическом пределе можно говорить лишь о качественном характере результатов [2].

Список литературы

- [1] Савков С.А., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 10. С. 36–40.
- [2] Paozoki N., Loyalka S.K. // J. heat mass transfer. 1988. V. 31. N 5. P. 977–985.
- [3] Савков С.А., Тюлькина Е.Ю. // ЖТФ. 2008. Т. 78. В. 7. С. 16–20.
- [4] Wan Chang C.S., Uhlenbeck G.E., Boer J. // Studies in Statistical Mechanics. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1964.
- [5] Hanson F.B., Morse T.F. // Phys. Fluids. 1967. V. 10. N 2. P. 345–353.
- [6] Савков С.А., Алешин П.С. // ЖТФ. 2005. Т. 75. В. 5. С. 60–64.