01;03

Устойчивость нелинейных волн на поверхности идеальной жидкости в тангенциальном электрическом поле

© *Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 2 ноября 2007 г.

Рассмотрено распространение волн произвольной амплитуды по свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости в сильном тангенциальном электрическом поле. Для жидкости со значительной диэлектрической проницаемостью получено дисперсионное соотношение для эволюции малых возмущений профиля стационарной волны с использованием конформных переменных. Оказалось, что, вне зависимости от геометрии волны, амплитуда мелкомасштабных возмущений не нарастает со временем, что доказывает устойчивость волновых решений.

PACS: 47.65.-d, 47.35.-i, 52.35.Mw

В недавней работе [1] мы показали, что волны произвольной конфигурации могут распространяться без искажений по поверхности диэлектрической жидкости в сильном тангенциальном электрическом поле. Подобная ситуация реализуется для жидкостей с большими значениями диэлектрической проницаемости ($\varepsilon \ll 1$) в длинноволновом пределе, когда влияние электростатических сил будет доминирующим, а капиллярными силами можно пренебречь. Возникает вопрос об устойчивости найденных нами волновых решений; в первую очередь это касается взаимодействия волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Если для волн малой (но конечной) амплитуды доказательство устойчивости не вызывает никаких сложностей [2], то для волн произвольной амплитуды возникает необходимость использования развиваемых в последнее время непертубативных методов описания динамики свободной поверхности жидкости [3,4].

Дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн, распространяющихся вдоль направления тангенциального электрического поля в случае бесконечно глубокого слоя жидкости, имеет следующий вид [5]:

$$\omega^2 = \frac{2\gamma(\varepsilon)W}{\rho}k^2 + \frac{\alpha}{\rho}k^3,$$

где k — волновое число, ω — частота, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, $W \equiv \varepsilon E^2/(8\pi)$ — плотность энергии электрического поля в жидкости, E — напряженность внешнего электрического поля, $\gamma = (\varepsilon - 1)^2/(\varepsilon^2 + \varepsilon)$. Мы будем рассматривать длинноволновой предел $k \ll W/\alpha$, в котором распространение линейных волн будет бездисперсионным: $\omega^2 \approx c^2k^2$, где $c = \sqrt{2\gamma W/\rho}$ — скорость волны.

Для описания эволюции нелинейных волн рассмотрим плоское потенциальное движение идеальной жидкости бесконечной глубины в однородном тангенциальном электрическом поле напряженностью E. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $y = 0$ (ось y декартовой системы координат направлена по нормали к поверхности жидкости). Будем считать, что вектор напряженности поля направлен по оси x, а функция $\eta(x, t)$ задает отклонение границы от плоской, т. е. занимаемая жидкостью область ограничена свободной поверхностью $y = \eta$.

Потенциал скорости ϕ для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{1}$$

которое следует решать совместно со следующими условиями на границе и на бесконечности:

$$\phi_t = (\nabla\phi)^2/2 = (P_E - P_0)/\rho, \quad y = \eta, \tag{2}$$

$$\phi \to 0, \qquad y \to -\infty, \tag{3}$$

где P_E — электростатическое давление, а $P_0 \equiv W(1 - \varepsilon^{-1})$ — константа. Эволюция свободной поверхности задается кинематическим соотношением

$$\eta_t = \phi_y - \eta_x\phi_x, \quad y = \eta. \tag{4}$$

В выражениях (2) и (4) нижние индексы x, y и t означают соответствующие частные производные. Входящая в нестационарное уравнение Бернулли (2) величина P_E определяется выражением [6]

$$P_E = \frac{(\varepsilon - 1)(\nabla\varphi\nabla\varphi')}{8\pi}, \quad y = \eta,$$

где потенциалы поля в жидкости и над ней, соответственно φ и φ', удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\varphi' = 0,$$

которые дополняются условиями однородности поля на бесконечном удалении от поверхности, а также условиями непрерывности потенциала и нормальной компоненты вектора электрической индукции на границе диэлектрика:

$$\varphi \to -Ex, \qquad y \to -\infty,$$

$$\varphi' \to -Ex, \qquad y \to \infty,$$

$$\varphi' = \varphi, \quad \partial_n\varphi' = \varepsilon\partial_n\varphi, \quad y = \eta, \tag{5}$$

где ∂_n — производная в направлении нормали к поверхности $y = \eta$.

Как следует из (5), для среды со значительной проницаемостью $\varepsilon \gg 1$ (к примеру, для этилового спирта $\varepsilon \approx 26$, для нитробензола $\varepsilon \approx 36$, для воды $\varepsilon \approx 81$) нормальная компонента электрического поля в жидкости оказывается много меньше по абсолютному значению тангенциальной компоненты. Это означает, что силовые линии поля внутри жидкости будут направлены по касательной к ее поверхности, а тогда задача о распределении потенциала φ может быть решена без учета распределения поля над жидкостью. Удобно ввести функцию ψ, гармонически сопряженную с φ (условие $\psi = \mathrm{const}$ определяет силовые линии электрического поля). В формальном пределе $\varepsilon \to \infty$ получим для электростатического давления

$$P_E \to \frac{\varepsilon}{8\pi}(\nabla\psi)^2, \qquad P_0 \to W, \tag{6}$$

где функция ψ находится из уравнения Лапласа

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{7}$$

со следующими условиями

$$\psi \to -Ey, \qquad y \to -\infty, \tag{8}$$

$$\psi = 0, \qquad y = \eta. \tag{9}$$

Уравнения (1)–(4) и (6)–(9) определяют эволюцию поверхности жидкости с большим значением диэлектрической проницаемости в тангенциальном электрическом поле. Перейдем к безразмерным обозначениям при помощи замен:

$$\phi \to \lambda(2W/\rho)^{1/2}\phi, \qquad t \to \lambda(2W/\rho)^{-1/2}t,$$

$$\psi \to \lambda E\psi, \quad y \to \lambda y, \quad x \to \lambda x,$$

где λ — характерная длина волны. Для анализа волн произвольной амплитуды удобно воспользоваться развиваемым в работах [3,4] подходом к описанию двумерных потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью. Так, осуществим конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость $v \leqslant 0$ и $-\infty < u < \infty$. В нашем случае вспомогательные переменные u и v имеют конкретный физический смысл: u с точностью до знака совпадает с потенциалом поля φ, а v — с функцией ψ, т. е. $\{u, v\} = -\{\varphi, \psi\}$. Поверхность $y = \eta(x, t)$ будет задаваться параметрическими выражениями:

$$y = Y(u, t), \quad x = u - \hat{H}Y(u, t),$$

где $\hat{H}$ — оператор Гильберта:

$$\hat{H}f(u) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u')(u' - u)^{-1} du'.$$

Эволюция поверхности в новых переменных описывается следующими уравнениями:

$$\Phi_t(1 - \hat{H}Y_u) + \Phi_u\hat{H}Y_t + \hat{H}(Y_t\Phi_u - Y_u\Phi_t) = \hat{H}Y_u, \tag{10}$$

$$Y_t(1 - \hat{H}Y_u) + Y_u\hat{H}Y_t = -\hat{H}\Phi_u, \tag{11}$$

где функция $\Phi(u, t)$ задает значение потенциала скорости ϕ на поверхности жидкости, а нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным. Основное отличие этих уравнений от рассматриваемых в [3,4] заключается в том, что мы учитываем электростатические силы (выражение в правой части уравнения (1)) вместо гравитационных.

Несложно заметить, что точными частными решениями уравнений движения (10) и (11) являются:

$$\Phi = \pm \hat{H} Y = F(u \pm t), \tag{12}$$

где F — произвольная функция. Они соответствуют волнам произвольной геометрии, распространяющимся (по отдельности) по направлению поля либо против без искажений, с постоянной скоростью. Наличие подобных нетривиальных волновых решений было продемонстрировано нами в работе [1].

Использование уравнений (10) и (11) позволит исследовать устойчивость волновых решений по отношению к малым возмущениям. Рассмотрим, к примеру, волны, распространяющиеся справа налево, т.е. против направления оси u. Положим:

$$\Phi = F(u+t) + \rho(u,t), \quad Y = -\hat{H}F(u+t) + \delta(u,t),$$

где ρ и δ — малые возмущения потенциала скорости и соответственно профиля поверхности для прогрессивной волны. Будем считать, что характерный пространственный масштаб изменения этих функций много меньше характерного масштаба для F. Тогда при анализе эволюции возмущений можно считать функцию F и ее производные константами. Подставляя эти выражения в уравнения (10), (11) и учитывая, что $\hat{H}^2 = -1$, получаем после линеаризации по возмущениям:

$$\rho_t - F'\rho_t + F'\rho_u - \hat{H}F'\hat{H}\rho_u + \hat{H}F'\hat{H}\rho_t = \hat{H}\delta_u - 2F'\hat{H}\delta_t + 2F'\hat{H}\delta_u,$$

$$\delta_t - F'\delta_t + F'\delta_u + \hat{H}F'\hat{H}\delta_u - \hat{H}F'\hat{H}\delta_t = -\hat{H}\rho_u,$$

где F' — производная функции F по аргументу. Для построения дисперсионного соотношения будем искать ρ и δ в виде

$$\rho \sim e^{i\omega t + iku}, \quad \delta \sim e^{i\omega t + iku}.$$

Находим в итоге, что дисперсионное соотношение имеет две ветви решений:

$$\omega = k, \quad \omega = k - \frac{2k}{(1-F')^2 + (\hat{H}F')^2}.$$

Первая ветвь соответствует возмущениям, распространяющимся вместе с волной, и интереса для нас не представляет. Вторая ветвь соответствует возмущениям, распространяющимся в противоположном от основной волны направлении (слева направо). Видно, что в пределе малых F будет $\omega = -k$, т.е. линейные волны не взаимодействуют. При конечных F характер эволюции возмущений меняется за счет нелинейного взаимодействия волн. В любом случае частота остается вещественной, и амплитуда возмущений не будет нарастать со временем. Это доказывает устойчивость волновых решений произвольной формы (12) по отношению к малым возмущениям профиля поверхности и поля скоростей.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-02-96035) и президента РФ (проект МД-2553.2007.2) в рамках Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН и программы президиума РАН „Математические методы в нелинейной динамике“.

Список литературы

[1] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 20. С. 40.
[2] *Zubarev N.M.* // Phys. Lett. A. 2004. V. 333. P. 284.
[3] *Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 221. P. 73.
[4] *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Физика плазмы. 1996. Т. 22. В. 10. С. 916.
[5] *Melcher J.R.* // Phys. Fluids. 1961. V. 4. P. 1348.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.