

01;03

Морфологическая устойчивость межфазной границы при вытеснении жидкости в конечной ячейке Хеле—Шоу

© Л.М. Мартюшев, А.И. Бирзина

Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург

E-mail: mlm@esko.uran.ru

Поступило в Редакцию 4 июля 2007 г.

Проведен анализ на морфологическую устойчивость межфазной границы радиально вытесняемой жидкости (при постоянном давлении либо расходе) в ячейке Хеле—Шоу. В отличие от работ, проведенных ранее, расчет выполнен с учетом конечных размеров системы. Помимо существенного уточнения результатов, это позволило описать наблюдаемую ранее в опытах специфическую трансляционную неустойчивость.

PACS: 05.70.Ln, 47.20, 47.54

Процесс вытеснения одной жидкости другой может происходить крайне неустойчиво. Так, например, если менее вязкая жидкость вытесняет более вязкую при горизонтальном движении между параллельными плоскостями, расположенными на малом расстоянии относительно друг друга (в ячейке Хеле—Шоу), то с течением времени граница раздела жидкостей может приобрести причудливую, „пальцеобразную“ форму [1–10]. Это явление широко изучается в связи с проблемами, возникающими при нефтедобыче, а также из-за того, что обнаруживаемые здесь закономерности наблюдаются и у многих других неравновесных процессов (например, при образовании дендритных структур) [9,10]. Важным частным случаем рассматриваемого явления является так называемое радиальное вытеснение, когда вытесняющая жидкость поступает из центра ячейки Хеле—Шоу (рис. 1). Впервые аналитическое описание этого процесса проведено в работах [2,3]. Хотя эти решения позволили качественно описать процесс, они имели ряд недостатков. Так, полученные результаты говорили о том, что граница раздела всегда устойчива к малым возмущениям типа трансляции, тогда как в опыте, напротив, этот тип неустойчивости является очень распространенным. Данный парадокс, по-видимому, может быть связан с тем,

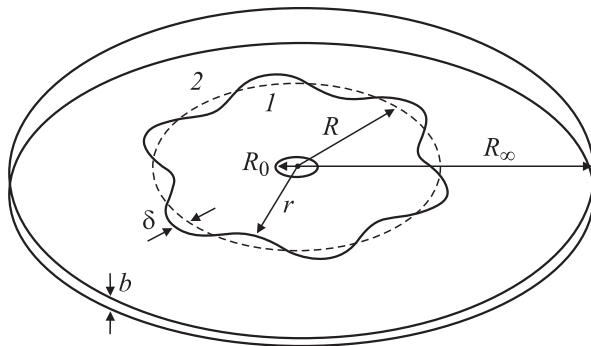


Рис. 1. Схема радиальной ячейки Хеле–Шоу.

что решение задачи проводилось в допущении бесконечных размеров ячейки. Указанное предположение приводило также к невозможности количественного сравнения расчетов с результатами экспериментов, и это существенно затрудняло исследование в данной области. Целью данной работы является рассмотрение задачи о радиальном вытеснении с учетом конечности ячейки Хеле–Шоу.

Математическая постановка задачи (см. также рис. 1), следующая:

$$\Delta p_1 = 0, \quad (1)$$

$$\Delta p_2 = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{n}|_{R_0} = \frac{Q}{2\pi R_0} \quad \text{или} \quad p_1|_{R_0} = p_0, \quad (3a), (3b)$$

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{n}|_r = \mathbf{V}_2 \mathbf{n}|_r, \quad (4)$$

$$p_1 - p_2|_r = K\sigma, \quad (5)$$

$$p_2|_{R_\infty} = 0, \quad (6)$$

где p_i — давление в жидкости ($i = 1, 2$ для вытесняющей либо для вытесняемой жидкости соответственно), \mathbf{V}_i — скорость движения жидкости, \mathbf{n} — нормаль к поверхности, R_0 — радиус отверстия, через которое поступает вытесняющая жидкость либо с постоянным расходом (Q , cm^2/s), либо при постоянном давлении (p_0 , Pa), R_∞ — размер

ячейки Хеле–Шоу, занятой вытесняемой жидкостью, r — уравнение границы раздела двух жидкостей, K — кривизна поверхности раздела, σ — поверхностное натяжение.

Уравнения (1)–(2) являются следствием закона Дарси $\mathbf{V}_i = -M_i \nabla p_i$ ($M_i = b^2/12\mu_i$, b — расстояние между поверхностями ячейки, μ_i — вязкость жидкости) и условия непрерывности потока. Здесь использовано традиционное предположение, что течение жидкости происходит квазистационарно и жидкость несжимаема [2,3]. Уравнения (3a) или (3b) определяют два основных способа организации вытеснения: либо при постоянном расходе поступающей жидкости, либо при постоянном давлении соответственно. Уравнение (4) представляет собой условие непрерывности скорости движения жидкостей на границе раздела. Уравнение (5) — условие Лапласа, задающее скачок давления на искривленной границе двух жидких фаз. Давление вытесняемой жидкости на внешней границе ячейки считается постоянным (6) и для удобства расчета выбрано нулевым (в связи с этим p_i можно считать некими избыточными давлениями по сравнению с внешним).

Будем считать, что граница жидкостей подвергается малым возмущениям, которые представляют собой суперпозицию ряда гармонических функций. В линейном приближении, для того чтобы сделать заключение об устойчивости фронта, достаточно рассмотреть поведение одной из них. В полярной системе координат (r, φ) уравнение возмущенной поверхности запишем в виде

$$r = R + \delta \cos(n\varphi), \quad (7)$$

где R — радиус невозмущенной поверхности, δ — амплитуда возмущения, n — частота возмущения (см. рис. 1).

Следуя работам [2,3], сделаем простейшее предположение, что в перпендикулярном движении сечении граница раздела представляет собой полукруг с радиусом, равным половине b . Тогда, с учетом (7), в линейном приближении

$$K = \frac{2}{b} + \frac{1}{R} + \frac{(n^2 - 1)}{R^2} \delta \cos(n\varphi).$$

Решение задачи (1)–(7) проводилось методом теории возмущения. Давление представлялось в виде ряда по степеням возмущения δ , это разложение подставлялось в уравнения (1)–(2) и в граничные

условия (3)–(6). Затем каждое слагаемое раскладывалось в ряд Тейлора по δ вблизи R , и приравнялись коэффициенты при соответствующих степенях δ . В результате в линейном приближении (здесь нас интересовала лишь начальная стадия потери устойчивости) было найдено, что скорость роста возмущения δ определяется соотношениями¹:

$$\frac{\delta}{\delta} = \frac{Q}{2\pi R^2} \left[-1 + \frac{n(1 - (n^2 - 1) \frac{\Omega}{R} \frac{M_1}{M_1 - M_2}) (1 - \frac{M_2}{M_1})}{\frac{1 + (R_0/R)^{2n}}{1 - (R_0/R)^{2n}} (M_2/M_1) + \frac{1 - (R/R_\infty)^{2n}}{1 + (R/R_\infty)^{2n}}} \right] \quad (8a)$$

или

$$\frac{\delta}{\delta} = -M_2 \frac{\Phi}{R^2} \left[-1 + \frac{n(1 + (n^2 - 1) \frac{\sigma}{R\Phi} \frac{M_1}{M_1 - M_2}) (1 - \frac{M_2}{M_1})}{\frac{1 - (R_0/R)^{2n}}{1 + (R_0/R)^{2n}} (M_2/M_1) + \frac{1 - (R/R_\infty)^{2n}}{1 + (R/R_\infty)^{2n}}} \right], \quad (8b)$$

где $\Omega = \frac{2\pi M_2 \sigma}{Q}$, $\Phi = \frac{2\sigma/b + \sigma/R - p_0}{(M_2/M_1) \ln(R/R_0) - \ln(R/R_\infty)}$. Отметим, что при $R_\infty \rightarrow \infty$ и $R_0 \rightarrow 0$ выражение (8a) совпадает с классическим результатом, приведенным в [3].

Численный анализ (8) показал, что зависимость δ от R изменяет знак с отрицательного на положительный, начиная с некоторого критического значения R_S . Очевидно, что с этого размера форма поверхности раздела теряет устойчивость.

На рис. 2 приведена зависимость величины R_S от размера ячейки R_∞ . Видно, что R_S растет по мере увеличения R_∞ . В случае, когда постоянным является расход жидкости (рис. 2, а), критический радиус достаточно быстро достигает насыщения. Если же на источнике постоянным поддерживается давление (рис. 2, б), R_S на насыщение не выходит. Такое отличие можно объяснить тем, что при $p_0 = \text{const}$ увеличение размеров приводит к непрерывному уменьшению движущей силы вытеснения (и неустойчивости) — перепаду давления² (примерно равному $p_0/(R_\infty - R_0)$).

Увеличение расхода либо давления приводит к уменьшению критического размера устойчивости, как видно из представленных на рис. 3 расчетов. Этот результат прямо указывает на то, что причиной неустойчивости является степень неравновесности системы. Можно

¹ Здесь и ниже индекс „а“ в нумерации формул относится к решению с граничным условием (3a), а „б“ — к решению с (3b).

² При постоянном расходе такой однозначной связи между вынуждающей силой и размером системы нет.

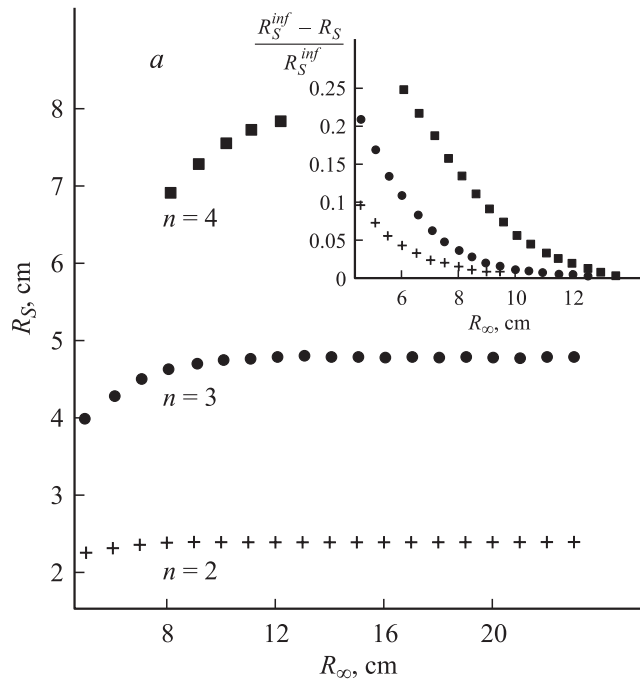


Рис. 2. Зависимость критического радиуса R_S от размера ячейки R_∞ при: *a* — постоянном объемном расходе $Qb = 0.06$ ml/s (на вставке показана зависимость относительного отклонения критического радиуса R_S от критического радиуса R_S^{inf} , найденного ранее в предположении $R_\infty \rightarrow \infty$ [2,3]); *b* — постоянном давлении $p_0 = 85$ Па. Графики построены для $R_0 = 2$ mm, $b = 1.5$ mm, $\sigma = 31.3 \cdot 10^{-3}$ N/m, $\mu_1 = 1.72 \cdot 10^{-5}$ kg/(m · s), $\mu_2 = 230 \cdot 10^{-3}$ kg/(m · s) (вязкости и поверхностное натяжение соответствуют воздуху и касторовому маслу).

также численно показать, что стабилизирующим фактором является поверхностное натяжение и то, что неустойчивость наблюдается лишь тогда, когда менее вязкая жидкость вытесняет более вязкую ($M_1 > M_2$)³.

³ Более подвижная, менее инертная жидкость стремится опередить (обогнать) при своем движении вторую жидкость при движении под действием градиента давления. Ситуация здесь очень напоминает случай, когда две жидкости разной плотности находятся в поле силы тяжести — неустойчивой будет лишь ситуация, когда менее инертная/плотная жидкость находится снизу.

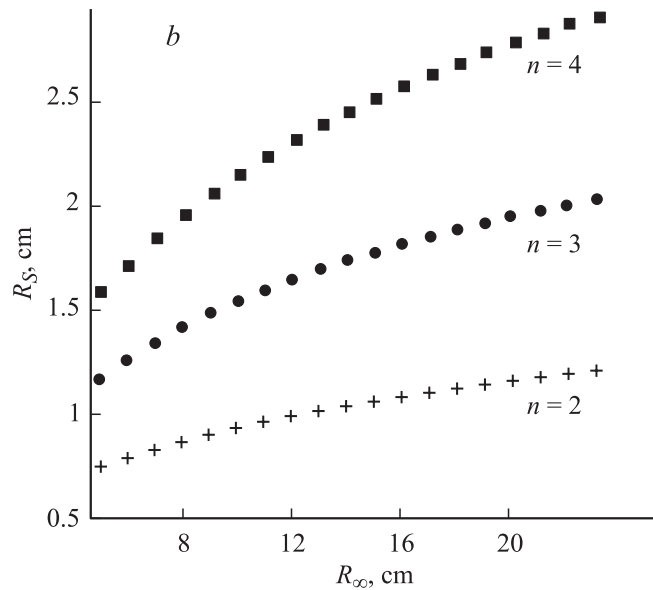


Рис. 2 (продолжение).

Как уже говорилось, особый интерес представляет случай, когда частота возмущения n равна единице (возмущение типа трансляции). В этом случае формулы (8a) и (8b) значительно упрощаются и критический радиус удается выразить явно:

$$R_S = R_0 \sqrt{\frac{(M_2/M_1)(R_\infty/R_0)^2 + 1}{1 - M_2/M_1}}, \quad (9a)$$

$$R_S = R_0 \sqrt{\frac{(M_2/M_1)(R_\infty/R_0)^2 - 1}{1 - M_2/M_1}}. \quad (9b)$$

Прежде всего, отметим, что при $R_\infty \rightarrow \infty$ и $R_0 \rightarrow 0$, согласно (9), R_S стремится к бесконечности и система является трансляционно-устойчивой. Этот предел и был рассмотрен ранее [2,3]. Причина неустойчивости при введении конечности ячейки заключается в том, что только в этом случае возникает асимметрия в системе при трансляции относительно центра системы: в направлении смещения

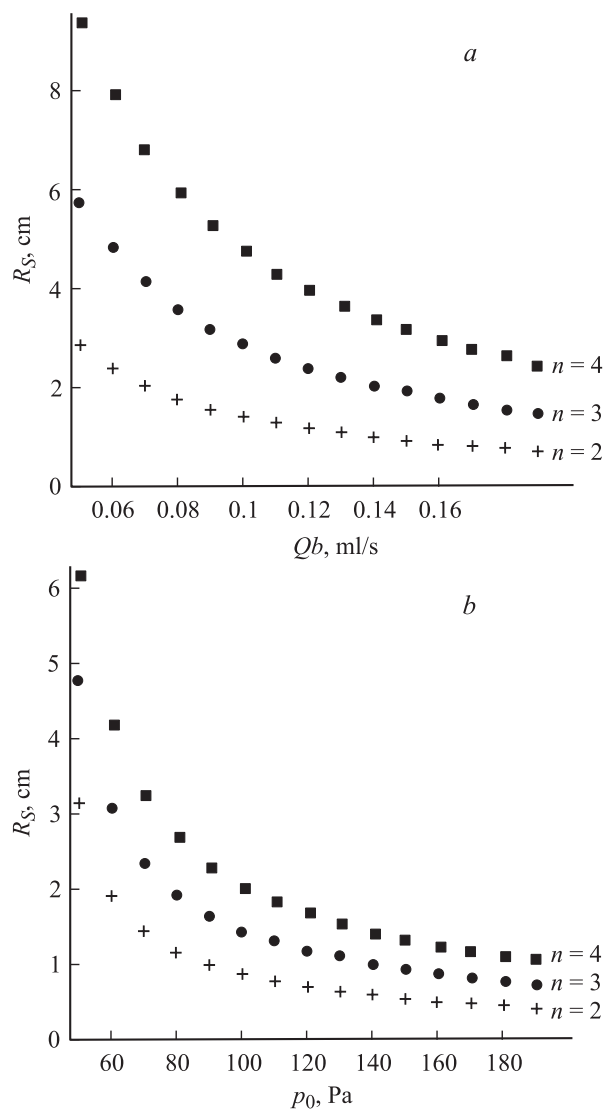


Рис. 3. Зависимость критического радиуса R_S : a — от объемного расхода Qb , b — от давления на источнике p_0 . Графики построены для тех же параметров, что и рис. 2, $R_\infty = 15$ см.

перепад давления будет больше, а в противоположном направлении меньше. В результате возникает положительная обратная связь между движущей силой и смещением, что приводит к дальнейшему развитию неустойчивости.

Как видно, критический радиус в случае вытеснения как при постоянном расходе (9a), так и при постоянном давлении (9b) всегда оказывается больше R_0 . Однако если учесть реально используемые в экспериментах размеры $R_\infty/R_0 \sim 10^2$, то при вытеснении жидкостей газом ($M_2/M_1 \sim 10^{-3}$) критический радиус составит всего лишь несколько R_0 . Последнее позволяет объяснить наблюдаемое в самом начале эксперимента смещение газообразного зародыша относительно центра. Согласно (9), „подавить“ данный тип неустойчивости на начальном этапе вытеснения можно, выбирая близкими по вязкости вытесняемую и вытесняющую жидкость.

Таким образом, в данной работе показано, что учет размера ячейки Хеле–Шоу не только уточняет классические результаты [2,3], но и впервые позволяет понять и описать некоторые наблюдаемые в эксперименте закономерности.

Список литературы

- [1] *Saffman P.G., Taylor G.* // Proc. R. Soc. London. A. 1958. V. 245. P. 312–329.
- [2] *Wilson S.D.R.* // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 51. N 3. P. 532–534.
- [3] *Paterson L.* // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 513–529.
- [4] *Homsy G.M.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 271–311.
- [5] *McCloud K.V., Maher J.V.* // Physics Reports. 1995. V. 260. P. 130–185.
- [6] *Thome H., Rabaud M., Hakim V., Couder Y.* // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. P. 224–240.
- [7] *Bensimon D., Kadanoff L.P., Liang S. et al.* // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. N 4. P. 977–999.
- [8] *Alvarez-Lacalle E., Ortin J., Casademunt J.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 025302.
- [9] *Kessler D.A., Koplik J., Levin H.* // Adv. Physics. 1988. V. 37. N 3. P. 255–339.
- [10] *Ben-Jacob E., Garik P.* // Physica D. 1989. V. 38. P. 16–28.