

01;03

Новая ветвь неустойчивости магнитогидродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле

© А.В. Проскурин, А.М. Сагалаков

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: runme5@ngs.ru

Поступило в Редакцию 6 августа 2007 г.

Исследуется устойчивость к малым возмущениям течения электропроводящей вязкой жидкости в плоском канале при наличии продольного магнитного поля. Обнаружены новая ветвь неустойчивости и скачкообразное изменение критических чисел Рейнольдса.

PACS: 47.65.-d

В работе рассмотрена классическая задача устойчивости плоского течения Пуазейля вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле. Первоначально эта задача рассматривалась Е.П. Велиховым [1]. Анализ задач гидродинамической устойчивости с использованием современных возможностей вычислительной техники иногда приводит к интересным новым результатам [2–4].

В данной работе рассчитаны зависимости критических чисел Рейнольдса Re_* от электропроводности. Расчеты производились вплоть до величин $Re_* \sim 10^7$. Авторами впервые наблюдалось сложное поведение параметрических зависимостей Re_* (Al, P_m). Обнаружена новая ветвь неустойчивости.

Малые возмущения стационарного течения рассматривались в магнитогидродинамическом приближении. С помощью метода элементарных волновых решений линеаризованную систему уравнений магнитной гидродинамики преобразуем в безразмерную систему уравнений для комплексных амплитуд возмущений

$$i\alpha(U - C)h_x = i\alpha v_x + h_y U' + \frac{1}{P_m Re} (h_x'' - h_x(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (1)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{P_m Re} (h_y'' - h_y(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2)$$

$$i\alpha(U - C)h_z = i\alpha v_z + \frac{1}{P_m \text{Re}} (h_z'' - h_z(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (3)$$

$$i\alpha(U - C)v_x + v_y V' = -i\alpha q + i\alpha \text{Al} h_x + \frac{1}{\text{Re}} (v_x'' - v_x(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (4)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + \frac{1}{\text{Re}} (v_y'' - v_y(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (5)$$

$$i\alpha(V - C)v_z = -i\beta q + i\alpha \text{Al} h_z + \frac{1}{\text{Re}} (v_z'' - v_z(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (6)$$

$$v_y' + i\alpha v_x + i\beta v_z = 0, \quad (7)$$

где $v_x, v_y, v_z, h_x, h_y, h_z$ — проекции амплитуд возмущений скорости и напряженности магнитного поля на соответствующие оси декартовой системы координат, $\text{Al} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$ — число Альфвена, $\text{Re} = \frac{V_0 d}{\nu}$ — число Рейнольдса, $R_m = V_0 d \frac{4\pi\sigma}{c^2} = P_m \text{Re}$ — магнитное число Рейнольдса, $P_m = \frac{R_m}{\text{Re}} = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}$ — магнитное число Прандтля, прямо пропорциональное электропроводности, ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость, c — скорость света, σ — электропроводность жидкости, $U = \frac{3}{2}(1 - 4y^2)$ — стационарный параболический профиль скорости, q — возмущение давления, α — продольное волновое число, β — поперечное волновое число, $C = X + iY$ — комплексная фазовая скорость, в которой X — собственно фазовая скорость, а αY — декремент затухания возмущения ($Y < 0$) или инкремент его нарастания ($Y > 0$). В качестве масштабов выбраны: ширина канала d , среднерасходная скорость V_0 , величина напряженности внешнего магнитного поля H_0 . С постановкой задачи более подробно можно ознакомиться по монографиям [5,6].

Стенки канала предполагаются непроницаемыми и идеально электропроводящими. Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{h} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Уравнения (1)–(7) и граничные условия (8) определяют задачу на собственные значения для отыскания C , при решении которой использовался метод дифференциальной прогонки [5]. Данный метод был разработан специально для задач гидродинамической устойчивости под руководством академика Н.Н. Яненко. Численные алгоритмы, использованные в данной работе, тщательно тестировались, для контроля вычислений использовались разные схемы дифференциальной прогонки.

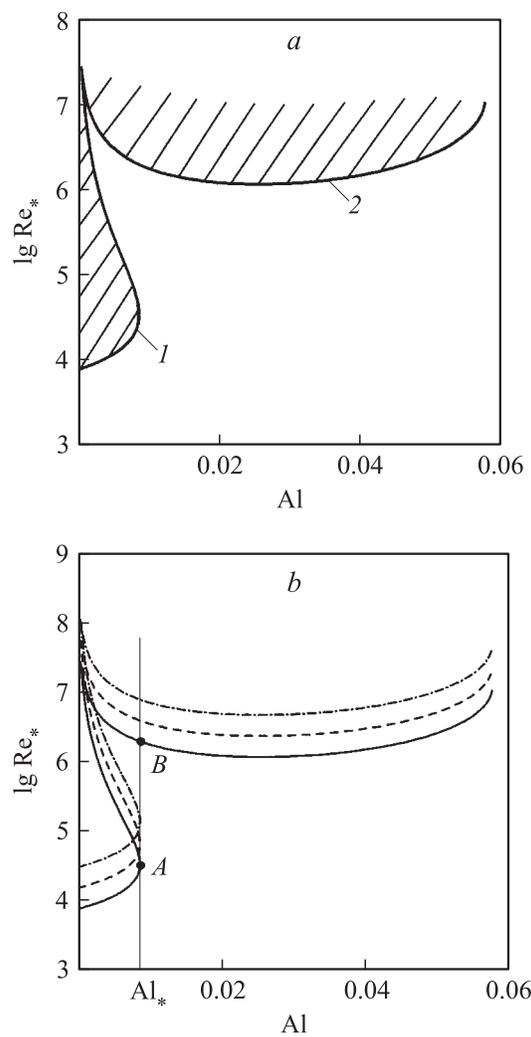


Рис. 1. Зависимости $\text{Re}_*(\text{Al})$ при: a — $P_m = 0.01$; b — $P_m = 0.01$, $\cos \theta = 1$ (сплошная линия), $\cos \theta = \frac{1}{2}$ (пунктирная линия), $\cos \theta = \frac{1}{4}$ (штрихпунктирная линия).

Рассмотрим двумерные возмущения. На рис. 1, *a* приведены зависимости $Re_*(Al)$ при $P_m = 0.01$. Штриховкой обозначено расположение области неустойчивости. При $Al \rightarrow 0$ критические числа Рейнольдса стремятся к величинам, соответствующим случаю плоского течения Пуазейля диэлектрической жидкости. При увеличении числа Альфвена критические числа Рейнольдса монотонно увеличиваются вплоть до $Al \approx 0.03$, после чего кривая критических зависимостей при $Al \approx 0.03$ „разворачивается“ в сторону уменьшения чисел Альфвена, ограничивая область неустойчивости сверху (кривая 1 на рис. 1, *a*). Таким образом, установлено, что при увеличении числа Альфвена критические числа Рейнольдса скачкообразно увеличиваются. Выше данной области при числах Рейнольдса порядка 10^7 обнаружена новая ветвь неустойчивости, критические зависимости которой представляют собой выпуклую вниз кривую (кривая 2 на рис. 1, *a*).

Для проверки роли двумерных возмущений был проведен дополнительный анализ трехмерных возмущений, который позволяет судить об их влиянии на картину устойчивости. При этом обнаружены области, в которых трехмерные возмущения являются более опасными. На рис. 1, *b* в качестве примера приведены зависимости $Re_*(Al)$ при $P_m = 0.01$ для $\cos \theta = 1$ (сплошная линия), $\cos \theta = \frac{1}{2}$ (пунктирная линия), $\cos \theta = \frac{1}{4}$ (штрихпунктирная линия), $\cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Аналогичные графики критических зависимостей для других значений $\cos \theta \neq 1$ могут быть построены с помощью преобразования Сквайра $Re_* = \frac{(Re_{eff})_*}{\cos \theta}$. К нижней ветви критических зависимостей $\cos \theta = 1$ можно провести вертикальную касательную в точке *A* (соответствующее число Альфвена обозначим Al_*), которая пересекает верхнюю ветвь критических зависимостей $\cos \theta = 1$ в точке *B*. Слева от отрезка *AB* расположена область неустойчивости трехмерных возмущений ($\cos \theta < 1$).

Таким образом, учет трехмерных возмущений расширяет область неустойчивости, но двумерные возмущения являются наиболее опасными в том смысле, что критические числа Рейнольдса по отношению к ним являются наименьшими по сравнению с критическими числами Рейнольдса для трехмерных возмущений. При этом области неустойчивости для трехмерных возмущений могут быть получены путем простых смещений графиков критических зависимостей для двумерных возмущений. Для анализа устойчивости при $Al < Al_*$ достаточно рассмотреть двумерные возмущения до точки *A*.

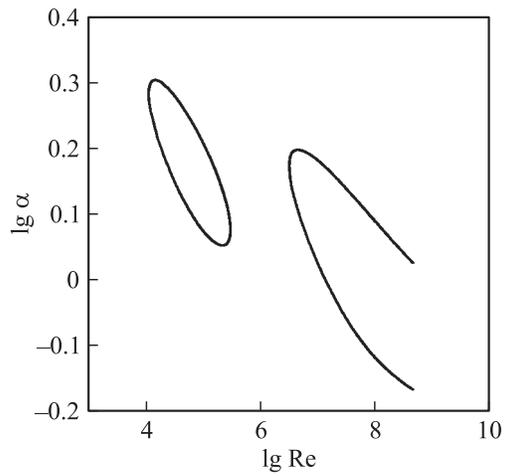


Рис. 2. Нейтральные кривые, $P_m = 0.01$, $Al = 0.005$.

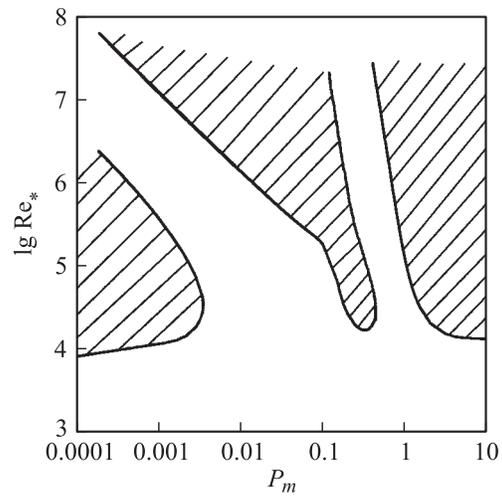


Рис. 3. Зависимости $Re_*(P_m)$ при $Al = 0.015$.

На рис. 2 приведены нейтральные кривые при $P_m = 0.01$, $Al = 0.005$. Замкнутая нейтральная кривая соответствует нижней области неустойчивости на рис. 1, а, а вторая (незамкнутая) нейтральная кривая —

верхней области неустойчивости на рис. 1, *a*. При увеличении числа Альфвена замкнутая область генерации неустойчивости уменьшается и при дальнейшем увеличении числа Альфвена стягивается в точку.

На рис. 3 представлены критические зависимости $Re_*(P_m)$ при $Al = 0.15$. При $P_m \rightarrow 0$ величины критических чисел Рейнольдса стремятся к соответствующим значениям в случае диэлектрической жидкости, при $P_m > 10$ критические зависимости выходят на горизонтальные асимптоты, соответствующие $P_m \rightarrow \infty$. Увеличение магнитного числа Прандтля от 0.0001 до 0.001 приводит к небольшому увеличению критических чисел Рейнольдса. При дальнейшем увеличении магнитного числа Прандтля кривая критических зависимостей „разворачивается“ в сторону уменьшения магнитного числа Прандтля, ограничивая рассматриваемую область неустойчивости сверху. Выше рассмотренной области неустойчивости располагается область устойчивости, которая ограничена сверху второй ветвью критических зависимостей. Такое расположение кривых критических зависимостей обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса при увеличении величины P_m . Аналогичный „просвет“ устойчивости наблюдается и при $P_m \approx 1$.

В данной работе обнаружена новая ветвь неустойчивости рассматриваемого течения в продольном магнитном поле. Также установлено, что полной стабилизации течения, в отличие от результатов работы [1], в рассматриваемом диапазоне чисел Альфвена не происходит, так как скачок критических чисел Рейнольдса ограничивается новой ветвью неустойчивости.

Список литературы

- [1] Велухов Е.П. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. В. 4. С. 1192–1202.
- [2] Vorobev A., Zikanov O. // J. Fluid Mech. 2007. N 574. P. 131–154.
- [3] Boeck T., Krasnov D.S., Zienicke E., Zikanov O., Thess A. // J. Fluid Mech. 2004. V. 504. P. 183–211.
- [4] Zikanov O. // Phys. Fluids. 1996. N 8. P. 2923–2932.
- [5] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
- [6] Henningson D.S., Schmid P.J. Stability and transition in shear flows. New York: Springer-Verlag, 2001.