

09

Некоторые особенности синхронизации короткими импульсами системы Лоренца

© Ю.С. Айдарова, А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: alkuz@sgu.ru

Поступило в Редакцию 4 октября 2006 г.

Рассмотрены особенности синхронизации периодической последовательностью коротких импульсов в системе Лоренца при вариации параметра, отвечающего за рождение хаотического аттрактора.

PACS: 05.45.xt

Система Лоренца является одной из первых и существенных моделей нелинейной динамики [1,2]. Ее динамика достаточно хорошо изучена [2,3] и характеризуется определенным типом рождения хаотического аттрактора, известного как аттрактор Лоренца. В настоящее время проблема синхронизации в системах, в которых возможен динамический хаос, привлекает большое внимание [4–7]. Весьма интересной задачей является выявление картины синхронизации при вариации параметра, отвечающего за характер автономной динамики. В настоящей работе эта проблема исследована на примере системы Лоренца под периодическим воздействием коротких импульсов. Подчеркнем, что задача о синхронизации такими импульсами может заметно отличаться от случая гармонического воздействия [8–10].

Рассматриваемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, σ, r, b — параметры, а ε и T — амплитуда и период внешних импульсов. Для исследования картины синхронизации, возникающей в системе (1), были построены

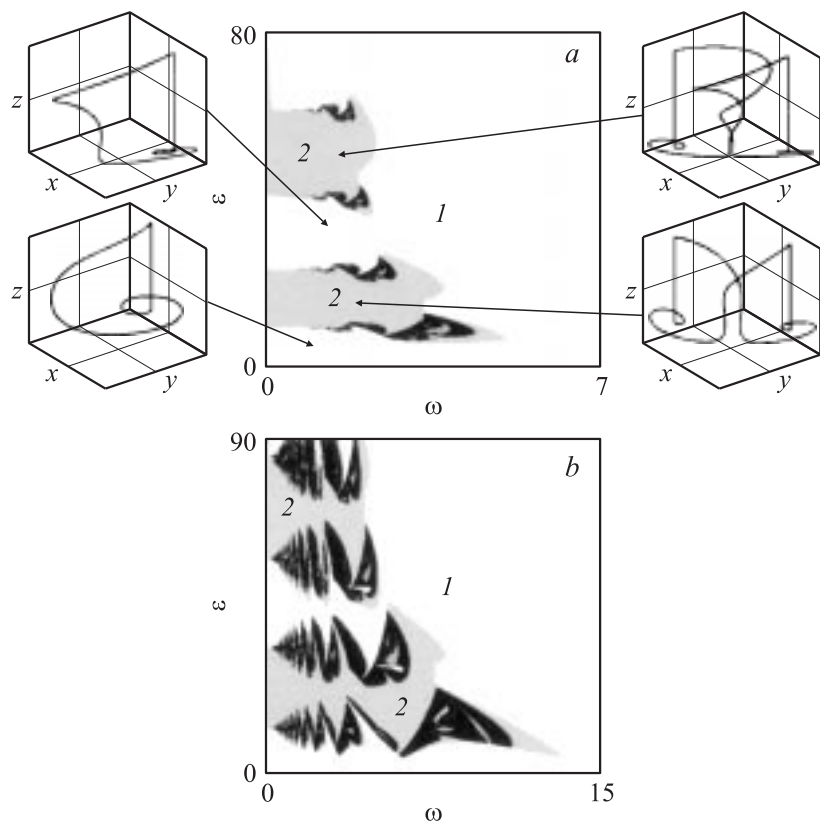


Рис. 1. Карты динамических режимов и неавтономные аттракторы системы Лоренца под внешним воздействием в виде периодической последовательности δ -функций. Карты построены для следующих значений параметра r : $a - r = 5$ и $b - r = 15$. Параметры b и σ фиксированные и равны $b = 8/3$ и $\sigma = 10$.

карты динамических режимов на плоскости параметров амплитуда ε — частота $\omega = 2\pi/T$ внешнего воздействия, а также неавтономные аттракторы внутри некоторых областей синхронизации (рис. 1). На этих картах белым цветом обозначен режим периода 1, светло-серым — режим периода 2 и т.д., а черный цвет отвечает хаосу. (Период режима определяется в соответствующем сечении Пуанкаре.) При этом параметры σ и b были фиксированы и равны традиционным значениям

$b = 8/3$ и $\sigma = 10$, а параметр r менялся от нуля до 28, что отвечает потере устойчивости, в автономной системе находившейся в начале координат неподвижной точки, и рождению хаотического аттрактора. Также отметим, что при больших значениях параметра r (например, $r = 345$) в автономной системе Лоренца имеет место устойчивый предельный цикл, а при уменьшении r наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Из рис. 1, *a* хорошо видно, что при небольших значениях параметра r ($r = 5$), в неавтономной системе Лоренца не наблюдается достаточно сложных режимов. Большую часть плоскости параметров занимает область режима периода 1, отвечающая тому, что между импульсами траектории в фазовом пространстве приходит в неподвижную точку, лежащую на оси z , а внешний импульс выбрасывает ее из неподвижной точки. Однако при небольших значениях частоты внешнего воздействия наблюдаются области режимов удвоенного периода и хаоса, расположенные друг над другом в вертикальной плоскости (рис. 1, *a*). Каждая из таких областей отвечает разному числу оборотов предельного цикла вокруг неустойчивых неподвижных точек системы. Так, из рис. 1 хорошо видно, что аттрактор, отвечающий первой структуре, совершает один оборот вокруг одной (лежащей в области положительных значений переменной x) из неустойчивых точек системы. А аттрактор, отвечающий второй области, имеет дополнительную „петлю“ в окрестности второй неустойчивой точки (рис. 1, *a*). Аналогичные закономерности устройства аттракторов неавтономной системы Лоренца характерны и для режимов всех остальных периодов: два (рис. 1, *a*), четыре, восемь и т.д. Более того, очевидно, что указанные выше периодические области режимов удвоенного периода и хаоса будут наблюдаться и при больших значениях амплитуды внешнего воздействия.

При увеличении параметра r области режимов удвоенного периода и хаоса увеличиваются в размере и сдвигаются в направлении больших значений частоты внешнего воздействия (рис. 1, *b*). При этом области хаотической динамики становятся более выраженными, а в областях удвоенного периода и хаоса появляется периодичность и по горизонтали. Особенно это характерно для структур, возникающих при небольших значениях амплитуды внешнего воздействия. Кроме того, области режимов удвоенного периода и хаоса немного сдвигаются вверх на карте динамических режимов, т.е. для того чтобы наблюдать то же число периодических структур, необходимо рассмотреть больший диапазон амплитуд. Если и дальше увеличивать параметр r ($r = 28$ —

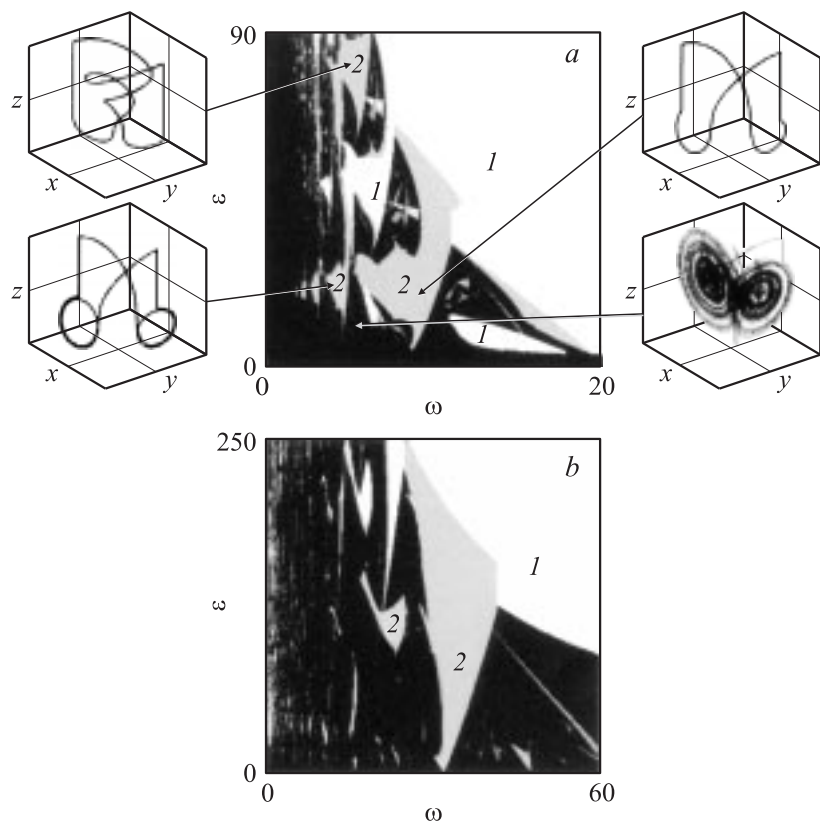


Рис. 2. Карты динамических режимов и неавтономные аттракторы системы Лоренца под внешним воздействием в виде периодической последовательности δ -функций. Карты построены для следующих значений параметра r : a — $r = 28$ и b — $r = 345$. Параметры b и σ фиксированные и равны $b = 8/3$ и $\sigma = 10$.

отвечает наличию в автономной системе Лоренца хаотического аттрактора), то на карте динамических режимов можно различить две больших области, характеризующихся существенно различающейся динамикой. Первая область располагается в правой верхней части карты (рис. 2, a), где система, так же как и раньше, демонстрирует лишь режим периода 1 . Траектория при этом приходит в неподвижную точку, лежащую на оси z . Вторая область располагается в левой нижней части

карты, где наблюдаются режимы синхронизации различных периодов и квазипериодические режимы. Отметим, что теперь периодичность попеременно чередующихся областей синхронизации имеет место не только в вертикальной плоскости, но и в горизонтальной. При этом, так же как и при меньших значениях параметра r (рис. 1, *a*), аттракторы одного периода, но относящиеся к разным вертикальным структурам, отличаются дополнительной „петлей“ вокруг одной из неподвижных точек (рис. 2, *a*). Так, аттрактор, построенный для самой нижней области синхронизации периода 2 (см. верхний правый аттрактор на рис. 2, *a*), совершает по одному обороту вокруг каждой из двух неустойчивых неподвижных точек автономной системы Лоренца. А аттрактор того же периода, но построенный для второй снизу области синхронизации периода 2 (см. верхний левый аттрактор на рис. 2, *a*), имеет дополнительную „петлю“ в окрестности левой неустойчивой неподвижной точки. Аттракторы одного периода, построенные для областей синхронизации, чередующихся в горизонтальной плоскости, характеризуются несколько другими отличиями друг от друга. А именно, все они совершают обороты вокруг неустойчивых неподвижных точек автономной системы Лоренца, однако число оборотов зависит от того, для какой именно области синхронизации построены аттракторы. Чем левее на карте динамических режимов расположена область синхронизации, тем больше оборотов вокруг неустойчивых неподвижных точек совершает аттрактор (рис. 2, *a*).

В заключение скажем несколько слов о картине синхронизации, наблюдаемой в системе (1) при очень больших значениях параметра r , например $r = 345$. Отметим, что в автономной системе Лоренца при таком значении параметра r имеет место устойчивый предельный цикл периода 1, а при его уменьшении в системе наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода на базе этого цикла. Тем не менее динамика неавтономной системы Лоренца похожа на ту, которая наблюдается при значениях параметра r , отвечающих хаотическому аттрактору (см. рис. 2, *a* и *b*). Так, плоскость параметров амплитуда–частота внешнего воздействия также разбита на две части: область, где система демонстрирует режим периода 1, и область, где наблюдаются периодические и квазипериодические режимы. Однако теперь область режима периода 1, так же как и периодические структуры, наблюдается лишь при очень больших значениях амплитуды внешнего воздействия ($\varepsilon > 100$) или частоте внешнего воздействия ($\omega > 30$) (рис. 2, *b*). А вот устройство областей синхронизации, рас-

положенных в нижней части карты динамических режимов, иное. Они представляют собой вытянутые от линии $\varepsilon = 0$ довольно узкие языки синхронизации различных периодов, вне которых система (1) демонстрирует квазипериодическое поведение. Таким образом, можно сказать, что при больших значениях параметра r система Лоренца (1) демонстрирует картину синхронизации, похожую на классическую. Кроме того, отметим, что при больших значениях параметра r на карте динамических режимов не наблюдается явной периодичности областей синхронизации (рис. 2, *b*).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 04-02-04011, и грантом CRDF BRHE REC-006 N Y2-P-06-13.

Список литературы

- [1] Lorenz E.N. // J. of the Atmospheric Science. 1963. V. 20. P. 130–141.
- [2] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
- [3] Anishchenko V.S., Silchenko A.N., Khovanov I.A. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 316–322.
- [4] Dykman G., Landa P., Neimark Y. // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. V. 1. P. 339–353.
- [5] Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. Chaotic synchronization: applications to living systems. Singapore: World Scientific, 2002.
- [6] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [7] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [8] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. // Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9. № 6. С. 69–82.
- [9] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. // Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12. № 5. С. 16–31.
- [10] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. // Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13. № 1. С. 72–81.