

03

## Нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости

© В.А. Ильин, Б.Л. Смородин

Пермский государственный университет  
E-mail: ilin1@psu.ru

Поступило в Редакцию 26 сентября 2006 г.

На основе восьмимодовой модели электроконвекции исследовано поведение неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле горизонтального конденсатора. Рассмотрены жидкости, в которых основным механизмом зарядообразования является электрокондуктивный механизм, обусловленный линейной зависимостью электропроводности среды от температуры. Изучено взаимодействие электроиндуктивного и термогравитационного механизмов конвекции. Обнаружены стационарные, различные периодические и хаотические нелинейные режимы течения жидкости. Изучены гистерезисные переходы между монотонными и колебательными режимами. Показано, что переход от периодических колебаний к хаосу происходит через последовательность удвоения периода.

PACS: 05.45.-a, 83.80.Gv

Электрическое поле может сильно влиять на конвективные движения слабопроводящих жидкостей благодаря проявлению специфических электроконвективных механизмов неустойчивости [1]. Исследование поведения слабопроводящих жидкостей в электрических полях представляет интерес в связи с возможностью управления их поведением, влияния на перенос заряда, протекания токов и теплоперенос в высоковольтных устройствах [2]. Различные режимы электроконвекции идеального жидкого диэлектрика, сильно различающиеся по интенсивности теплопереноса через конденсатор, исследованы в [3].

В данной работе изучены нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе, связанные с неодинаковой электропроводностью жидкости вблизи горячего и холодного электродов. Считается, что электропроводность жидкости линейно зависит от температуры:  $\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T)$ , где  $\beta_\sigma$  — положительный коэффициент электропроводности.

Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, находящейся в постоянном вертикальном электрическом поле  $\mathbf{E}$  и поле тяжести  $\mathbf{g}$ . Ось  $x$  направлена вдоль нижней границы слоя, ось  $z$  — перпендикулярно границам слоя. Идеально тепло- и электропроводные пластины конденсатора расположены при  $z = 0, h$  ( $h$  — толщина слоя) и нагреты до разной температуры  $T(0) = \Theta, T(h) = 0, T$  — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения. Потенциал поля верхней границы равен нулю:  $\varphi(h) = 0$ , потенциал нижней фиксирован  $\varphi(0) = U$ .

Если напряжение на обкладках конденсатора не превосходит определенного предельного значения, то влияние инжекции зарядов на движение диэлектрика пренебрежимо мало [4]. Система уравнений электроконвекции слабопроводящей жидкости в гравитационном и электрических полях в безындукционном приближении запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \right) = \text{Ra}_\sigma \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + \text{Ra} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta^2 \psi,$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \Delta \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\text{Pr}_e \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \right) + \rho_e + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0,$$

где  $\psi, T, \rho_e$  — поля функции тока, температуры, плотности заряда. Система уравнений (1) содержит следующие безразмерные параметры: тепловое число Рэлея  $\text{Ra} = \frac{\rho g \beta \Theta h^2}{\eta \chi}$ , электрическое число Рэлея  $\text{Ra}_\sigma = \frac{\varepsilon U^2 \beta \sigma \Theta}{\eta \chi}$ , число Прандтля  $\text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho}$ , электрическое число Прандтля  $\text{Pr}_e = \frac{\varepsilon \eta}{h^2 \rho \sigma_0}$  ( $\rho, \varepsilon, \eta, \chi, \beta$  — плотность, диэлектрическая проницаемость, динамическая вязкость, коэффициенты температуропроводности и теплового расширения жидкости).

Для решения системы уравнений (1) будем использовать метод Галёркина, применяя следующие аппроксимации полей функции тока  $\psi$  и температуры  $\vartheta$ , удовлетворяющие граничным условиям  $z = 0, 1$ ;

$\psi = \psi'' = \vartheta = 0$  и плотности заряда  $\rho_e$ :

$$\begin{aligned}\psi &= (A_1(t) \sin \pi z + A_2(t) \sin 2\pi z) \sin \pi kx, \\ \vartheta &= (B_1(t) \sin \pi z + B_2(t) \sin 2\pi z) \cos \pi kx + C(t) \sin 2\pi z, \\ \rho_e &= (D_1(t) \cos \pi z + D_2(t) \cos 2\pi z) \cos \pi kx + E(t) \cos 2\pi z,\end{aligned}\quad (2)$$

здесь  $k$  — волновое число, характеризующее периодичность возмущений в плоскости слоя;  $A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2, E, C$  — амплитуды, характеризующие различные пространственные моды. В отличие от случая идеального диэлектрика [3] в разложениях (2) присутствуют слагаемые с разной четностью по  $z$ . Это связано с тем, что в уравнении для эволюции возмущений заряда присутствует слагаемое, содержащее первую производную по  $z$ , которое обуславливает перераспределение энергии между модами различной четности.

После перемасштабирования переменных

$$\begin{aligned}t &\rightarrow \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)} t, & A_1 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} X, & A_2 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} V, \\ B_1 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} Y, & B_2 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} W, & C &\rightarrow \frac{Z}{\pi}, \\ D_1 &\rightarrow \sqrt{2} S, & D_2 &\rightarrow 2\sqrt{2} T, & E &\rightarrow U\end{aligned}$$

получим восьмимодовую модель электроконвекции слабопроводящей жидкости (точка над переменными обозначает производную по времени):

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -fS + XU - fY, & \dot{T} &= -fT - fW, & \dot{U} &= -fU - XS - 2fZ, \\ \dot{V} &= \text{Pr}(-dV + (rW + eS)/d), & \dot{W} &= -dW + V, \\ \dot{X} &= \text{Pr}(-X + rY - eT), & \dot{Y} &= -Y + X + XZ, & \dot{Z} &= -bZ - XY; \\ r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, & e &= \frac{\text{Ra}_\sigma}{\text{Ra}_{\sigma 0}}, & \text{Ra}_0 &= \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, & \text{Ra}_{\sigma 0} &= \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2}, \\ b &= \frac{4}{1+k^2}, & d &= \frac{4+k^2}{1+k^2}, & f &= \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)\text{Pr}_e},\end{aligned}\quad (3)$$

где  $r, e$  — нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея;  $\text{Ra}_0, \text{Ra}_{\sigma 0}$  — критические числа, при которых начинается термогравитационная [5] или электрокондуктивная [6] конвекция соответственно;  $b, d$  —

геометрические параметры;  $f$  — определяет отношение времени релаксации тепловых и зарядовых возмущений. Динамическая система (3) является обобщением маломодовой модели Лоренца [7] на случай электроконвекции слабопроводящей жидкости с электроиндуктивным механизмом зарядообразования.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд (3) интегрировалась численно методом пошагового интегрирования Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка точности при  $Pr = 400$ ,  $Pr_e = 30$ , которые соответствуют типичным слабопроводящим жидкостям (трансформаторное, конденсаторное масла). Полученные в результате интегрирования реализации временной эволюции амплитуды анализировались с помощью быстрого преобразования Фурье, и определялся спектральный состав отклика конвективной системы на электрическое поле.

В расчетах значение волнового числа  $k = 0.933$  соответствовало минимуму нейтральной кривой возникновения электроконвекции в невесомости ( $r = 0$ ). При этом значения параметров таковы:  $b = 2.138$ ,  $d = 2.604$ ,  $f = 0.722$ . Для изучения гистерезисных переходов использовался метод продолжения по параметру. Интенсивность теплопереноса через конденсатор характеризуется числом Нуссельта  $Nu$  — средним по времени значением безразмерного теплопотока, приходящегося на единицу горизонтальной границы конденсатора.

Карта режимов электроконвекции на плоскости электрическое число  $e$  — число Нуссельта представлена на рисунке для надкритичности  $r = 1.1$ . В отсутствие электрического поля ( $e = 0$ ) наблюдается обычная монотонная термогравитационная рэлеевская конвекция. При включении и последующем увеличении внешнего электрического поля конвективный поток тепла уменьшается (участок  $AB$ ) — электрическое поле подавляет тепловую конвекцию до тех пор, пока не установится равновесие при  $e_B = 1.3$  (в этом случае тепло передается теплопроводным механизмом:  $Nu = 1$ ).

При значении электрического поля  $e_C = 3.4$  мягко возникают электроконвективные колебания, которые существуют на участке  $CE$ . В интервале параметра  $e$   $[3.4 \div 7.1]$  существует регулярный колебательный режим, в спектре Фурье которого существует некоторая частота колебаний и ее утроенная гармоника. С ростом приложенного поля они медленно растут. Например, при  $e = 3.5$  зафиксированы частоты  $\nu_1 = 0.077$ ,  $\nu_2 = 0.231$ , при  $e = 7.1$  —  $\nu_1 = 0.098$ ,  $\nu_2 = 0.294$ .

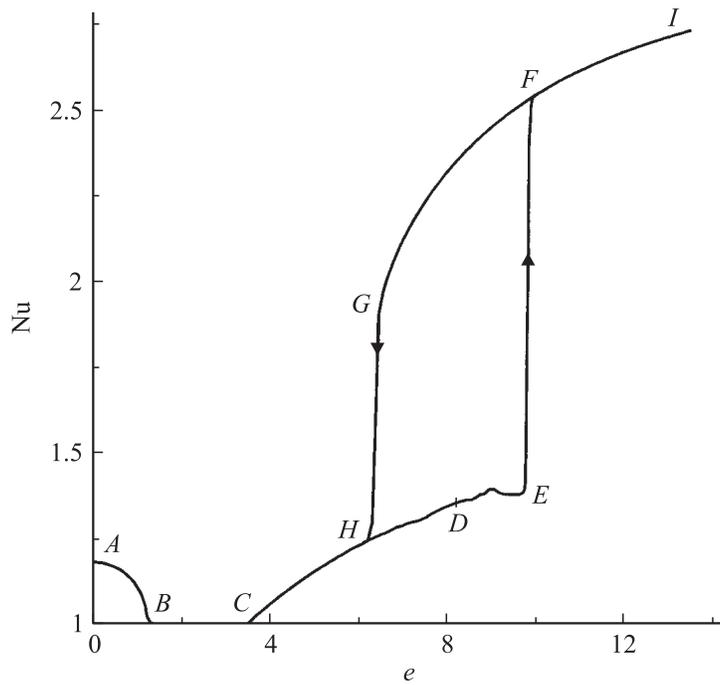


График зависимости теплопотока от электрического числа при  $r = 1.1$ .

Начиная со значения  $e = 7.2$  режим регулярных колебаний изменяется: собственная частота становится чуть меньше ( $\nu_1 = 0.097$ ), появляется ее удвоенная гармоника ( $\nu_2 = 0.194$ ), а при дальнейшем увеличении электрического числа собственная частота и ее гармоники убывают.

При дальнейшем росте электрического числа обнаружена последовательность бифуркаций удвоения периода (субгармонический каскад), в результате которой происходит переход от периодического режима колебаний к хаотическому режиму. При  $e = 7.98$  происходит первое удвоение периода — в спектре появляется частота, равная половине основной частоты ( $\nu = 0.043$ ), а также ее утроенная ( $\nu = 0.129$ ), упятеренная ( $\nu = 0.215$ ) гармоники и т.д. При  $e = 8.1487$  возникает второе удвоение периода (появляется частота  $\nu = 0.0214$ ), при  $e = 8.1903$  — третье ( $\nu = 0.0108$ ), при  $e = 8.1992$  — четвертое ( $\nu = 0.0053$ ). В табли-

Значения параметра  $e_k$ , отвечающие бифуркациям удвоения периода

Номер $k$	Бифуркация удвоения периода, $e_k$
1	7.98
2	8.1487
3	8.1903
4	8.1992

це приведены значения  $e_k$ , отвечающие четырем бифуркациям удвоения периода. С точностью до второй значащей цифры переход к хаосу происходит при  $e_D = 8.21$  (спектр становится сплошным). Используя значения параметров  $e_k$  при второй, третьей и четвертой бифуркациях удвоения (см. таблицу), проведена оценка константы Фейгенбаума  $\delta = 4.674$ , что с погрешностью примерно 0.1% совпадает с точным ее значением  $\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k - e_{k-1}}{e_{k+1} - e_k} = 4.669 \dots$  [7]. В области хаоса ( $DE$ ) были обнаружены узкие окна периодичности.

При использовании метода продолжения по параметру получаем, что при  $e_E = 9.8$  происходит переход от колебательного хаотического режима к монотонной конвекции. На участке  $FI$  реализуется стационарное движение жидкости, интенсивность движения и теплоток увеличиваются. При движении в пространстве параметров справа налево (участок  $FGH$ ) наблюдается гистерезисный переход от монотонного режима к колебательному с резким уменьшением потока тепла, что происходит при значении электрического числа  $e_G = 6.5$ .

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00789) и гранта CRDF (PE-009-0).

## Список литературы

- [1] *Castellanos A., Atten P., Velarde M.G.* // Phys. Fluids. 1984. V. 27. N 7. P. 1607–1615.
- [2] *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Физматгиз, 1972.
- [3] *Ильин В.А., Смородин Б.Л.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31 (10). С. 57–63.

- [4] *Жданов С.А., Косвинцев С.Р., Макарихин И.Ю.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 117 (2). С. 398–406.
- [5] *Гершуни Г.З., Жуковецкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
- [6] *Gross M.J., Porter J.E.* // Nature. 1966. V. 212. N 5068. P. 1343–1345.
- [7] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.