

01;09

Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды

© А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: alkuz@sgu.ru

Поступило в Редакцию 3 августа 2006 г.

Исследована динамика отображения Икеды при очень слабой диссипации как в автономном случае, так и при воздействии внешнего шума. Показано, что при этом в системе сосуществует большое число низкочастотных аттракторов, тем большее, чем меньше диссипация в системе, а также наблюдается весьма длительный переходный процесс. Показано, что воздействие внешнего шума приводит к разрушению большинства аттракторов.

PACS: 05.45.Pq, 05.40.Ca

К настоящему времени в нелинейной динамике фактически сложились две в достаточной степени независимые ветви, посвященные исследованию консервативных и диссипативных систем. Во многом это обусловлено объективными различиями в динамике систем, приводящими к необходимости применения различных методов для их численного исследования. Так, практически все методы исследования диссипативных систем связаны с исследованием структуры аттрактора, в то время как в консервативных системах аттрактор отсутствует.

Однако в некоторых системах можно наблюдать переход от диссипативной к консервативной динамике при непрерывном изменении соответствующего параметра. При этом при приближении к консервативному случаю возникает весьма интересное поведение, демонстрирующее черты как консервативной, так и диссипативной динамики. Такое поведение естественно назвать „почти консервативным“.

В настоящей работе исследовано такое поведение в одной из классических модельных систем нелинейной динамики — отображения Икеды:

$$z_{n+1} = A + Bz_n e^{i(|z_n|^2 + \psi)}. \quad (1)$$

Следует отметить, что в отличие от многих модельных систем данная допускает конкретную физическую интерпретацию: она может описываться как нелинейный кольцевой оптический резонатор [1], так и нелинейный осциллятор с внешним импульсным воздействием [2]. Якобиан этого отображения равен B^2 , поэтому B фактически является параметром диссипации: при $B = 1$ система является консервативной, при $B < 1$ — диссипативной.

Динамика системы Икеды в случае существенной диссипации хорошо исследована (см., например, [3]). В частности, известно, что при увеличении параметра A в системе происходит переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Для исследования динамики почти консервативной системы построим бифуркационные деревья (т.е. зависимости установившихся значений переменной $x = \operatorname{Re} z$ от параметра A) при различных значениях параметра диссипации B . Для учета характерной существенной зависимости реализующегося режима от начальных условий на одном рисунке покажем систему бифуркационных деревьев, полученных при использовании набора таких условий. Для этого в наших численных экспериментах использовалась „конденсация“ облака начальных точек, заданного равномерно на квадратной решетке $N \times N$ на плоскости $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. Типичные значения N составляли 20 и 100. (Аналогичный метод был применен в [4] для исследования отображения ротатора). Полученные бифуркационные деревья приведены на рис. 1. Можно видеть, что, действительно, при уменьшении диссипации количество сосуществующих низкочастотных аттракторов существенно увеличивается. При этом их можно разделить на два типа. Аттракторы первого типа появляются при сравнительно небольших значениях параметра A и характеризуются достаточно большой длиной интервала по оси A , в котором они существуют. Кроме того, они появляются при меньших значениях параметра B . Аттракторы второго типа появляются при больших значениях параметра A , характеризуются значительно более сложной динамикой и, очевидно, являются аттракторами периодов 2 и выше, так как на бифуркационной диаграмме для переменной $|z|^2$ изображающие их точки появляются парами или большим числом точек одновременно. При визуальном исследовании на бифуркационной диаграмме почти не наблюдается хаотических аттракторов, что связано, вероятно, с тем, что они имеют бассейны притяжения с характерным размером меньше периода сетки начальных условий. Каскад удвоений периода для периодических аттракторов

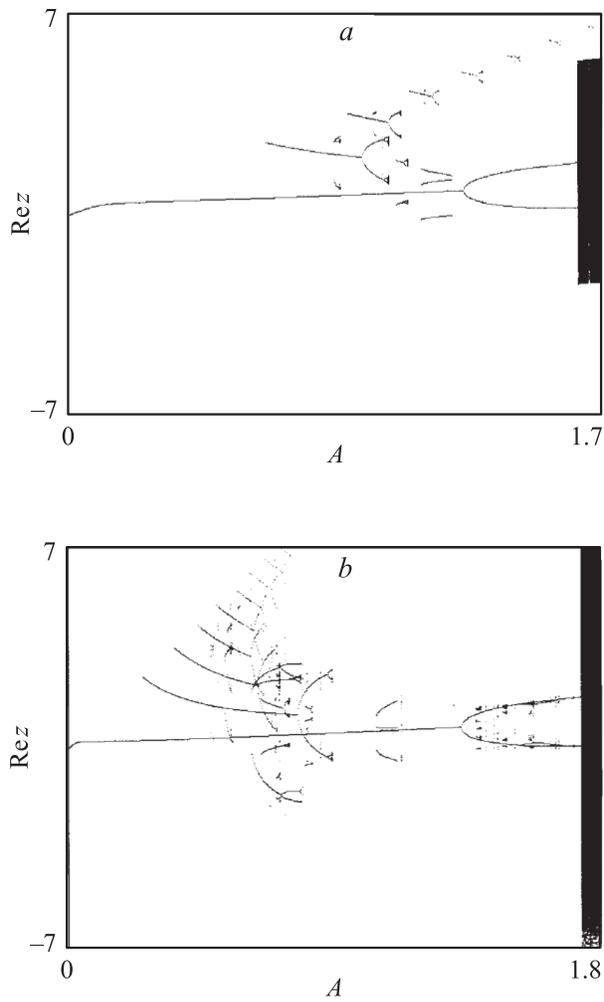


Рис. 1. Бифуркационные деревья системы (1), построенные для набора начальных условий при различных значениях параметра B : a — $B = 0.75$; b — $B = 0.9$; c — $B = 0.99$. Значение параметра ψ зафиксировано: $\psi = 0$.

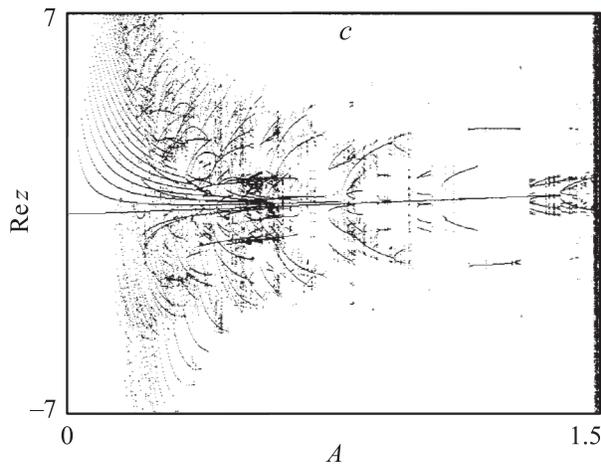


Рис. 1 (продолжение).

наблюдается, как правило, лишь до периода 2, что связано с тем, что в консервативном случае расстояния между точками двух последовательных удвоений периода уменьшаются значительно быстрее, чем в диссипативном.

Кроме того, нами обнаружено существенное (более чем в 10 раз) увеличение времени переходного процесса при изменении параметра B от 0.5 до 0.99 (в последнем случае его длительность достигает 500 000 итераций), при этом она крайне неравномерно зависит от параметра A . На рис. 2 приведены несколько систем бифуркационных деревьев для одного и того же значения параметра диссипации, построенные при различной длительности пропущенного переходного процесса. Видно, что в то время как в некоторых областях периодическое поведение устанавливается уже после 5000 итераций, в других поведение выглядит непериодическим даже после 200 000 итераций, однако в конце концов становится периодическим. Это свидетельствует о том, что на начальных стадиях эволюции система со слабой диссипацией ведет себя как консервативная, в частности демонстрирует непериодическое поведение, однако при длительной эволюции ее динамика становится существенно диссипативной.

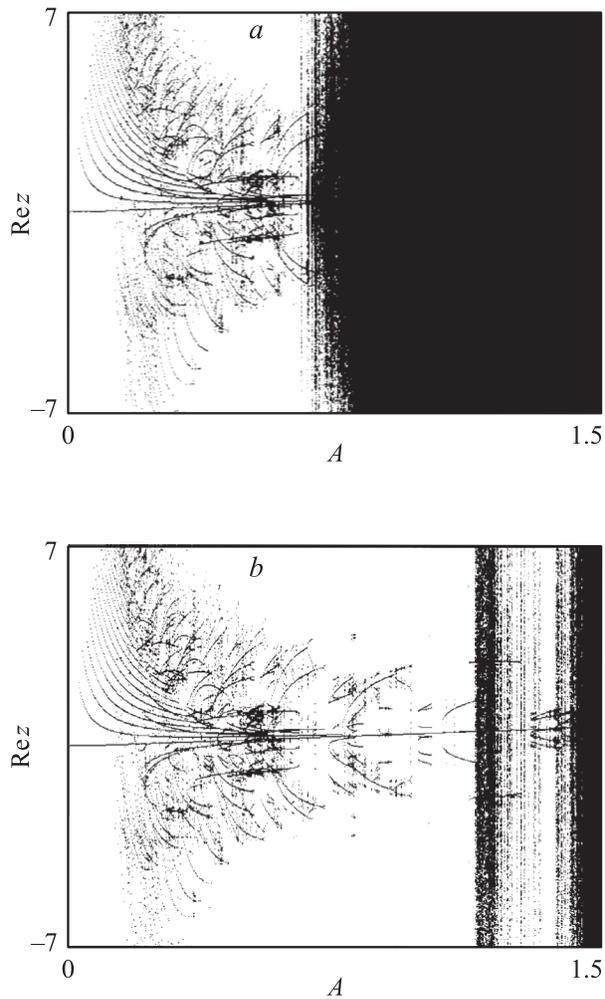


Рис. 2. Бифуркационные деревья системы (1), построенные для набора начальных условий при различных длительностях пропускаемого переходного процесса: a — 5000 итераций; b — 200 000 итераций. Значение параметров: $B = 0.99$, $\psi = 0$. Дерево для установившегося режима (переходный процесс 500 000 итераций) приведено на рис. 1, c .

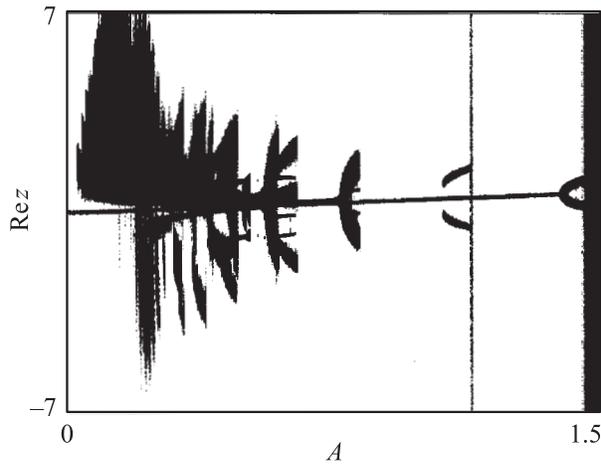


Рис. 3. Бифуркационные деревья системы (2), построенные для набора начальных условий. Амплитуда внешнего шума $\varepsilon = 0.005$, значения параметров $B = 0.99$, $\psi = 0$.

Весьма интересным (в том числе и с точки зрения возможности наблюдения в реальных системах) является вопрос об устойчивости возникающих в слабодиссипативном случае аттракторов к шумовому воздействию. Для его изучения рассмотрим следующую модель:

$$z_{n+1} = A + Bz_n e^{i(|z_n|^2 + \psi)} + \varepsilon \xi_n, \quad (2)$$

где ξ_n — случайная вещественная величина, в численном эксперименте предполагавшаяся равномерно распределенной на симметричном относительно нуля отрезке. В рамках модели неавтономного нелинейного осциллятора такое шумовое воздействие может рассматриваться как случайная модуляция амплитуды импульсов. Система бифуркационных деревьев для отображения (2) приведена на рис. 3. Хорошо видно, что под влиянием шума существенная часть аттракторов, в том числе большинство аттракторов второго типа, разрушается, что свидетельствует о малости их бассейнов притяжения, а длины интервалов по параметру A , в которых существуют остальные аттракторы, уменьшаются. При дальнейшем увеличении амплитуды шума этот процесс продолжается.

Также можно отметить, что наблюдается резкое расширение некоторых аттракторов, исчезающих в автономной системе при некотором значении параметра A , непосредственно перед их исчезновением. Это косвенно свидетельствует о том, что разрушение таких аттракторов происходит в результате их столкновения с границей бассейна притяжения: при этом траектория, оказавшаяся около границы бассейна, может быть „выброшена“ за нее шумовым воздействием, что приведет к неограниченному росту значений переменной. Визуализация такой динамики на бифуркационном дереве (не отображающем переходный процесс) свидетельствует о том, что эти явления происходят в том числе и с траекториями, уже находящимися на аттракторе. Вполне естественным представляется также тот факт, что при введении шума переходный процесс существенно удлиняется, в том числе и за счет вышеописанного механизма.

Таким образом, при уменьшении диссипации в отображении Икеды наблюдается резкое увеличение числа сосуществующих низкочастотных аттракторов, а также длительности переходного процесса. В то же время большая часть этих аттракторов разрушается при воздействии на систему внешнего шума.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-04011).

Список литературы

- [1] Ikeda K., Daido H., Akimoto O. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 709.
- [2] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8. N 2. С. 31.
- [3] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
- [4] Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. N 1. P. 71.