01

Неустойчивые колебания заряженных частиц в узле электрического поля стоячей электромагнитной волны

© А.Ф. Курин

Воронежский государственный университет
E-mail: afkurin@mail.ru

Поступило в Редакцию 3 августа 2006 г.

Описано явление неустойчивого движения зарядов в узле электрического поля стоячей волны. Выводы основаны на анализе однородного и неоднородного уравнений Матье, полученных из уравнений движения зарядов. Учтены также нелинейности. Построено решение в интервалах устойчивости, примыкающих к границам первого интервала неустойчивости.

PACS: 11.10.-z

Как указывалось в работе [1], при движении зарядов в пространственно неоднородных высокочастотных электромагнитных полях возможны параметрические явления, которые теоретически обнаруживаются, если не пользоваться усреднением по быстрым колебаниям поля в уравнениях движения зарядов. Вместо возникающего при усреднении квазипотенциального барьера [2,3] для частиц имеем барьер, зависящий от времени. В [1] описан один из параметрических эффектов: устойчивые колебания и эффективное ускорение зарядов в пучности электрического поля стоячей линейно поляризованной волны. В настоящей работе рассматривается другое параметрическое явление: неустойчивые колебания частиц в узле электрического поля указанной волны. Ранее считалось, что в узле (на дне квазипотенциального барьера) движение устойчиво [3]. Существование интервалов значений амплитуды электрического поля волны, в которых колебания неустойчивы, следует уже из линеаризованной по координатам системы уравнений движения, поскольку при этом в частном случае, имеющем физический смысл, приходим к уравнению Матье, тривиальное решение которого, как известно, в зависимости от значений параметров может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В этом частном случае с учетом нелинейностей методом усреднения во втором приближении построено решение, описывающее ограниченные колебания зарядов вблизи границ первого интервала неустойчивости. Колебания имеют вид биений. В общем случае линеаризация системы уравнений по координатам приводит к неоднородному уравнению Матье с медленно меняющимся параметром. Все результаты теории проверены численным решением точных уравнений движения.

Рассмотрим движение заряда $-e$ в высокочастотном линейно поляризованном стоячем поле, образованном неоднородными волнами, бегущими вдоль оси z декартовой системы координат x, y, z. Векторный потенциал такого поля равен

$$\mathbf{A} = \frac{E_0}{k}\cos(\omega t)\sin(hz)(1, 0, 0), \tag{1}$$

где E_0 — амплитуда электрического поля $\mathbf{E}$, $h = nk$, $k = \omega/c_0$, n — показатель преломления немагнитной среды, c_0 — скорость света в вакууме. В работе [1] векторное релятивистское уравнение движения заряда в поле (1) приведено к удобной для анализа параметрических явлений системе уравнений

$$\ddot{Z} = \Omega^2(n^{-2}\dot{Z}\sin T\sin Z - \cos T\cos Z)(q_x + \cos T\sin Z),$$

$$\dot{X} = \Omega(q_x + \cos T\sin Z), \quad \dot{Y} = q_y\Omega,$$
$$\dot{\Omega} = n^{-2}\Omega^3(q_x + \cos T\sin Z)\sin T\sin Z. \tag{2}$$

Здесь $T = \omega t$, $Z = hz$, $X = h(x - x_0)$, $Y = h(y - y_0)$ — безразмерные координаты частицы (x_0, y_0 — начальные (при $T = T_0 = \omega t_0$) координаты), $\Omega = n\varepsilon/\gamma$ — отношение гирочастоты в магнитном поле nE_0 стоячей волны к частоте поля ω, $\varepsilon = eE_0/(m_0c_0\omega)$ — параметр электрического поля, m_0 — масса покоя заряда, $\gamma = (1 - v^2/c_0^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, $v = |\mathbf{v}|$. Далее, в уравнениях (2) постоянные параметры

$$q_x = \frac{\gamma_0\beta_{x0}}{\varepsilon} - \sin Z_0\cos T_0, \quad q_y = \frac{\gamma_0\beta_{y0}}{\varepsilon} \tag{3}$$

выражаются через начальные значения (при $T = T_0 = \omega t_0$) релятивистского фактора γ_0, координаты $Z_0 = hz_0$, составляющих скорости v_{x0}, v_{y0} ($\beta_{x0} = v_{x0}/c_0$, $\beta_{y0} = v_{y0}/c_0$). Точки над переменными величинами в (2) означают дифференцирование по T. Отметим, что функция Ω обратно пропорциональна энергии частицы. Система уравнений (2) интегрируется с начальными условиями: $T = T_0$, $Z = Z_0$, $\dot{Z} = \dot{Z}_0$, $X = Y = 0$, $\Omega = \Omega_0 = n\varepsilon/\gamma_0$.

Остановимся сначала на случае $q_x = 0$, что означает, в частности, согласно (3), инжекцию частицы в узле электрического поля ($Z_0 = 0$) и отсутствие при этом составляющей скорости по x ($\beta_{x0} = 0$). Используя известные аппроксимации тригонометрических функций в окрестности $Z = 0$, запишем вместо (2) приближенную систему, учитывающую нелинейности по Z до кубической включительно

$$\ddot{Z} + aZ = a\Big\{-\cos(2T)Z + \frac{2}{3}\big[1 + \cos(2T)\big]Z^3 + \frac{1}{n^2}\sin(2T)Z^2\dot{Z}\Big\},$$

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{n^2}\sin(2T)Z^2, \quad \dot{X} = 0, \quad \dot{Y} = q_y\Omega, \tag{4}$$

где обозначено $a = \Omega^2/2$. Если в этой системе отбросить нелинейные слагаемые, то получаем постоянное решение $a = a_0 = \Omega_0^2/2$ второго уравнения, а из первого уравнения следует уравнение Матье

$$\ddot{Z} + \big[a + q\cos(2T)\big]Z = 0 \tag{5}$$

с равными постоянными параметрами $q = a = a_0$. Известна [4] диаграмма устойчивости тривиального решения уравнения Матье (диаграмма Айнса–Стретта) на плоскости (a, q). На диаграмме границами областей неустойчивости являются характеристические кривые

$$a_{cl} = f_l(q), \quad a_{sl} = g_l(q), \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

вычисленные в виде рядов по степеням q. В работе [4] эти ряды содержат слагаемые до $\sim q^4$. В нашем частном случае одного параметра в уравнении Матье области неустойчивости на плоскости становятся интервалами на оси значений a, и принятая в [4] точность позволяет вычислить с небольшой погрешностью обе границы $a_{1\,\min}$, $a_{1\,\max}$ первого интервала неустойчивости ($a_{1\,\min} \leqslant a \leqslant a_{1\,\max}$) и левую границу $a_{2\,\min}$ второго интервала неустойчивости ($a_{2\,\min} \leqslant a$). Граничные значения первого интервала являются корнями алгебраических уравнений (6) при $l = 1$, $q = a$, $a_{c1} = a$, $a_{s1} = a$: $a_{1\,\min} = 0.6580$, $a_{1\,\max} = 1.7793$. Левая граница второго интервала является корнем второго уравнения (6) при $l = 2$, $q = a$, $a_{s2} = a$: $a_{2\,\min} = 3.7166$. Таким образом, ограниченные колебания Z имеем только в интервалах устойчивости тривиального решения уравнения (4) для Z, т. е. при $0 < a < a_{1\,\min}$, $a_{1\,\max} < a < a_{2\,\min}$. Отметим, что напряженность электрического поля и длину волны, соответствующие граничным значениям a, можно оценить по формуле

$$\Omega = \sqrt{2a} = 3.1 \cdot 10^{-2} n\gamma^{-1} E_0 \left[\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}\right] \lambda[\mathrm{m}],$$

справедливой для электрона.

С учетом нелинейностей систему уравнений (4) для Z и a решаем асимптотическим методом усреднения. При этом систему $\ddot{Z} + aZ = 0$, $\dot{a} = 0$ считаем порождающей. В ее решении $Z = b\cos\psi$, $\dot{Z} = -b\nu\sin\psi$, $a = a_0$, где $\nu = \sqrt{a}$, будем считать зависящими от T переменные Ван-дер-Поля b, ψ, а также медленно меняющийся параметр ν (для первого интервала неустойчивости $\nu \approx 1$). Для новых переменных b, ν, ψ получаем систему уравнений, содержащих быстро вращающиеся фазы [5]. Медленными переменными будут $b(T), \nu(T)$, а также фаза $\theta(T) = 2\psi(T) - 2T$, быстрыми — фазы $\phi_1 = 2\psi(T) + 2T$, $\phi_{2,3} = 4\psi(T) \mp 2T$, $\phi_4 = 2\psi(T)$, $\phi_5 = 2T$. Эта система решается с начальными значениями: $T = T_0$, $b = b_0$, $\nu = \nu_0$, $\theta = \theta_0 = \pi - 2T_0$, $\phi_1 = \phi_{10} = \pi + 2T_0$, $\phi_{2,3} = \phi_{2,30} = 2\pi \mp 2T_0$, $\phi_4 = \phi_{40} = \pi$, $\phi_5 = \phi_{50} = 2T_0$. Выбор начального значения $\psi(T_0) = \pm\pi/2$ связан с инжекцией частицы в узле электрического поля ($Z_0 = 0$). Нелинейные слагаемые в правых частях уравнений (4) будем считать второго порядка малости. Отметим, что метод усреднения при решении уравнения Матье (5) использовался в работе [6]. В результате во втором приближении метода для усредненных по быстрым колебаниям величин $\bar{b}, \bar{\theta}, \bar{\nu}$ получаем систему уравнений

$$\dot{\bar{b}} = \frac{\bar{\nu}\bar{b}}{4}\left(1 - \frac{\bar{b}^2}{3}\right)\sin\bar{\theta}, \quad \dot{\bar{\nu}} = -\frac{\bar{\nu}^3\bar{b}^2}{4n^2}\sin\bar{\theta},$$

$$\dot{\bar{\theta}} = 2(\bar{\nu} - 1) - \frac{\bar{\nu}^2}{16(\bar{\nu} + 1)} - \frac{\bar{\nu}\bar{b}^2}{2} + \bar{\nu}\left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{b}^2}{3}\right)\cos\bar{\theta} \qquad (7)$$

с начальными условиями

$$\bar{b}(T_0) = b_0 + \frac{\nu_0 b_0 \cos\phi_{10}}{8(\nu_0 + 1)}, \quad \bar{\nu}(T_0) = \nu_0,$$

$$\bar{\theta}(T_0) = \theta_0 - \frac{\nu_0}{2}\left(\frac{\sin\phi_{10}}{2\nu_0 + 2} + \sin(2T_0)\right).$$

Входящие в решение $b(T)$, $\theta(T)$, $\nu(T)$ быстроколеблющиеся составляющие, которые накладываются на медленное изменение величин, здесь не приводятся.

Оценим границы первого интервала неустойчивости с учетом нелинейностей. Как это сделано для уравнения Матье (5) в работе [6], используем условие существования стационарного решения системы (7), когда $\bar{b}, \bar{\theta}, \bar{\nu}$ не зависят от T. Решение возможно при $\sin\bar{\theta} = 0$, $\cos\bar{\theta} = \pm 1$. Тогда из уравнения для $\bar{\theta}$ (6) получаем $a_{1\,\min} \approx 0.660 + 0.542\bar{b}^2$, $a_{1\,\max} \approx 1.834 + 0.301\bar{b}^2$. Как видно, при $b^2 \ll 1$ границы мало зависят от амплитуды колебаний, и влияние нелинейностей здесь оказывается порядка погрешности вычислений в методе усреднения.

Решим систему (7). Для этого из уравнений для $\bar{b}$ и $\bar{\nu}$ находим интегралы движения

$$\bar{\nu}^{-1} = \nu_0^{-1} + 0.5n^{-2}\big(\bar{b}^2 - \bar{b}^2(T_0)\big),$$

$$\cos\bar{\theta} = \bar{b}^{-2}\big[\alpha_1\bar{b}^2(T_0) + \alpha_2\bar{b}^2 + \alpha_3\bar{b}^4(T_0) + \alpha_4\bar{b}^2(T_0)\bar{b}^2 + \alpha_5\bar{b}^4\big], \qquad (8)$$

где обозначено

$$\alpha_1 = \cos\big(\bar{\theta}(T_0)\big) + \gamma, \quad \alpha_2 = -\gamma, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{3}\cos\big(\bar{\theta}(T_0)\big) + m - \frac{1}{2},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{3}\cos\big(\bar{\theta}(T_0)\big) + \frac{\gamma}{3} - 2m,$$

$$\alpha_5 = -\frac{\gamma}{3} + m + \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{s}{r}, \quad s = 2(\nu_0 - 1) - \frac{\nu_0^2}{16(\nu_0 + 1)},$$

$$r = \frac{\nu_0}{2}, \quad m = \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{\nu_0^2}{32(\nu_0 + 1)^2}\right].$$

Формулы (8) получены в виде разложений по степеням $\bar{b}, \bar{b}(T_0)$, и при этом обеспечена точность, принятая в уравнениях (4). Переходя в уравнении для $\bar{b}$ (7) к новой переменной $w = \bar{b}^2$, дифференцируя это уравнение по T, используя уравнения (7), а также интегралы (8), приходим к уравнению консервативного осциллятора

$$\ddot{w} + \Omega_1^2 w = k_1 w^2 + k_2, \qquad (9)$$

где
$$\Omega_1^2 = s^2 - r^2 - r^2 R_1 w(T_0), \quad k_1 = r^2 R_2,$$
$$k_2 = r^2[R_3 w(T_0) + R_4 w^2(T_0)], \quad w(T_0) = \overline{b}^2(T_0),$$
$$R_1 = -\alpha_1[2n^{-2}\gamma\nu_0 + 2m + 1] + n^{-2}(1-\gamma^2)\nu_0 - 4\gamma m,$$
$$R_2 = 1.5n^{-2}(\gamma^2 - 1)\nu_0 + 3\gamma m + 1.5\gamma - 1, \quad R_3 = \alpha_1\gamma,$$
$$R_4 = 0.5n^{-2}\nu_0\alpha_1^2 + \alpha_1(n^{-2}\gamma\nu_0 + 2m - \gamma/3) + \gamma(\gamma/3 + m - 0.5).$$

Решение уравнения (9) методом Ляпунова [5] на участках интервалов устойчивости, примыкающих к границам первого интервала неустойчивости, приводит к выражению
$$w(\tau) = w_p + cw^{(1)}(\tau) + c^2 w^{(2)}(\tau) + c^3 w^{(3)}(\tau) + \ldots, \tag{10}$$
где $w_p = (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)/(2k_1)$ — положение равновесия в уравнении (9), $\Omega_2^2 = \sqrt{\Omega_1^4 - 4k_1k_2}$, $c = w(T_0) - w_p$ — начальное отклонение от положения равновесия, которое считается малым, $\tau = \Omega_2(T - T_0)/(1 + hc^2 + \ldots)$ — фаза колебаний, $h = 5k_1^2(1+\sigma^2)/(12\Omega_2^4)$ — коэффициент, в котором величина σ вычисляется в рамках метода Ляпунова. В виде разложения по степеням c она равна
$$\sigma = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_1^2 p_2}}{2cp_1p_2} + \frac{cp_1p_2}{\sqrt{1 - 4p_1^2p_2}} + \ldots,$$
где $p_1 = w'(T_0)/\Omega_2$, $p_2 = 5k_1^2/(12\Omega_2^4)$. Начальное значение производной $w'(T_0)$ следует из первого уравнения (6), если в нем перейти к $w = \overline{b}^2$ и затем в правой части уравнения все величины взять при $T = T_0$. Неизохронные колебания в (10) описываются функциями, содержащими гармоники частоты $\Omega_2/(1 + hc^2 + \ldots)$. Функции имеют вид
$$w^{(1)}(\tau) = \cos\tau + \sigma\sin\tau,$$
$$w^{(2)}(\tau) = \frac{k_1}{\Omega_2^2}\Big[\frac{1}{2}(1+\sigma^2) - \frac{1}{3}(1+2\sigma^2)\cos\tau + \frac{2}{3}\sigma\sin\tau - \frac{1}{6}(1-\sigma^2)\cos(2\tau) - \frac{1}{3}\sigma\sin(2\tau)\Big],$$

$$w^{(3)}(\tau) = \left(\frac{k_1}{\Omega_2^2}\right)^2 \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{144}(29 - 55\sigma^2)\cos\tau + \frac{5}{144}\sigma(1 - 11\sigma^2)\sin\tau \right.$$
$$+ \frac{1}{9}(1 + 4\sigma^2)\cos(2\tau) - \frac{1}{9}\sigma(1 - 2\sigma^2)\sin(2\tau)$$
$$\left. + \frac{1}{48}(1 - 3\sigma^2)\cos(3\tau) + \frac{1}{48}\sigma(3 - \sigma^2)\sin(3\tau)\right].$$

Из решения (10) следует, что быстрые осцилляции частицы $z = b\cos\psi$, где $\psi = 0.5(\theta + T)$ — быстрая фаза, имеют усредненную амплитуду $\bar{b}$, которая зависит от момента влета T_0 и медленно колеблется около положения равновесия, зависящего также от T_0. В целом колебания имеют вид биений.

При $q_x \neq 0$ линеаризация по Z уравнений (2) приводит к неоднородному уравнению Матье с $q = a$, которое отличается от (5) наличием в правой части резонансной (при $a \approx 1$) силы $f = -2q_x a\cos T$. Параметр a при $|q_x| \ll 1$ является медленно меняющимся. В данном случае заряды оказываются в условиях как параметрического, так и обычного резонансов. Анализ методом усреднения неоднородного уравнения Матье, которому уже не удовлетворяет тривиальное решение, показывает, что при двух резонансах имеются опять-таки интервалы неустойчивых резонансных колебаний. Вблизи границ этих интервалов существует ограниченное устойчивое по Ляпунову нетривиальное решение, описывающее колебания частиц с периодически медленно меняющейся амплитудой. Ввиду устойчивости колебания слабо зависят от начальных условий.

Список литературы

[1] *Курин А.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 13. С. 1–9.
[2] *Гапонов А.В., Миллер М.А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 1. С. 242–243.
[3] *Миллер М.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 3. С. 110–123.
[4] *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
[5] *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
[6] *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.