

01;09

## Устройство плоскостей управляющих параметров неидентичных связанных автоколебательных систем

© А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: pakxutov@list.ru

Поступило в Редакцию 20 октября 2005 г.

Проведен анализ бифуркаций и областей синхронизации на плоскостях управляющих параметров неидентичных связанных автоколебательных систем. Изучены как двумерные, так и трехмерные связанные системы. Обнаружены своеобразное устройство областей синхронизации, а также новый тип критического поведения на пороге хаоса в связанных системах с удвоениями периода.

PACS: 05.45.Xt

Автоколебательные системы с предельными циклами весьма распространены в природе и технике [1]. Динамика связанных подобных систем привлекает внимание уже много лет и является предметом рассмотрения в обширной литературе. В то же время для таких задач остался не обсужденным один очень интересный и существенный аспект, а именно: пусть имеются две неидентичные автоколебательные системы, каждая из которых характеризуется своим параметром, управляющим бифуркацией Андронова–Хопфа рождения предельного цикла. Как будет устроена плоскость этих управляющих параметров? В развитии такой постановки задачи можно рассмотреть не только простейшие двумерные системы с предельными циклами, но и системы с трехмерным фазовым пространством, в которых возможен еще и каскад бифуркаций удвоения периода.

Простейшим примером неидентичных связанных систем, в каждой из которых возможна своя бифуркация Андронова–Хопфа, является система из двух осцилляторов Ван-дер-Поля–Дуффинга с диссипативной

связью:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

где  $\mu$  — коэффициент связи,  $\lambda_1, \lambda_2$  — управляющие параметры осцилляторов,  $\delta$  — расстройка собственных частот,  $\beta$  — параметр нелинейности. При значениях  $\lambda_{1,2} = 0$  в автономных несвязанных осцилляторах происходит бифуркация Андронова–Хопфа. (Обратим внимание на нормировку в уравнениях (1), именно такой способ введения параметра  $\lambda$  обеспечивает сформулированную постановку задачи).

Традиционное исследование связанных систем обычно выполняется на плоскости параметров  $(\delta, \mu)$ , что методологически аналогично исследованию плоскости частота–амплитуда воздействия в задаче о синхронизации внешним сигналом. В то же время система (1) демонстрирует новые эффекты — гибели колебаний, возможность синфазной и противофазной синхронизации и др. [1,2]. Система (1) методом медленно меняющихся амплитуд приводится к следующей укороченной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi \\ \frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\delta + 3\beta(R^2 - r^2) - \mu \left( \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \psi, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R, r$  — действительные амплитуды колебаний осцилляторов,  $\psi$  — разность фаз колебаний. В автономном режиме колебаний предельные циклы осцилляторов имеют форму, близкую к окружности, тогда, предполагая  $R = \sqrt{\lambda_1} + \tilde{R}$ ,  $r = \sqrt{\lambda_2} + \tilde{r}$ ,  $\tilde{R}, \tilde{r} \ll 1$ , при малых значениях

параметра связи  $\mu$  можно получить следующее уравнение:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\delta + 3\beta(\lambda_1 - \lambda_2) + \mu \sqrt{9\beta^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2} \sin(\psi + \theta), \quad (3)$$

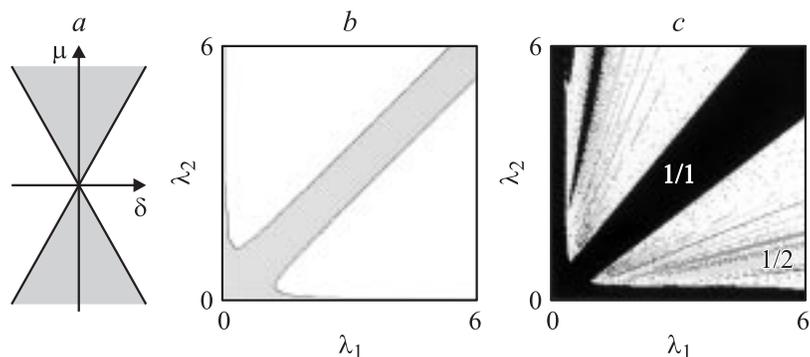
где

$$\theta = \pm \arcsin \left( 3\beta \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) / \sqrt{9\beta^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2} \right) + \pi n, \quad n \in Z.$$

Мы пришли к известному уравнению фазовой динамики, которое часто называют уравнением Адлера. Оно позволяет определить область синхронизации типа 1/1 в пространстве параметров системы, внутри которой уравнение (3) имеет устойчивую точку равновесия  $\psi_0$ . На рис. 1, *a* представлены области синхронизации на плоскости параметров  $(\delta, \mu)$ , где они имеют вид классических языков синхронизации. Можно видеть, что на плоскости управляющих параметров  $(\lambda, \lambda_2)$ , показанной на рис. 1, *b*, области синхронизации имеют иную, „нестандартную“ форму. Как мы покажем ниже, эта структура проявляется и в динамике более сложных систем.

На рис. 1, *c* показана найденная численно для исходной дифференциальной системы (1) карта динамических режимов, на которой оттенками серого цвета показаны области различных периодических режимов. Для ее построения использовался метод сечений Пуанкаре. Сравнение рис. 1, *b* и *c* показывает, что приближенное описание с помощью соотношений (2) хорошо передает форму основного языка синхронизации. В то же время внутри области квазипериодики появилось большое количество „языков“, других периодов, которые в данном случае имеют вид своеобразных „лучей“, расходящихся от начала координат.

Нами проведено детальное численное исследование системы (1), в частности изучено влияние нелинейности осцилляторов  $\beta$  на устройство плоскости управляющих параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Обнаружено, что незначительное увеличение  $\beta$  приводит к заметной деформации областей кратной синхронизации на указанной плоскости.



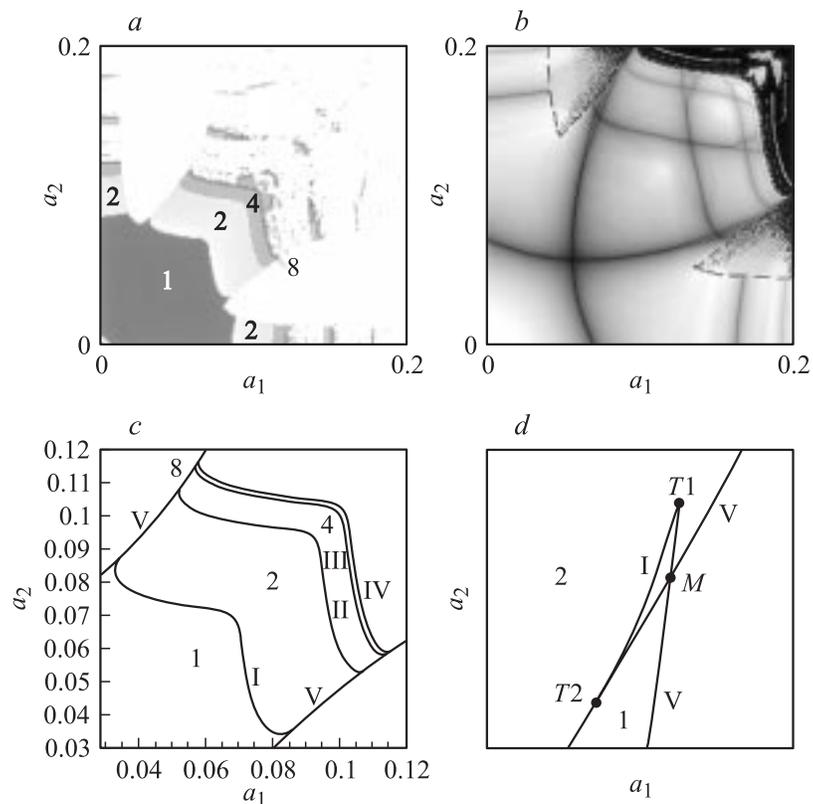
**Рис. 1.** Области синхронизации системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля–Дуффинга на плоскостях параметров:  $a$  —  $(\delta, \mu)$ ,  $b$  —  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ;  $c$  — карта динамических режимов системы (1). Значения параметров выбраны  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\delta = 0$ .

Далее было проведено исследование связанных трехмерных автоколебательных систем с предельными циклами, в которых возможны бифуркации удвоения периода. В качестве индивидуальных осцилляторов выбрана популярная система Ресслера:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + z_1, & \frac{dx_2}{dt} &= -y_2 - z_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), & \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\ \frac{dz_1}{dt} &= b + (x_1 - c_1)z_1, & \frac{dz_2}{dt} &= b + (x_2 - c_2)z_2. \end{aligned}$$

В индивидуальной системе с ростом параметра  $a$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода предельного цикла. Следуя представленной во введении стратегии исследования, мы изучили устройство плоскости параметров  $a_1$  и  $a_2$ , управляющих удвоениями в каждой из подсистем.<sup>1</sup> На рис. 2 представлены соответствующая карта динамических режимов и линии бифуркаций. На карте можно четко

<sup>1</sup> Заметим, что система (3) была исследована также и в [3] в контексте изучения иерархии регулярной и хаотической синхронизации.



**Рис. 2.** Плоскость управляющих параметров системы, состоящей из двух связанных осцилляторов Реслера. I, II, IV — линии бифуркаций удвоения периода, V — линии бифуркации жесткого перехода к квазипериодическому движению. Значения параметров выбраны  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ ,  $\mu = 0.02$ .

видеть своеобразный „язык“ синхронизации, качественно аналогичный простейшей системе с предельным циклом (сравните с рис. 1, *b*). В свою очередь, внутри языка располагаются области удвоенных периодов. На увеличенном фрагменте бифуркационной диаграммы на рис. 2, *d* продемонстрировано, что в окрестности пересечения линий удвоения периода с линиями бифуркации жесткого перехода от периодического

движения к квазипериодическому на плоскости параметров  $(a_1, a_2)$  (точки  $T1$  и  $T2$ ) бифуркационная картина выглядит сложным образом. В точках  $T1$  и  $T2$  имеют место бифуркации коразмерности 2, наибольший из мультипликаторов цикла периода 1 обращается в 1, а наименьший равен  $-1$ . Последовательность точек  $T1$  (см. таблицу) для циклов различных периодов сходится к некоторой критической точке коразмерности два. Характерные бифуркационные явления вблизи нее и поведение мультипликаторов позволяют идентифицировать ее как точку так называемого  $S$  типа критичности, обнаруженного ранее в индивидуальной системе Ресслера, возбуждаемой гармоническим сигналом [4].

Цикл	Значения управляющих параметров	
	$a_1$	$a_2$
1	0.087617	0.035816
2	0.109722	0.053413
4	0.116812	0.058778
8	0.118244	0.059874
16	0.118394	0.059987

На рис. 2, *b* представлена диаграмма, на которой градацией серого цвета показано изменение величины старшего, отличного от нуля ляпуновского показателя системы (3), который остается отрицательным между ветвями области синхронизации, что позволяет идентифицировать квазипериодическое поведение системы. Увеличение любого из управляющих параметров приводит к реализации одного из сценариев перехода к хаосу: через каскад бифуркаций удвоения периода либо через жесткий переход от квазипериодического движения. Области хаотического поведения на плоскости управляющих параметров системы (3), в которых, по крайней мере, один из ляпуновских показателей больше нуля, обозначены черным цветом на рис. 2, *b*.

Численно исследованы также системы связанных осцилляторов Дмитриева–Кислова и связанных осцилляторов Анищенко–Астахова, которые при измерении соответствующих управляющих параметров демонстрируют переход к хаотическому поведению через каскад бифуркаций удвоения периода колебаний. Картины бифуркационных линий этих систем на плоскостях их управляющих параметров устроены

аналогично структуре, изображенной на рис. 2,а, что говорит об определенной общности полученных закономерностей.

Работа поддержана грантами CRDF REC-006, РФФИ-03-02-16074.

## Список литературы

- [1] *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
- [2] *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* // Изв. вузов „ПНД“. 2003. Т. 11. № 6. С. 48–64.
- [3] *Иванченко М.В., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* // Труды VI научной конференции по радиофизике / Под ред. А.В. Якимова. Н. Новгород, 2002. С. 114–115.
- [4] *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // Physical Review E. 2001. V. 64. P. 046214.