01

О новом выводе граничных условий прозрачности для параболического уравнения

© М.Ю. Трофимов

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В.И. Ильичева, Владивосток
E-mail: dominus@poi.dvo.ru

Поступило в Редакцию 28 декабря 2004 г.

Методом многомасштабных разложений получены новые приближенные прозрачные граничные условия для нестационарного уравнения Шредингера.

Мы рассмотрим построение прозрачных граничных условий для нестационарного уравнения Шредингера (нижний индекс используется для обозначения частных производных по соответствующей переменной)

$$iu_x + \beta(x)u_{yy} + \nu(x, y)u = 0, \tag{1}$$

которое появляется как приближенная модель для описания дифракции и распространения волн в методе параболического уравнения [1]. Такие условия необходимо ставить на границах ограниченной расчетной области для численного решения задач, относящихся к неограниченным областям. Формулировка граничных условий такого типа связана с разделением падающих на границу и уходящих с границы волн, что в имеющихся работах достигается либо факторизацией уравнения на множители, описывающие распространение волн в одном направлении (см., например, для волнового уравнения [2]), либо сшиванием решения внутри расчетной области с решением для свободного пространства вне расчетной области, удовлетворяющего определенным условиям излучения [3].

Хорошо известно, что приближенное описание однонаправленного распространения волн дается методом ВКБ (Венцеля–Крамерса–Бриллюэна) или лучевым методом [4], которое можно отнести к методам многомасштабных разложений [5]. Возможность совместного рассмотрения волн, распространяющихся в различных направлениях, при этом сохраняется из-за нелинейности появляющегося в этих методах уравнения Гамильтона–Якоби (эйконала) для фазовой переменной. Эти свойства лучевых решений позволяют использовать их для формулировки приближенных прозрачных граничных условий.

Реализуя эту программу для уравнения (1), мы, следуя обобщенному методу многих масштабов [5], вводим медленные переменные $X = \epsilon x$, $Y = \epsilon y$, быструю переменную $\eta(1/\epsilon)\theta(X, Y)$, где ϵ — малый параметр, заменяем производные удлиненными производными по правилам

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \epsilon \frac{\partial}{\partial X} + \theta_X \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \to \epsilon \frac{\partial}{\partial Y} + \theta_Y \frac{\partial}{\partial \eta}$$

и подставляем в полученное уравнение разложение

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots .$$

Разделяя по степеням ϵ, мы обычным образом получаем в порядке $O(\epsilon^0)$ представление

$$u_0 = A(X, Y) \exp\big((i/\epsilon)\theta(X, Y)\big) \tag{2}$$

и уравнение Гамильтона–Якоби для фазы θ, которую мы в этой работе считаем действительной,

$$\theta_X + \beta(\theta_Y)^2 - \nu = 0. \tag{3}$$

Условие разрешимости уравнения, получающегося в порядке $O(\epsilon)$, относительно u_1 есть

$$iA_X + i\beta\theta_Y A_Y + i\beta(\theta_Y A)_Y = 0. \tag{4}$$

Складывая уравнение (3), умноженное на $(1/\epsilon)A\exp\big((i/\epsilon)\theta\big)$, с уравнением (4), умноженным на $\exp\big((i/\epsilon)\theta\big)$, получаем

$$u_{0X} + 2\beta\theta_Y u_{0Y} - \frac{1}{\epsilon} i\beta(\theta_Y)^2 + \beta\theta_{YY} u_0 - \frac{1}{\epsilon} i\nu u_0 = 0$$

или, переходя к исходным переменным и вводя волновое число $k = \theta_Y$, которое в используемом методе имеет порядок $O(\epsilon^0)$, окончательно получаем

$$u_{0x} + 2\beta k u_{0y} - i\beta k^2 u_0 + \beta k_y - i\nu u_0 = 0. \tag{5}$$

Несмотря на то что уравнение (5) является уравнением первого порядка, система уравнений (3)–(5) способна описывать преломление и отражение волн на границах вида $\{(x, y)|y = \text{const}\}$, поскольку квадратичное по θ_Y уравнение (3) имеет решения, соответствующие распространению волн как в положительном, так и в отрицательном направлении по оси y. Проведя для системы (3)–(5) обычный вывод законов Снеллиуса [4], мы, в частности, видим, что условие полного прохождения волны с фазой θ через границу описанного типа состоит в выполнении на границе уравнения (5), а условие полного отражения — в выполнении уравнения (5), в котором k заменено на $-k$.

Используя уравнение (5) с заменой u_0 на u как приближенное прозрачное граничное условие и предполагая для простоты исчезновение потенциала v на границах рассматриваемой области, мы ставим для уравнения (1) начально-краевую задачу в полосе $\{x, y|x \geqslant 0, a \leqslant y \leqslant b\}$ как задачу со следующими начальными и граничными условиями:

$$u = u_I \qquad \text{при} \qquad x = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &u_x - 2\beta|k|u_y - i\beta k^2 u - \beta|k|_y = 0 \quad \text{при} \quad y = a, \\ &u_x + 2\beta|k|u_y - i\beta k^2 u + \beta|k|_y = 0 \quad \text{при} \quad y = b, \end{aligned} \tag{7}$$

где $k = \theta_Y$ для θ, полученного решением задачи Коши для уравнения (3) с начальным условием

$$\theta(X, Y) = \theta_I(Y) \qquad \text{при} \qquad X = 0, \tag{8}$$

заданном при всех значениях Y. Это начальное условие появляется как результат представления начальных данных u_I в быстроосциллирующем виде

$$u_I = A_I(\epsilon y)\exp\big((i/\epsilon)\theta_I(\epsilon y)\big). \tag{9}$$

Такое представление, разумеется, неоднозначно и зависит от дополнительной информации, на основе которой производится выбор малого параметра ϵ, разделение начального условия на амплитудную и быстроосциллирующую части, и способа доопределения начальной фазы на все значения Y. Относительно начальной амплитуды $A_I(\epsilon y)$ мы считаем, что она доопределяется своими граничными значениями на отрезке $[a, b]$: $A_I(\epsilon y) = A_I(\epsilon a)$ при $y < a$, $A_I(\epsilon y) = A_I(\epsilon b)$ при $y > b$.

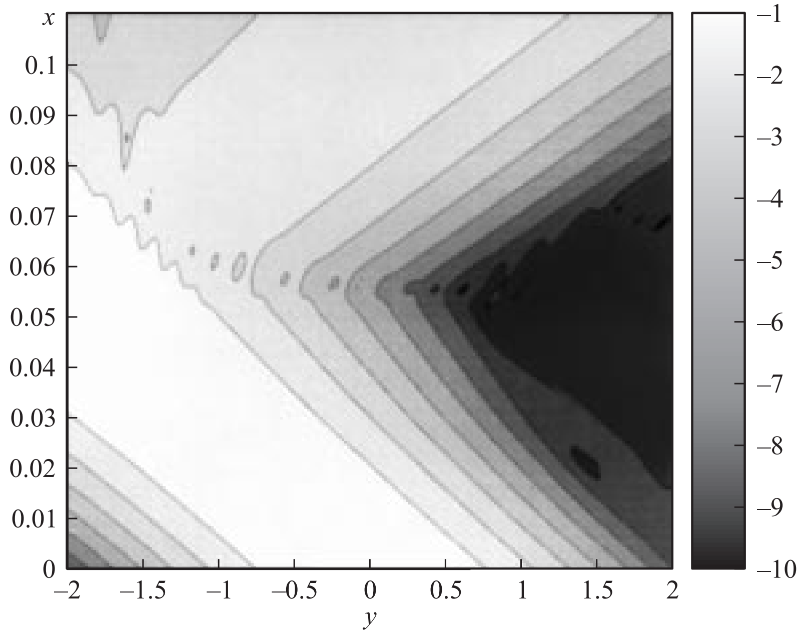

Рис. 1. Изолинии $\log_{10}(|u|)$ при расчете с граничными условиями (7).

Как пример применения граничных условий (7) мы представим расчеты по численному моделированию гауссова пучка

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{x_0}{x+x_0}}\exp\left(i\,\frac{y^2-yx_0(2y+px)}{4(x+x_0)}\right), \tag{10}$$

который использовался в качестве примера в работе [3] и является точным решением уравнения (1) с $\beta=1$ и $\nu=0$.

Беря $x_0=-ia$, с действительным $a>0$, для начального условия мы имеем выражение

$$u_I=u(0,y)=\exp\left(-\frac{y^2}{4a}\right)\exp\left(-i\,\frac{py}{2}\right),$$

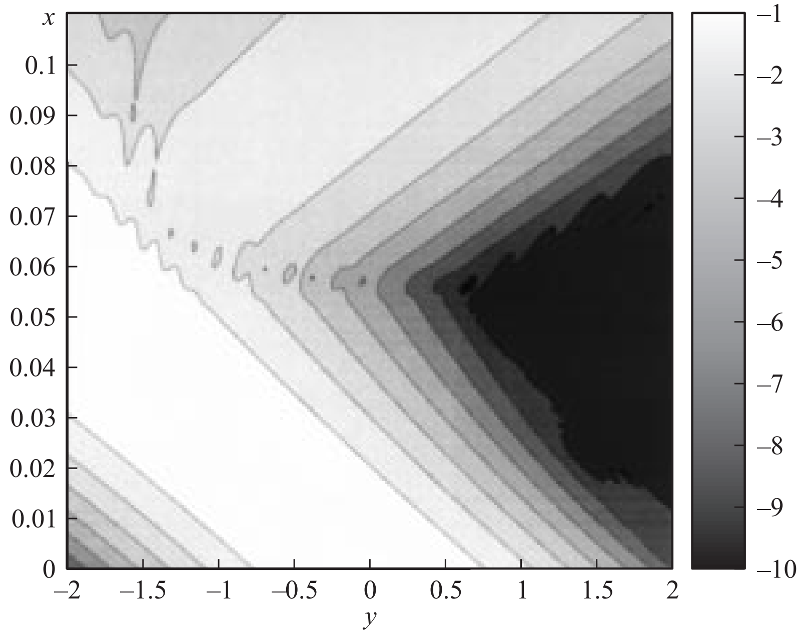

Рис. 2. Изолинии $\log_{10}(|u|)$ при расчете с граничными условиями Баскакова–Попова [3].

и мы выбираем в качестве начальной фазы

$$\theta_I = \theta(0, y) = -\frac{1}{2}\, py. \tag{11}$$

Решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби (3) с начальным условием (11) есть (см., например, [6])

$$\theta(x, y) = \min_{\xi}\left(\frac{(y-\xi)^2}{4x} - \frac{1}{2}\, p\xi\right) = -\frac{1}{2}\, py - \frac{1}{4}\, p^2 x, \tag{12}$$

и это решение мы используем в граничных условиях (7). В этом примере мы не обсуждаем вопроса о введении малого параметра и медленных переменных, поскольку в случае линейной фазы (12) малый параметр просто сокращается в представлении (2).

Расчеты производились с использованием разностной схемы Кранка–Николсона [7], параметры для моделируемого гауссова пучка были приняты следующими: $a = 1/16$, $p = 2/0.05$. Результаты расчетов, представленные на рис. 1, 2, показывают удовлетворительное качество граничных условий (7).

В заключение сделаем несколько замечаний о результатах, не вошедших в основной текст статьи.

Прежде всего, нетрудно получить последующие по порядкам ϵ приближенные граничные условия, так как здесь обнаруживаются простые рекуррентные зависимости.

Далее, начально-краевая задача (6), (7) оказывается лишь условно корректной. Условие корректности состоит в ограничении роста аргумента u как комплексного числа.

Предложенный метод удобно применять в случае, когда точное или приближенное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби известно в аналитической форме. При надлежащем выборе масштабов такие решения можно получить, аппроксимируя потенциал ν в (3) потенциалом нулевого радиуса. Численные эксперименты показывают применимость такого подхода.

Работа выполнена при поддержке госконтракта 10002–251/П–17/026–387/190504–301.

Список литературы

[1] *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.

[2] *Engquist B., Majda A.* // Mathematics of Computation. 1977. V. 31. N 139. P. 639–651.

[3] *Baskakov V.A., Popov A.V.* // Wave Motion. 1991. V. 14. P. 123–128.

[4] *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

[5] *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

[6] *Маслов В.П.* // Успехи математических наук. 1987. Т. 42. В. 3. С. 39–48.

[7] *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.