

01;02;09

Излучение заряда, движущегося в волноводе с резонансно диспергирующим диэлектрическим слоем

© А.В. Тюхтин

НИИ радиофизики С.-Петербургского государственного университета
E-mail: tyukhtin@niirf.spbu.ru*Поступило в Редакцию 7 сентября 2004 г.*

Анализируется излучение точечной заряженной частицы, которая движется с ультрарелятивистской скоростью в вакуумном канале цилиндрического волновода, содержащего слой резонансно диспергирующего диэлектрика. Показано, в частности, что для достаточно тонких волноводов влияние дисперсии приводит к значительному сжатию спектра излучения, уменьшению энергий гармоник и повышению роли первой гармоники по сравнению с высшими. Для волноводов с относительно большим радиусом данные эффекты менее выражены, однако и в этом случае их необходимо учитывать, в особенности при определении частот гармоник. Отмечено, что роль резонансной дисперсии наиболее значительна в таких ситуациях, когда толщина слоя диэлектрика мала по сравнению с радиусом волновода.

Излучение Вавилова–Черенкова в волноведущих структурах, содержащих диэлектрические материалы, исследовалось в ряде публикаций (см., например, [1–8]). В настоящее время это направление остается актуальным, в частности, в связи с разработкой ускорителей, использующих метод кильватерного поля [4–7]. При этом одним из наиболее существенных является вопрос о роли дисперсии диэлектрика. В нашей работе [8] исследовано излучение точечной заряженной частицы, которая движется по оси круглого волновода, полностью заполненного диэлектриком с частотной дисперсией резонансного типа. Показано, что дисперсия существенно влияет на частоты возбуждаемых гармоник и энергию излучения.

В настоящей работе рассматривается такой случай, когда диэлектрик заполняет цилиндрический волновод радиусом a лишь частично, образуя слой толщиной $d = a - b$, где b — радиус вакуумного канала. Магнитную проницаемость диэлектрика положим равной

единице, а стенку волновода будем считать идеально проводящей. Ось z цилиндрической системы координат r, φ, z совместим с осью волновода (совпадающей с осью вакуумного канала). Предполагается, что точечный заряд q движется по оси z со скоростью v .

Общие выражения для потенциалов, полей и потерь энергии частицы при такой геометрии задачи приведены, например, в обзоре [1]. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая ультрарелятивистского движения заряда, который представляет наибольший интерес для метода кильватерного ускорения заряженных частиц. В пределе $v \rightarrow c$ приведенное в [1] выражение для потерь энергии на излучение, приходящихся на единицу длины пути заряда, может быть записано в следующем виде:

$$W = \sum_m W_m = \frac{2q^2}{b^2} \sum_m \frac{\psi_1(s)}{f(s) \left[1 + \frac{\omega}{2(\varepsilon-1)} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right] - \frac{c\psi_0(s)}{b\sqrt{\varepsilon-1}} \frac{d\varepsilon}{d\omega}} \Big|_{\omega=\omega_m, s=s_m}, \quad (1)$$

где

$$s = \omega c^{-1} \sqrt{\varepsilon - 1}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\psi_1(s)}{2} + \frac{s}{2} \frac{d\psi_1(s)}{ds} - \frac{\varepsilon}{b} \frac{d\psi_0(s)}{ds} = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \psi_1(s) \\ &+ \left(\frac{\varepsilon}{sb} - \frac{sb}{2} \right) \psi_0(s) + \frac{sa}{2} [J_1(sa)N_0(sb) - J_0(sb)N_1(sa)] \\ &+ \varepsilon \frac{a}{b} [J_1(sb)N_1(sa) - J_1(sa)N_1(sb)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\psi_0(s) = J_1(sb)N_0(sa) - J_0(sa)N_1(sb),$$

$$\psi_1(s) = J_0(sb)N_0(sa) - J_0(sa)N_0(sb). \quad (4)$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, $N_n(\xi)$ — функции Неймана, $I_n(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя, а $\psi_0(s)$ и $\psi_1(s)$ являются известными функциями Абеля. В каждое слагаемое в (1) входят собственные частоты ω_m , которые связаны соотношением (2) с собственными числами s_m , определяемыми следующим дисперсионным уравнением:

$$sb\psi_1(s) - 2\varepsilon\psi_0(s) = 0. \quad (5)$$

Каждое слагаемое W_m в сумме (1) имеет смысл энергии, затрачиваемой зарядом на возбуждение гармоник с номером m при

прохождении единицы длины пути (далее ради краткости будем называть эту величину просто „энергией гармоник“). Данная величина с точностью до множителя равна продольной компоненте электрического поля в точке расположения заряда [1] ($W_m = -qE_z^{(m)}|_{z=vt, r=0}$), а амплитудное значение последней за зарядом на оси волновода вдвое больше: $E_z^{(m)\max} = 2W_m/|q|$. Таким образом, зная энергии гармоник, при необходимости можно легко найти значения компоненты поля в любой точке с помощью известных соотношений [1].

Отметим, что приведенные формулы существенно упрощаются, если считать выполненным неравенство $s_m b \gg 1$. Тогда, пользуясь асимптотиками цилиндрических функций, из (5) получаем следующее приближенное дисперсионное уравнение:

$$\operatorname{ctg}(sd) \approx sb/(2\varepsilon), \quad (6)$$

где $d = a - b$ — толщина слоя диэлектрика. При этом из (1)–(4) получаем

$$W_m \approx \frac{2q^2}{b^2} \left[1 + \frac{bds^2}{4\varepsilon} + \frac{d\varepsilon}{b} + \left(1 + \frac{bds^2}{4} + \frac{d\varepsilon^2}{b} \right) \frac{\omega}{2\varepsilon(\varepsilon-1)} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right]^{-1} \Big|_{\omega=\omega_m, s=s_m}. \quad (7)$$

Перейдем к рассмотрению такого случая, когда диэлектрическая проницаемость среды задается в виде

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\omega_r^2 \varepsilon_0 - \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (8)$$

где ω_r и ω_L — резонансная и ленгмюровская частоты соответственно, а $\varepsilon_0 = 1 + \omega_L^2/\omega_r^2$ — диэлектрическая проницаемость среды на низких (по сравнению с ω_r) частотах. Излучение заряда в безграничном диэлектрике с дисперсией данного (резонансного) типа исследовалось в работах [9,10], а случай волновода, полностью заполненного такой средой, анализировался в статье [8].

Для рассматриваемого случая частота и диэлектрическая проницаемость среды выражаются через переменную s по формулам

$$\omega = \frac{\omega_r s}{\sqrt{s^2 + \omega_r^2 c^{-2}(\varepsilon_0 - 1)}}, \quad \varepsilon = \frac{\omega_r s}{\sqrt{s^2 + c^{-2} \omega_r^2 (\varepsilon_0 - 1)}}, \quad (9)$$

а точное дисперсионное уравнение (5) можно записать в виде

$$sb\psi_1(s) - 2\frac{c^2s^2 + \omega_r^2\varepsilon_0}{\omega_r^2}\psi_0(s) = 0. \quad (10)$$

Для энергии гармоники с номером m имеем

$$W_m = \frac{2q^2}{b^2} \frac{\omega_r^2 - \omega_m^2}{\omega_r^2} \psi_1(s_m) \left[f(s_m) - \frac{2c\omega_m\sqrt{\varepsilon_0 - 1}}{b\omega_r\sqrt{\omega_r^2 - \omega_m^2}} \psi_0(s_m) \right]^{-1}. \quad (11)$$

Приведем также приближенные формулы для случая, когда выполнено неравенство $s_m b \gg 1$, которое в рассматриваемой ситуации можно представить в виде

$$\frac{b\omega_r}{c} \frac{\omega_m\sqrt{\varepsilon_0 - 1}}{\sqrt{\omega_r^2 - \omega_m^2}} \gg 1. \quad (12)$$

Приближенное дисперсионное уравнение (6) при этом принимает вид

$$\operatorname{ctg}(\chi) \approx \frac{b}{2d} \chi \frac{\tilde{d}^2}{\varepsilon_0 \tilde{d}^2 + \chi^2}, \quad (13)$$

где введена безразмерная величина $\chi = sd$ и безразмерная толщина диэлектрического слоя $\tilde{d} = d\omega_r c^{-1}$. Отсюда видно, что корень дисперсионного уравнения χ_m лежит в интервале $m\pi < \chi_m < (m + 1/2)\pi$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Для энергии гармоники при условии (12) получаем

$$W_m \approx \frac{2q^2}{b^2} \left[1 + \frac{b\chi_m^2}{4d\varepsilon_m} + \frac{d\varepsilon_m}{b} + \left(1 + \frac{b\chi_m^2}{4d} + \frac{d\varepsilon_m^2}{b} \right) \frac{\chi_m^2}{(\varepsilon_0 - 1)(\chi_m^2 + \tilde{d}^2\varepsilon_0)} \right]^{-1}, \quad (14)$$

где $\varepsilon_m = \varepsilon(\omega_m)$.

Проиллюстрируем полученные результаты на некоторых примерах. При этом для сравнения будем рассматривать случай среды с резонансной дисперсией параллельно со случаем недиспергирующего диэлектрика, проницаемость которого примем равной ε_0 . На рис. 1, 2 показаны рассчитанные по точным формулам зависимости частот и энергий гармоник от отношения d/a . Рис. 1 соответствует случаю относительно тонкого волновода, а рис. 2 — случаю достаточно толстого волновода. На обоих рисунках верхние графики построены для среды с резонансной дисперсией, а нижние — для недиспергирующей среды.

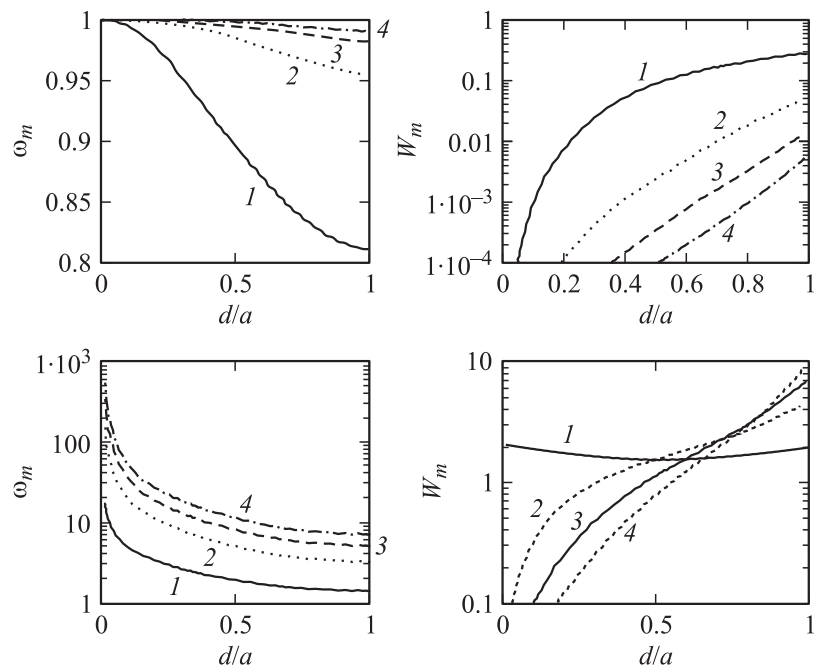


Рис. 1. Зависимости частот и энергий гармоник от толщины диэлектрического слоя. Частоты ω_m даны в единицах ω_r , энергии W_m — в единицах $q^2 \omega_r^2 c^{-2}$. Верхние рисунки соответствуют случаю среды с резонансной дисперсией, нижние — случаю недиспергирующей среды с проницаемостью, равной ϵ_0 . Номер гармоники указан около каждой кривой. $\epsilon_0 = 4$, $\tilde{a} \equiv a\omega_r/c = 1$.

Как видим, частоты гармоник являются монотонно убывающими функциями толщины диэлектрического слоя. Для относительно тонкого волновода (рис. 1) при наличии резонансной дисперсии частоты намного меньше, чем без нее. Подчеркнем также, что дисперсия приводит к сильному сжатию спектра излучения. Так, для полностью заполненного диспергирующим диэлектриком волновода ($d = a$) частоты гармоник располагаются в интервале от $0.82\omega_r$ до ω_r ; если же $d < 0.3a$, то ширина этого интервала составляет менее 5% от частоты резонанса. Как видно из сравнения двух правых графиков на рис. 1, энергии всех гармоник в случае диспергирующего диэлектрика много меньше,

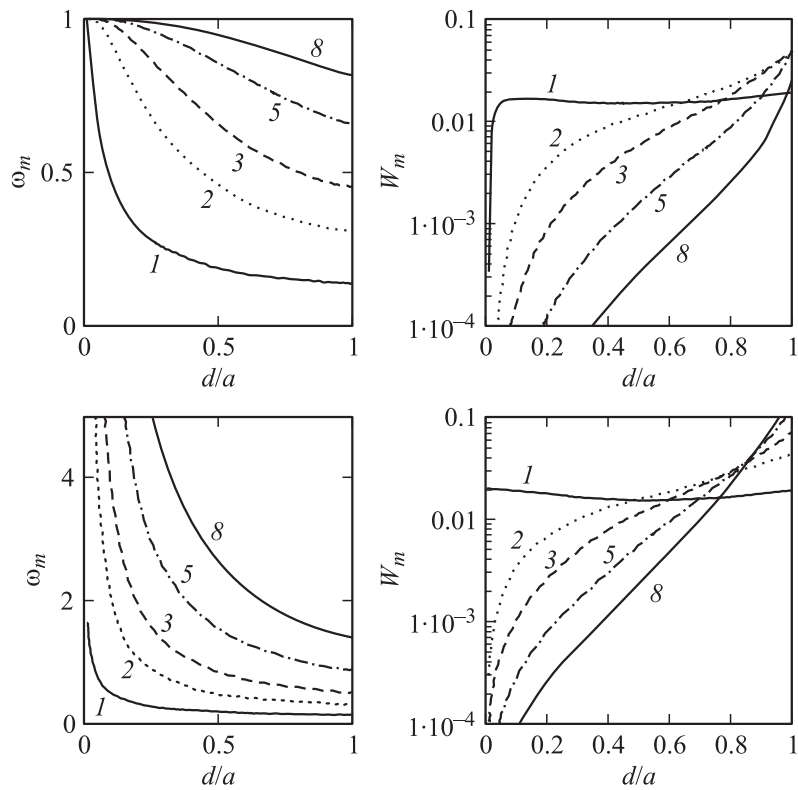


Рис. 2. Те же зависимости и обозначения, что и на рис. 1. $\varepsilon_0 = 4$, $\tilde{a} = 10$.

чем в случае диэлектрика без дисперсии. Кроме того, при наличии резонансной дисперсии энергия первой гармоники W_1 намного превосходит энергии всех остальных гармоник. Фактически для слоя любой толщины генерируемое поле оказывается одномодовым. При отсутствии дисперсии это не так: первая мода является преобладающей лишь для тонких диэлектрических слоев, в то время как при $d \geq 0.5a$ имеет место многомодовое поле, в котором роль первой гармоники незначительна.

В случае относительно толстого волновода (рис. 2) картина существенно меняется. Разница между частотами мод в задачах с резонансной дисперсией и без нее оказывается несколько меньшей, хотя

и остается весьма значительной. Эффект подавления энергии первой гармоники при учете дисперсии почти незаметен (за исключением случая очень тонкого диэлектрического слоя). Разница в энергиях старших гармоник более существенна. Для достаточно тонкого слоя диэлектрика в обеих ситуациях преобладающей является первая мода, а если толщина слоя сопоставима с радиусом волновода, то генерируется многомодовое волновое поле.

Подчеркнем, что, как видно из рис. 1, 2, разница между частотами и энергиями для задач с дисперсией и без нее тем больше, чем меньше толщина слоя диэлектрика. Таким образом, учет резонансной дисперсии наиболее важен в таких ситуациях, когда толщина слоя диэлектрика мала по сравнению с радиусом волновода.

Автор признателен А.Д. Канарейкину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *Болотовский Б.М.* // УФН. 1961. Т. 75. № 2. С. 295–350.
- [2] *Зрелов В.П.* Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Ч. 1. М., 1968. 276 с.
- [3] *Цытович В.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 5. С. 597–604.
- [4] *Gai W., Schoessow P., Cole B.* et al. // Phys. Rev. Letters. 1988. V. 61. N 24. P. 2756–2758.
- [5] *Power J.G., Conde M.E., Gai W.* et al. // Phys. Rev. Special Topics — Accelerators and Beams. 2000. V. 3. P. 101302-1–7.
- [6] *Варданян А.С., Оксюзян Г.Г.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 4. С. 76–80.
- [7] *Schachter L.* // Physical Review. E. 2000. V. 62. N 1. P. 1252–1257.
- [8] *Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 14. С. 68–74.
- [9] *Afanasiev G.N., Kartavenko V.G.* // Journal of Physics D. 1998. V. 31. P. 2760–2776.
- [10] *Afanasiev G.N., Kartavenko V.G., Magar E.N.* // Physica B. 1999. V. 269. P. 95–113.