

01;09

## Восстановление уравнений связанных систем с запаздыванием по временным рядам

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 29 июля 2004 г.

Предложен метод восстановления модельных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом для связанных систем с запаздыванием по их временным рядам. Метод позволяет определить наличие связи между системами с запаздыванием, а также тип связи, ее величину и направление. Эффективность метода продемонстрирована на экспериментальных временных рядах связанных генераторов с запаздывающей обратной связью.

1. Задача восстановления нелинейных динамических моделей систем с запаздывающей обратной связью по их хаотическим временным рядам привлекает к себе в последние годы большое внимание [1–7]. Актуальность данной задачи обусловлена широким распространением систем с запаздыванием в природе [8]. Обычно эти системы, поведение которых определяется не только текущим состоянием, но и состояниями в предыдущие моменты времени, моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии, физиологии и химии.

В ряде практически важных задач типичной является ситуация, когда системы с запаздыванием взаимодействуют между собой. Например, связанные системы с запаздыванием используются при описании динамики взаимодействующих популяций [9–11] и при моделировании процессов в сердечно-сосудистой системе человека [12,13], их применение является перспективным в системах скрытой передачи информации [14], в том числе на основе лазеров с оптической обратной связью [15–17]. Однако проблема реконструкции модельных уравнений связанных систем с запаздыванием по временным рядам до сих пор остается практически не исследованной. В данной работе мы

предлагаем метод, позволяющий восстановить связанные системы с запаздыванием, определить априорно неизвестный способ их связи и найти значения коэффициентов связи.

2. Рассмотрим системы с запаздыванием  $X_1$  и  $X_2$ , описываемые в отсутствие связи дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2})), \quad (1)$$

где  $\tau_{1,2}$  — времена запаздывания,  $f_{1,2}$  — нелинейные функции,  $\varepsilon_{1,2}$  — параметры, характеризующие инерционные свойства систем, индексы 1 и 2 указывают на принадлежность параметров и переменных к системам  $X_1$  и  $X_2$  соответственно. В общем случае уравнение (1) является математической моделью колебательной системы, известной в радиофизике как генератор с запаздывающей обратной связью [18], представляемой кольцом из трех идеализированных элементов: нелинейного, инерционного и задержки.

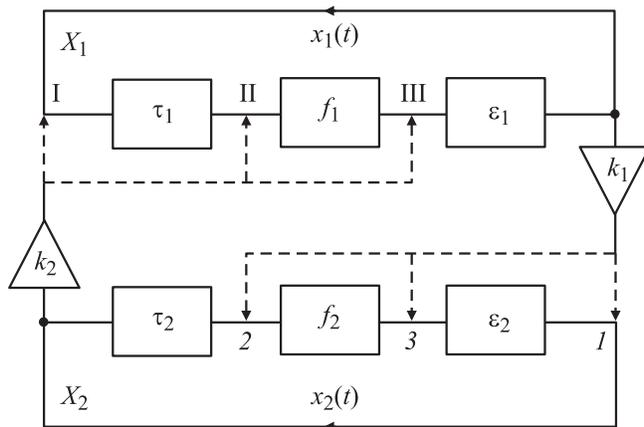
Системы с запаздыванием  $X_1$  и  $X_2$  могут быть связаны между собой различными способами. Выделим три способа связи, при которых переменная  $x_1(t)$  системы  $X_1$  вводится с коэффициентом  $k_1$  в одну из трех точек кольцевой системы  $X_2$ , обозначенных на рис. 1 арабскими цифрами 1–3. Аналогичным образом переменную  $x_2(t)$  системы  $X_2$  можно ввести с коэффициентом  $k_2$  в кольцевую систему  $X_1$  в различных ее точках, на рис. 1 обозначенных римскими цифрами I–III. В случае, когда способы воздействия  $X_1$  на  $X_2$  и  $X_2$  на  $X_1$  совпадают, динамика связанных систем описывается одним из следующих уравнений:

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2}) + k_{2,1}x_{2,1}(t - \tau_{1,2})), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2}) + k_{2,1}x_{2,1}(t)), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2})) + k_{2,1}x_{2,1}(t). \quad (4)$$

Уравнение (2) описывает способ связи, который будем обозначать I/I, при котором первая система с запаздыванием воздействует на вторую в точке I, а вторая система воздействует на первую в точке I. Уравнения (3) и (4) описывают связанные системы для способов связи 2/II и 3/III соответственно. При отличающихся способах воздействия систем  $X_1$  и  $X_2$  друг на друга они описываются разными уравнениями. Например, при способе связи I/II система  $X_1$  описывается уравнением (3), а система  $X_2$  — уравнением (2).



**Рис. 1.** Блок-схема связанных систем с запаздыванием  $X_1$  и  $X_2$ . Элементы, обозначенные  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ,  $f_1$  и  $f_2$ ,  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , обеспечивают соответственно задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний, а элементы  $k_1$  и  $k_2$  определяют величину связи систем  $X_1$  и  $X_2$  друг с другом. 1–3 — точки, в которых система  $X_1$  воздействует на систему  $X_2$ ; I–III — точки, в которых  $X_2$  воздействует на  $X_1$ .

3. Проведем сначала восстановление системы  $X_1$ , т.е. определим параметры  $\tau_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $k_2$  и найдем функцию  $f_1$ . Для восстановления по наблюдаемой реализации  $x_1(t)$  времени задержки  $\tau_1$  воспользуемся методом, предложенным нами в работе [5], в которой было показано, что во временной реализации систем с запаздыванием вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на  $\tau_1$ . Тогда для нахождения  $\tau_1$  нужно выделить экстремумы в исходной реализации, а затем для различных значений времени  $\tau$  определить число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на  $\tau$ , и построить зависимость  $N(\tau)$ . Значению времени запаздывания  $\tau_1$  соответствует положение абсолютного минимума  $N(\tau)$ . Исследования показывают, что этот метод определения времени задержки может быть успешно применен и в том случае, если на систему  $X_1$  действует система  $X_2$ , при условии, что это воздействие не приводит к появлению большого числа дополнительных экстремумов во временной реализации колебаний системы  $X_1$ .

Для определения параметра  $\varepsilon_1$  и функции  $f_1$  системы  $X_1$ , а также коэффициента связи  $k_2$  мы предлагаем метод, использующий временные реализации обеих наблюдаемых переменных  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Предположим сначала, что нам известен способ воздействия  $X_2$  на  $X_1$ , т.е. известна структура уравнения, описывающего динамику системы с запаздыванием  $X_1$ . В качестве примера рассмотрим случай, описываемый уравнением (2), при котором переменная системы  $X_2$  вводится в кольцо обратной связи системы  $X_1$  перед элементом, обеспечивающим задержку (точка I на рис. 1). Запишем уравнение (2) для системы  $X_1$  в виде

$$\varepsilon_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t) = f_1(x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_1)). \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что если построить на плоскости множество точек с координатами  $(x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_1), \varepsilon_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t))$ , то оно воспроизведет функцию  $f_1$ . Поскольку заранее величины  $\varepsilon_1$  и  $k_2$  неизвестны, будем строить зависимости  $\varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t)$  от  $x_1(t - \tau_1) + kx_2(t - \tau_1)$  для различных значений  $\varepsilon$  и  $k$ , добиваясь однозначной зависимости на плоскости  $(x_1(t - \tau_1) + kx_2(t - \tau_1), \varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t))$ , которая возможна лишь при  $\varepsilon = \varepsilon_1, k = k_2$ . В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске  $\varepsilon_1$  и  $k_2$  будем использовать минимальную длину линии  $L(\varepsilon, k)$ , соединяющей точки на этой плоскости, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум  $L_{\min}(\varepsilon, k)$  будет наблюдаться при  $\varepsilon = \varepsilon_1, k = k_2$ , а построенная при этих значениях зависимость  $\varepsilon_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t)$  от  $x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_1)$  воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. Предлагаемый подход использует все точки временных рядов, что позволяет по коротким реализациям восстанавливать параметры и нелинейную функцию.

Аналогичным образом можно восстановить нелинейную функцию  $f_1$  и параметры  $\varepsilon_1$  и  $k_2$  системы  $X_1$ , описываемой уравнением (3) или (4), строя соответственно зависимости  $\varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t)$  от  $x_1(t - \tau_1) + kx_2(t)$  и  $\varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t) - kx_2(t)$  от  $x_1(t - \tau_1)$  для различных значений  $\varepsilon$  и  $k$ . Если нам априорно не известно, в какой именно точке, I, II или III, осуществляется воздействие  $X_2$  на  $X_1$ , нужно провести реконструкцию каждого из трех модельных уравнений (2)–(4) системы  $X_1$  и определить для каждого из трех случаев  $L_{\min}(\varepsilon, k)$ . Однозначность восстановленной нелинейной функции может наблюдаться только при правильном выборе модельного уравнения. Следовательно, правильному выбору модели будет соответствовать наиболее

низкое из трех полученных значений  $L_{\min}(\varepsilon, k)$ . Таким образом, метод позволяет не только восстановить по временным рядам параметры связанных систем с запаздыванием, но и определить вид модельного уравнения.

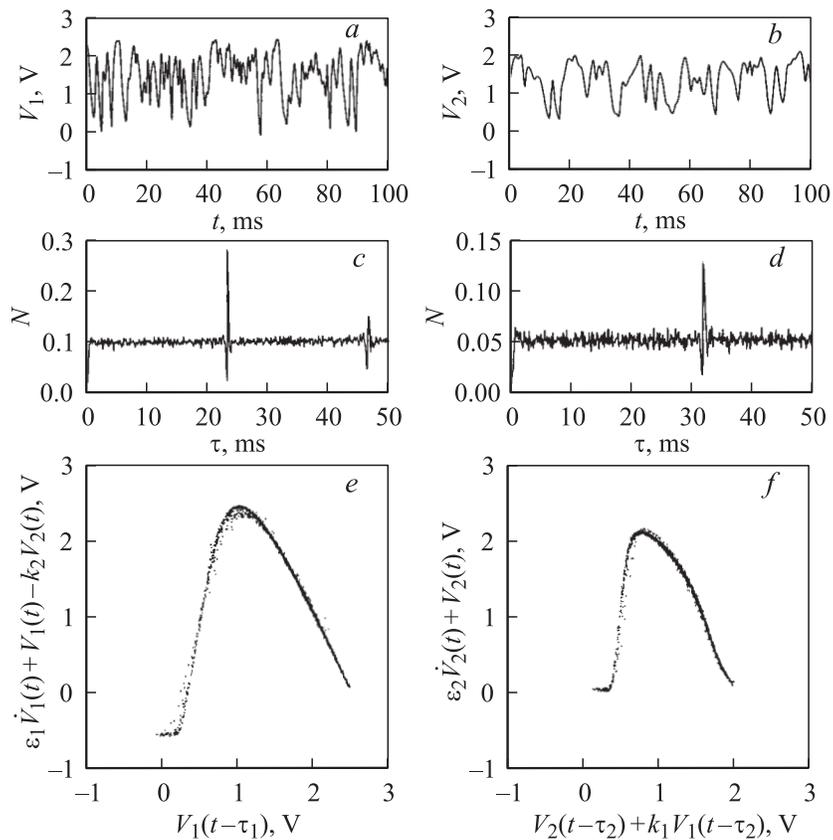
Восстановление системы с запаздыванием  $X_2$  по временным рядам переменных  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  проводится аналогично. Метод позволяет восстановить параметры  $\tau_2$ ,  $\varepsilon_2$  и нелинейную функцию  $f_2$  системы  $X_2$ , а также определить коэффициент связи  $k_1$  и способ воздействия  $X_1$  на  $X_2$ .

4. Мы применили метод к экспериментальным временным рядам связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. При схематическом представлении таких связанных кольцевых генераторов в виде рис. 1 запаздывание сигнала  $x_1(t)$  на время  $\tau_1$ , а сигнала  $x_2(t)$  на время  $\tau_2$  обеспечивается соответствующей линией задержки; роль нелинейного элемента в каждом из генераторов выполняет усилитель с передаточной характеристикой  $f_1$  или  $f_2$ ; инерционность определяется фильтром, параметры которого задают величину  $\varepsilon_1$  или  $\varepsilon_2$ , а связь осуществляется с помощью суммирующих усилителей, обеспечивающих коэффициент передачи  $k_1$  или  $k_2$ . Способ связи генераторов соответствовал случаю I/III согласно нашей классификации. В случае, когда инерционным элементом является низкочастотный RC-фильтр первого порядка, такие генераторы описываются в отсутствие связи уравнением

$$R_{1,2}C_{1,2}\dot{V}_{1,2}(t) = -V_{1,2}(t) + f_{1,2}(V_{1,2}(t - \tau_{1,2})), \quad (6)$$

где  $V_{1,2}(t)$  и  $V_{1,2}(t - \tau_{1,2})$  — напряжения на входе и выходе линии задержки,  $R_{1,2}$  и  $C_{1,2}$  — сопротивления и емкости элементов фильтров в первом и втором генераторе. Уравнение (6) имеет вид (1) с  $\varepsilon_{1,2} = R_{1,2}C_{1,2}$ .

С помощью аналого-цифрового преобразователя мы записывали сигналы  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  на входе линий задержки с частотой выборки 10 kHz при  $\tau_1 = 23$  ms,  $\tau_2 = 31.7$  ms,  $R_1C_1 = 0.48$  ms,  $R_2C_2 = 1.01$  ms,  $k_1 = -0.1$ ,  $k_2 = 0.1$ . Фрагменты временных реализаций этих сигналов приведены на рис. 2, *a* и *b*. Подсчитав число  $N$  одновременных обращений в нуль  $\dot{V}_1(t)$  и  $\dot{V}_1(t - \tau)$  для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом, равным периоду выборки точек  $T_s = 0.1$  ms, построим зависимость  $N(\tau)$  (рис. 2, *c*). Для оценки производной  $\dot{V}_1(t)$  по временному ряду мы использовали локальную параболическую



**Рис. 2.** Восстановление связанных генераторов с запаздывающей обратной связью, связанных способом I/III. Экспериментальные временные реализации первого (*a*) и второго (*b*) генераторов. Число  $N$  пар экстремумов во временной реализации генератора  $X_1$  (*c*) и генератора  $X_2$  (*d*) на удалении  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов. Восстановленная нелинейная функция  $f_1$  при  $\tau_1 = 23.0$  ms,  $\varepsilon_1 = 0.46$  ms и  $k_2 = 0.10$  (*e*). Восстановленная нелинейная функция  $f_2$  при  $\tau_2 = 31.7$  ms,  $\varepsilon_2 = 1.06$  ms и  $k_1 = -0.10$  (*f*).

аппроксимацию. Абсолютный минимум  $N(\tau)$  наблюдается для первого генератора при  $\tau = 23.0$  ms (рис. 2, *c*) и при  $\tau = 31.7$  ms для второго генератора (рис. 2, *d*).

При реконструкции генератора  $X_1$  в виде уравнения (4) зависимость  $L(\varepsilon, k)$ , построенная при шаге изменения  $\varepsilon$ , равном 0.01 ms, и шаге изменения  $k$ , равном 0.01, демонстрирует минимум при  $\varepsilon = 0.46$  ms и  $k = 0.10$ , т.е. позволяет получить близкую оценку параметров  $\varepsilon_1$  и  $k_2$ . Восстановленная нелинейная функция (рис. 2, *e*) хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой  $f_1$  нелинейного элемента первого генератора.

Минимум зависимости  $L(\varepsilon, k)$ , построенной при реконструкции системы  $X_2$  в виде уравнения (2), наблюдается при  $\varepsilon = 1.06$  ms и  $k = -0.10$ , достаточно близких к истинным значениям  $\varepsilon_2$  и  $k_1$ . На рис. 2, *f* приведена восстановленная нелинейная функция  $f_2$ .

5. Итак, нами предложен метод восстановления связанных систем с запаздыванием по хаотическим временным рядам, который позволяет восстановить времена запаздывания, параметры инерционности, нелинейные функции и коэффициенты связи связанных систем с запаздыванием даже в случаях, когда способ связи этих систем априорно неизвестен. В этом случае процедура реконструкции позволяет дополнительно установить, каким именно образом системы с запаздыванием связаны между собой. В отличие от других методов определения связи между системами по временным рядам [19–21] предложенная нами процедура позволяет определять величину связи, а не только ее направление.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03–02–17593, CRDF, Award No. REC–006 и INTAS, грант № 03–55–920.

## Список литературы

- [1] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3082–3085.
- [2] *Voss H., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [3] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [4] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [5] *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056216.
- [6] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–44.
- [7] *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L.* et al. // Phys. Lett. A. 2003. V. 308. P. 54–60.

- [8] Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
- [9] Kuang Y. Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
- [10] Bocharov G.A., Rihan F.A. // J. Comp. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
- [11] Song Y., Han M., Peng Y. // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V. 22. P. 1139–1148.
- [12] Seidel H., Herzel H. // Physica D. 1998. V. 115. P. 145–160.
- [13] Kotani K., Takamasu K., Ashkenazy Y. et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 051923.
- [14] Mensour B., Longtin A. // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. N 1–3. P. 59–70.
- [15] Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L., Rhodes W.T. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 1892–1895.
- [16] Koryukin I.V., Mandel P. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 026201.
- [17] Shahverdiev E.M., Sivaprakasam S., Shore K.A. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 017206.
- [18] Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
- [19] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 045202.
- [20] Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A. et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041909.
- [21] Smirnov D.A., Bezruchko B.P. // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 046209.