

01

## Стохастические свойства системы точечных вихрей

© В.Я. Рудяк, Е.Г. Борд, Д.Ф. Кранчев

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет  
E-mail: rudyak@ngasu.nsk.su

Поступило в Редакцию 7 августа 2003 г.

Систематически исследованы динамические и стохастические свойства системы точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного  $N$ -угольника. Изучены время обратимости системы и устойчивость ее фазовых траекторий. Показано, что свойства стохастичности у такой системы появляются лишь при наличии локальной неустойчивости, что наблюдается при  $N \geq 8$ .

Система точечных вихрей является одной из ключевых моделей классической гидродинамики. Свойства этой модели пристально изучались на протяжении более чем ста лет, тем не менее полученных здесь результатов сравнительно немного. В серии работ [1,2] (см. также цитируемую там литературу) показано, что система уже четырех точечных вихрей в общем случае оказывается не интегрируемой и у нее установлено существование стохастических свойств. Из контекста этих работ следует, что стохастичность рассмотренных систем четырех вихрей связана с неинтегрируемостью соответствующей системы уравнений движения. Вместе с тем из общих соображений ясно, что стохастические свойства динамической системы в общем случае не связаны с ее интегрируемостью. Было бы поэтому важно изучить динамические и стохастические свойства систем точечных вихрей, выяснить условия, когда такая стохастичность появляется. Этому и посвящена данная работа.

Динамика системы  $N$  точечных вихрей на плоскости описывается системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = - \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j [\mathbf{k} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]}{2\pi r_{ji}^2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_i = x_i, y_i$  — координаты вихря  $i$ ,  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, нормальный к плоскости  $x_i, y_i$ ,  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Решение системы уравнений (1) удается построить в некоторых наиболее простых ситуациях.

В частности, для системы произвольного числа  $N$  вихрей, равной интенсивности  $\Gamma$ , известно решение в случае, когда вихри расположены в вершинах правильного многоугольника. Такая конфигурация вращается с постоянной угловой скоростью [3,4]:  $\Omega_N = 2\pi\Gamma(N-1)(8\pi^2R^2)$ , где  $R$  — радиус окружности, в которую вписан многоугольник. Если на плоскости  $x_i, y_i$  ввести мнимую координату вихря  $z_n = x_n + iy_n$ , то соответствующее решение для координаты  $N$ -го вихря имеет вид:  $z_n(t) = R \exp[2\pi i(n-1)/N + \Omega_N t]$ . В данной работе исследуются динамические и стохастические свойства именно такой конфигурации вихрей. В расчетах их число варьировалось от 2 до  $10^3$ . При компьютерном моделировании рассчитываемые динамические траектории системы все время возмущаются из-за ошибок округления и использования тех или иных схем интегрирования уравнений движения (1). Эти ошибки малы, но если решение неустойчиво, то достаточно быстро они становятся наблюдаемыми.

Уравнения движения (1) обратимы во времени. Это, в частности, означает, что фазовые траектории системы инвариантны относительно преобразования инверсии времени. Первой задачей, рассмотренной в данной заметке, являлось изучение времени обратимости компьютерных фазовых траекторий системы. Время обратимости  $T_r$  определялось как максимальное значение времени движения по фазовой траектории, из которого при инверсии времени можно вернуться в  $\varepsilon$ -окрестность начального положения (в расчетах  $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

Как и следовало ожидать, компьютерные фазовые траектории очень быстро становятся необратимыми. Время обратимости  $T_r = t/T_N$  обратно пропорционально числу вихрей  $N$ ,  $T_r \sim 1/N$  (см. таблицу). Это, в частности, означает, что основным механизмом, определяющим необратимость, является взаимодействие вихрей. Время необратимости существенно зависит от свойств устойчивости системы. Если она неустойчива, то начальное возмущение усиливается и фазовые траектории перестают быть обратимыми достаточно быстро. Это и иллюстрирует таблица. Рассматриваемые системы устойчивы при  $N \leq 7$  [5],

Зависимость времени обратимости  $T_r$  от числа вихрей

$N$	7	8	10	20	40	60	80	100
$T_r$	3760	6.7012	3.6441	1.3363	1.3363	0.3901	0.2867	0.2259

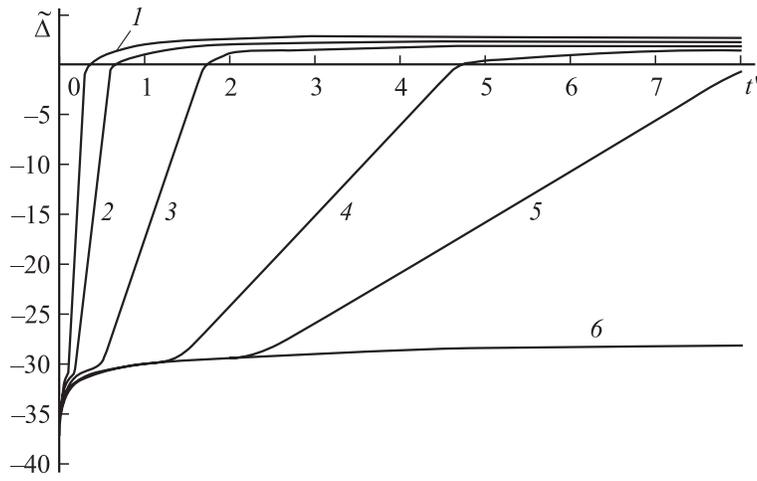


Рис. 1. Зависимость возмущения решения от времени.

соответственно  $T_r$  при  $N > 7$  много меньше, чем при  $N \leq 7$ . Появление динамического хаоса возможно при наличии в системе локальной неустойчивости [6]. Характер устойчивости траекторий рассматриваемой системы вихрей в пространстве конфигураций определяется по эволюции функции

$$\Delta(t) = \frac{1}{NlR} \sum_{\alpha=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i^{c\alpha}(t)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — точное решение для  $i$ -го вихря, а  $\mathbf{r}_i^{c\alpha}$  — численное решение, полученное при использовании шага с номером  $\alpha$ . Таким образом, функции  $\Delta$  рассчитывались усреднением также по ансамблю, который получался варьированием при использовании заданной схемы шага интегрирования (обычно  $l = 7 \div 10$ ).

Типичная зависимость функции  $\tilde{\Delta} = \ln \Delta$  от времени для различного числа вихрей представлена на рис. 1. Здесь кривая 1 соответствует  $N = 100$ , кривая 2 —  $N = 50$ , кривая 3 —  $N = 20$ , кривая 4 —  $N = 10$ , кривая 5 —  $N = 8$ , кривая 6 —  $N = 7$ . Время  $t'$  измеряется во временах  $T_N$ . Для первых пяти систем можно выделить 4 основных участка. На начальном участке функция  $\tilde{\Delta}$  изменяется степенным образом. Затем идет экспоненциальный участок, переходный нелинейный участок

развития возмущения и, наконец, функция (2) выходит на некоторое практически постоянное значение.

Наличие экспоненциального участка развития возмущений свидетельствует о том, что в рассмотренных системах вплоть до  $N = 8$  имеет место локальная неустойчивость. Инкременты неустойчивости пропорциональны циркуляции вихрей  $\Delta$  и обратно пропорциональны квадрату радиуса  $R$ .

Экспоненциальное разбегание траекторий происходит до некоторого времени  $t_n$ , которое практически совпадает со временем обратимости данной системы (см. таблицу). Вместе с тем функция  $\Delta'$  при  $N = 7$  сначала несколько возрастает, а потом практически не меняется. Это означает, что данная система оказывается устойчивой по Ляпунову, что хорошо согласуется с устойчивостью данного течения при  $N \leq 7$  [5].

Наличие локальной неустойчивости свидетельствует о возможном появлении динамического хаоса в системе. Для этого, однако, в системе должно иметь место перемешивание, которое определяют как свойство затухания корреляций двух динамических величин (см., например, [6]).

Типичный пример поведения нормированной автокорреляционной функции координат вихрей  $\chi(t, 0) = \chi_{xx}(t, 0)/\chi_{xx}(0, 0)$ , где

$$\chi_{xx}(t, 0) = \frac{1}{Nl} j = 1 \sum_{j=1}^{l-1} \left\{ \sum_{i=1}^N [x_i(j\Delta t)x_i(j\Delta t + t)] \right\},$$

а  $l$  — число реализаций, представлен на рис. 2. Здесь кривая 1 получена для системы 100 вихрей, 2 — 10 вихрей, 3 — 7 вихрей. Корреляционные функции оказываются затухающими для систем с числом вихрей  $N \geq 8$ , причем время релаксации порядка обратного значения инкремента локальной неустойчивости. Характер затухания, однако, не является строго экспоненциальным, а носит квазипериодический характер. Такая квазипериодичность обусловлена спецификой задачи, и период затухающих максимумов автокорреляционной функции порядка периода  $T_N$ . Для устойчивой конфигурации вихрей,  $N = 7$ , корреляционная функция периодична и не затухает.

Таким образом, исследованные системы при числе вихрей  $N \geq 8$  действительно обладают свойствами динамического хаоса. Следует отметить, что установленные характеристики являются свойствами исходной гамильтоновой системы и не зависят от компьютерной реализации расчетов. Об этом, в частности, свидетельствуют проведенные расчеты

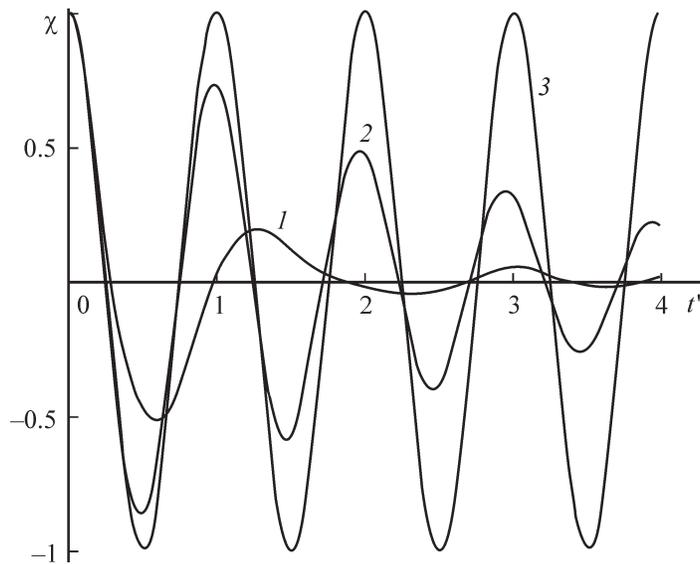


Рис. 2. Автокорреляционная функция координат точечных вихрей.

с контролируемыми возмущениями. При малых значениях амплитуды возмущений,  $A \leq 10^{-6}$ , инкременты нарастания практически совпадали со значениями инкрементов для неконтролируемых возмущений при всех  $N$ . Инкременты конечных возмущений являются, однако, функциями их амплитуд.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00045) и гранта президента РФ (грант № НШ-964.2003.1).

## Список литературы

- [1] *Aref H.* // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1983. Т. 15. Р. 345–389.
- [2] *Oliva W.M.* // *Ann. Instr. H. Poincaré.* 1991. V. 55. N 2. Р. 707–718.
- [3] *Kelvin Lord.* Floating magnets (illustrating vortex systems). *Collected works.* 1978. V. IV. Р. 135–140.
- [4] *Thompson J.J.* A treatise on the motion of vortex rings. 1883. Macmillan. Р. 94.
- [5] *Havelock T.H.* // *Phil. Mag.* 1931. V. 11. N 70. Р. 617–633.
- [6] *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.