01;03;08

Центрально-симметричное акустическое излучение нелинейно осциллирующей заряженной капли

© А.Р. Гаибов, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 5 апреля 2002 г.

При расчетах во втором порядке малости по амплитуде осцилляций капли несжимаемой жидкости предсказывается наличие в спектре ее акустического излучения монопольной компоненты, что связано с проявляющейся в расчетах второго приближения зависимостью от времени амплитуды нулевой моды капли.

1. Колеблющаяся в сжимаемой среде капля несжимаемой жидкости способна излучать звуковые волны. При расчетах в линейном по амплитуде колебания приближении нулевая и первая моды не участвуют в формировании спектра колебаний [1] и при неизменном объеме капли в спектре ее звукового излучения наиболее интенсивным является излучение, связанное с основной модой [2]. Дипольное излучение, обязанное возбуждению трансляционной моды, обнаруживается лишь при расчетах во втором порядке малости по амплитуде колебаний, когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию, имеются две с соседними номерами [3,4].

Идея постановки задачи об акустическом излучении осциллирующей капли основана на том, что с n-й модой осцилляций связано искажение поверхности равновесной сферической формы капли $\sim P(\mu)\cdot\exp(i\omega_n t)$; $\mu\equiv\cos\theta$, где $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра; ω_n — частота n-й моды. Периодическое движение поверхности капли вызывает периодические же возмущения давления в сжимаемой окружающей среде, т. е. генерирует акустическую волну. Частоты осцилляций капель из диапазона размеров, характерных для жидкокапельных систем естественного происхождения (туманов, облаков, дождя), приходятся на диапазоны частот звуковых волн и длинноволновых ультразвуковых (см., например, [5–8] и указанную там литературу). Наличие на каплях электрического заряда, отклонение формы капель от сферической, движение капель относительно внешней среды, учет их вязкости приводят к смещению спектра капиллярных колебаний в область более низких значений [4–6], т. е. в область звуковых волн, воспринимаемых человеческим слухом.

В связи со сказанным будем решать задачу об определении закономерностей изменения со временем амплитуд мод заряженной капли, излучающей звук при осцилляциях поверхности. Будем исследовать моды, возбуждающиеся во втором порядке малости при начальном возбуждении одной из мод, имея целью рассмотреть особенности генерации звука возбужденными модами. Для простоты проводимого качественного анализа примем, что начальное возмущение равновесной сферической формы имеет вид $\alpha \cdot P_2(\mu)$, где α — амплитуда возмущения, считающаяся малой.

2. Примем, что капля несжимаемой электропроводной жидкости с равновесным радиусом R, плотностью ρ_1, коэффициентом поверхностного натяжения γ и зарядом Q находится во внешней идеальной сжимаемой диэлектрической среде плотностью ρ_2, скорость распространения звука в которой есть c.

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли, в которой уравнение поверхности осциллирующей капли в произвольный момент времени меет вид

$$r = R + \xi(\theta, t),$$

ξ — малое возмущение поверхности капли ($|\xi|/R \leqslant \alpha/R \ll 1$). Движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей ψ_1 и ψ_2 соответственно.

Математическая формулировка начальной задачи о расчете амплитуды возбуждающихся мод имеет вид [2–4]:

$$\Delta\Phi = 0; \qquad \Delta\psi_1 = 0; \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t} - \Delta\psi_2 = 0;$$

$$r = R + \xi: \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = \frac{\partial\psi_2}{\partial n}; \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta};$$

$$\Delta p - \rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \rho_1\frac{1}{2}(\nabla\psi_1)^2 + \rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - \frac{\rho_2}{2c^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\psi_2)^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 = \gamma \cdot \operatorname{div}\mathbf{n};$$

$$\Phi = \text{const};$$

$$r \to \infty: \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + ik\psi_2 = o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$t = 0: \qquad r = R + \xi_0 + \alpha P_2(\mu); \qquad \psi_1 = 0;$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S (\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi)ds = Q, \quad S = \left[r = R + \xi(\theta, t),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\right];$$

$$\int_v \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \cdot \sin\theta d\theta d\phi = 0;$$

$$v = \left[0 \leqslant r \leqslant R + \xi(\theta, t),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\right];$$

$$\int_v r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{1}$$

Φ — потенциал электрического поля; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности капли; Δp — разность гидростатических давлений в капле и во внешней среде; γ — коэффициент поверхностного натяжения; ξ_0 — нормировочная константа, определяющаяся из условия постоянства объема капли.

Как показано в [9], при начальном возбуждении основной моды ($n = 2$) во втором порядке малости за счет взаимодействия мод кроме основной возбуждаются нулевая ($n = 0$) и четвертая ($n = 4$) моды. Поскольку нас интересуют особенности акустического излучения капли, то наибольший интерес в этом плане представляет исследование возможных осцилляций нулевой моды, так как с ними может быть связано монопольное акустическое излучение, ранее не исследованное, тогда как акустическое излучение мод с $n \geqslant 1$ исследовалось (см., например, [2,3]).

Решая сформулированную задачу стандартными методами (см., например, [4,9,10]), можно получить выражение для временнóй зависимости амплитуды нулевой моды колебаний поверхности капли в квадратичном по α приближении:

$$a_0(t) = -\frac{1}{10R}\left\{2\varkappa^2 \cdot \exp(-2\omega^* t) \cdot \cos^2(\omega t + \beta) + \left[2\alpha^2 - 2\varkappa^2 \cos^2(\beta)\right]\right\}, \tag{2}$$

$$\varkappa = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \left(\frac{\omega^*}{\omega}\right)^2}; \qquad \beta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega^*}{\omega}\right);$$

$$\omega = \operatorname{Re}\left(\sqrt{\tau + i\tau^*}\right); \qquad \omega^* = \operatorname{Im}\left(\sqrt{\tau + i\tau^*}\right);$$

$$\tau = \frac{4\gamma(1-W)}{R^3}\Big[2\rho_1\big(81 + 9k^2R^2 - 2k^4R^4 + k^6R^6\big)$$

$$+ 4\rho_2\big(27 + 6k^2R^2 + k^4R^4\big)\Big]\Big[\big(81 + 9k^2R^2 - 2k^4R^4 + k^6R^6\big)\rho_1^2$$

$$+ 4\big(27 + 6k^2R^2 + k^4R^4\big)\rho_1\rho_2 + 4\big(9 + 3k^2R^2 + k^4R^4\big)\rho_2^2\Big]^{-1};$$

$$\tau^* = \frac{4\gamma(1-W)}{R^3}\big[4\rho_2k^5R^5\big] \times \Big[\big(81 + 9k^2R^2 - 2k^4R^4 + k^6R^6\big)\rho_1^2$$

$$+ 4\big(27 + 6k^2R^2 + k^4R^4\big)\rho_1\rho_2 + 4\big(9 + 3k^2R^2 + k^4R^4\big)\rho_2^2\Big]^{-1};$$

$$W \equiv Q^2/16\pi R^3\gamma; \qquad k \equiv \omega/c.$$

3. То обстоятельство, что амплитуда нулевой моды оказывается периодической функцией времени, на первый взгляд противоречит предположению о несжимаемости жидкости капли и хорошо известному из линейной теории факту отсутствия ее радиальных осцилляций, вытекающему из условия сохранения объема капли [1,11]. В самом деле, уравнение возмущенной капиллярным волновым движением формы поверхности капли (используя введенное обезразмеривание) можно представить в виде разложения по нормированным полиномам Лежандра [11]

$$r(\theta, t) = a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) \cdot P_n(\mu); \qquad \mu \equiv \cos(\theta). \tag{3}$$

В (2) $a_n(t)$ — зависящие от времени амплитуды мод капиллярных осцилляций капли; a_0 — амплитуда нулевой моды, величина которой находится из условия неизменности объема капли (1). Подставим (3) в (1) и в линейном по амплитудам мод a_n (в линейном по $|\xi|$) приближении с учетом ортогональности полиномов Лежандра получим, что a_0 не зависит от времени и равно равновесному радиусу капли $a_0 = R$. Если проделать ту же операцию, сохраняя слагаемые второго порядка малости, то коэффициент a_0 определится выражением, зависящим от времени:

$$a_0 \approx R - \frac{1}{2R} \sum_{n=2}^{\infty} \big(a_n(t)\big)^2.$$

Для идеальной жидкости коэффициенты $a_n(t)$ являются периодическими функциями времени. Таким образом, зависимость от времени амплитуды нулевой моды, проявляющаяся во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения, следует из условия сохранения объема капли.

Периодическая зависимость от времени амплитуды нулевой моды капли приведет к появлению в окружающей сжимаемой среде центрально-симметричных волн сжатия и разряжения, т. е. акустических волн. Иначе говоря, нелинейно колеблющаяся капля может рассматриваться как монопольный излучатель акустических волн.

4. Из (1) видно также, что периодически зависящая от времени часть амплитуды, с которой связано акустическое излучение, затухает во времени с декрементом ω^*. Это затухание определяет потери энергии осцилляций на генерацию акустического излучения.

Для нижеследующих численных оценок примем, как это было принято при численных оценках в [2,3], что $\rho_1 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$; $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$; $\gamma = 73\,\mathrm{dyn/cm}$; $a = 0.1 \cdot R$; $kR \ll 1$; $R = 250\,\mu\mathrm{m}$, концентрация дождевых капель указанного размера $N = 0.3\,\mathrm{cm^{-3}}$. Примем также, что заряд капли много меньше предельного в смысле устойчивости по Рэлею ($W \ll 1$) [8,11].

Выражение для мощности J акустического излучения от сферы, пульсирующей с амплитудой a_0, имеет вид [12]:

$$J = \frac{2\pi\rho_2 R^4 \omega^4 a_0^2}{c(1 + \omega^2 R^2/c^2)}. \tag{4}$$

Из (2)–(4) следует, что $\alpha_0 \approx 10^{-3} \cdot R$, а мощность монопольного акустического излучения от единичной капли с вышеприведенными характеристиками, идущего на частоте $\omega \approx 6 \cdot 10^3\,\mathrm{s^{-1}}$, имеет порядок величины $10^{-7}\,\mathrm{erg/s}$. Мощность же акустического излучения из пространства объемом $1\,\mathrm{km^3}$, занятого дождем, равна $\approx 3\,\mathrm{W}$, т. е. существенно превышает как мощность дипольного акустического излучения, связанного с возбуждением трансляционной моды [3], так и мощность квадрупольного акустического излучения, генерируемого в линейном по амплитуде осцилляций приближении основной модой [2]. Интегральное монопольное излучение звука из такого облака будет иметь на его границе громкость $\approx 60\,\mathrm{dB}$ (что соответствует громкости человеческой речи).

Роль собственного электрического заряда капли, согласно (2), сводится в основном к изменению частоты акустического излучения: варьируя заряд капли, можно изменять частоту акустического излучения, переводя его, например, из ультразвукового диапазона в звуковой или из звукового в инфразвуковой.

5. Заключение. Монопольное акустическое излучение в звуковом диапазоне частот, связанное с возбуждением нулевой моды колеблющейся заряженной капли (проявляющееся как нелинейный эффект во втором порядке малости по амплитуде колебания), играет определяющую роль в интегральной интенсивности акустического излучения жидкокапельных систем, например пространства, занятого дождем.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[2] *Григорьев А.И., Гаибов А.Р.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 11. С. 6–11.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Гаибов А.Р., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 21. В. 22. С. 7–13.
[4] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 4. С. 15–22.
[5] *Won-Kyu Rhim, Sang Kun Chung, Hyson M.T.* et al. // IEEE Transaction on Industry Applications. 1987. V. IA–23. N 6. P. 975–979.
[6] *Шагапов В.Ш.* // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 506–512.
[7] *Trinh E.H., Holt R.G., Thiessen D.B.* // Phys. Fluids. 1996. V. 8. N 1. P. 43–61.
[8] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 2. С. 27–35.
[10] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 8. С. 45–52.
[11] *Hendricks C.D., Schneider J.M.* // Amer. Phys. 1963. V. 1. N 6. P. 450–453.
[12] *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высш. школа, 1978. 448 с.