01;05.1

Анализ структуры волн поля дефектов в вязкопластической среде

© *Н.В. Чертова*

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск
E-mail: chertova@ispms.tsc.ru

Поступило в Редакцию 27 августа 2002 г.

На основе уравнений полевой теории дефектов исследована структура волн поля дефектов в вязкопластической среде. Установлен поперечный характер волн поля дефектов, характеризуемого тензором плотности и плотности потока дефектов. Найдена связь этих величин в плоской гармонической волне. Рассмотрены частные случаи сред с сильно и слабозатухающими волнами.

Продолжая исследования [1], где на основе полевой теории дефектов были рассмотрены закономерности распространения плоских волн дефектов в вязкопластической среде, обратим внимание на структуру волн. Изучение этого вопроса кроме познавательного значения важно по ряду причин. Во-первых, исследование структуры волн поля дефектов является обязательным этапом дальнейших теоретических исследований закономерностей распространения плоских волн дефектов, например с учетом границы раздела двух вязкопластических сред. Во-вторых, анализ структуры волн поля дефектов позволяет дополнить экспериментальные измерения скорости пластической дисторсии соответствующими компонентами тензора плотности дислокаций, характеризующими дефектную структуру материала [2]. С другой стороны, эти результаты позволяют по скорости пластической деформации, чаще всего измеряемой в эксперименте, оценить плотность дислокаций, связанную с моментными напряжениями [3–4].

Исходная система динамических уравнений полевой теории дефектов [1,5] имеет вид

$$B(\nabla \cdot I) = -P, \qquad \nabla \cdot \alpha = 0,$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \nabla \times I, \qquad S(\nabla \times \alpha) = -B\,\frac{\partial I}{\partial t} - \sigma, \tag{1}$$

где α, I — тензоры плотности и плотности потока дислокаций; P, σ — эффективные напряжения и импульс; B, S — константы теории; знаки $(\cdot)$, $(\times)$ обозначают скалярное и векторное произведение. Из уравнений (1) следует, что эффективные напряжения и импульс удовлетворяют условию совместности

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma, \tag{2}$$

которое является уравнением динамического равновесия в механике сплошных сред. По определению вязкопластического тела, предполагающему зависимость напряжений от скорости пластической деформации [6], будем считать, что

$$\sigma = \eta I, \tag{3}$$

где тензор плотности потока дефектов I определяется скоростью пластической дисторсии β [7]

$$I = -\frac{\partial \beta}{\partial t}, \tag{4}$$

η — коэффициенты вязкости. Для справки: $\alpha = -\nabla \times \beta$. Как отмечалось в [1], соотношение (3) может быть записано формально на основе наблюдаемой аналогии уравнений (1) и системы уравнений Максвелла в электродинамике [8].

Рассматривая совместно (1)–(3), можно показать, что в вязкопластической среде эффективный импульс убывает со временем по закону

$$P = P_0 \exp(-t/\tau), \tag{5}$$

где $\tau = B/\eta$ — время релаксации, P_0 — начальное значение импульса. Чем меньше время релаксации, определяемое величинами, характеризующими инерционные свойства ансамбля дефектов (B) и вязкость среды (η), тм быстрее происходит убывание импульса. С учетом двух последних равенств исходная система (1) запишется в виде

$$\begin{gathered} \nabla \cdot I = 0, \qquad \nabla \cdot \alpha = 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \nabla \times I, \qquad S(\nabla \times \alpha) = -B\,\frac{\partial I}{\partial t} - \eta I. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим поле дефектов, в котором величины α, I зависят лишь от одной пространственной координаты $\xi = m \cdot r$ и времени t. В этом случае каждая из девяти компонент α_{ik} будет удовлетворять уравнению

$$\frac{B}{S}\,\frac{\partial^2 \alpha_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \alpha_{ij}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta}{S}\,\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

аналогичное уравнение имеет место для компонент I_{ik}.

Как показано в работе [1], эти уравнения описывают процесс распространения двух плоских гармонических волн

$$\alpha^{1,2} = \alpha e^{i\omega(t \pm \xi/V)}, \qquad I^{1,2} = I e^{i\omega(t \pm \xi/V)} \tag{8}$$

в направлениях $\pm m$ со скоростью

$$V = \sqrt{\frac{S}{B} \Big/ \left(1 + \frac{i\eta}{B\omega}\right)}. \tag{9}$$

Чтобы определить структуру волн поля дефектов, рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении m. В этом случае уравнения (6) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(mI) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}(m\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[mI] = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \qquad S\frac{\partial}{\partial \xi}[m\alpha] = -B\frac{\partial I}{\partial t} - \eta I. \tag{10}$$

Из двух первых уравнений следует, что $\partial_\xi I_{\xi i} = 0$, $\partial_\xi \alpha_{\xi i} = 0$, т.е. проекции тензоров α, I на направление распространения волны, если не равны нулю, то могут зависеть только от времени. Умножая два последних равенства скалярно на вектор m, получим

$$\frac{\partial \alpha_{\xi i}}{\partial t} = 0, \qquad B\frac{\partial I_{\xi i}}{\partial t} + \eta I_{\xi i} = 0. \tag{11}$$

Первое из этих равенств означает, что проекция волны плотности дефектов на направление ξ также не зависит от времени, т.е. $\alpha_{\xi i} \equiv 0$. Иными словами, волна плотности дефектов является поперечной волной и все ненулевые компоненты лежат в плоскости волны. Из второго равенства (11) можно получить, что продольные компоненты тензора плотности потока дефектов убывают со временем

$$I_{\xi i} = I_{\xi i}(0)\exp(-t/\tau),$$

поэтому в вязкопластической среде волна I также поперечна.

Определим связь между характеристиками поля дефектов в плоской гармонической волне. Подставляя решение (8) в первое уравнение второй строки (10), получим

$$\alpha = [mI]/V. \tag{12}$$

Из (12) следует, что тензоры α, I по первым индексам и вектор m образуют левую ортогональную тройку векторов. Величина

$$\frac{1}{V} = \sqrt{\frac{B}{S}\left(1 + \frac{i\eta}{B\omega}\right)} = \sqrt{(1 + i\,\mathrm{tg}\,\delta)}\,/C \tag{13}$$

выступает в роли импеданса среды, $\mathrm{tg}\,\delta = \eta/B\omega$ — тангенс угла потерь. Используя (12), можно получить отношение модулей характеристик поля дефектов

$$\frac{|I|}{\alpha} = |V| = \sqrt{(n^2 + \chi^2)}\,/C \tag{14}$$

и сдвиг фаз φ

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\chi}{n} = \mathrm{tg}(\delta/2), \quad \varphi = \delta/2, \tag{15}$$

где

$$n = \left(\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta + 1} + 1\right)^{1/2}, \quad \chi = \left(\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta + 1} - 1\right)^{1/2} \tag{16}$$

— показатели преломления и поглощения, $C = \sqrt{S/B}$.

Рассмотрим предельные случаи больших и малых потерь. Если в вязкопластической среде распространяются слабо затухающие волны, определяемые условием $\mathrm{tg}\,\delta \ll 1$, то, согласно (16), $n = 1$, $\chi = (\mathrm{tg}\,\delta)/2 = \chi(\omega)$ и

$$\frac{|I|}{|\alpha|} = |V| = \left(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta/4}\right)/C \approx 1/C, \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = (\mathrm{tg}\,\delta)/2. \tag{17}$$

Для волн, испытывающих сильное затухание, $\mathrm{tg}\,\delta \gg 1$, $n \approx \chi = \sqrt{\mathrm{tg}\,\delta/2} = \sqrt{\eta/(2B\omega)}$ и

$$\frac{|I|}{\alpha} = |V| \approx \sqrt{\mathrm{tg}\,\delta}\,/C, \qquad \mathrm{tg}\,\varphi \approx 1. \tag{18}$$

Однако в случае $\mathrm{tg}\,\delta \gg 1$ волновой процесс практически не реализуется, поскольку волна дефектов затухает на очень малых расстояниях

$$d = C/(\chi\omega) = \lambda/(2\pi\chi), \tag{19}$$

которые при $\mathrm{tg}\,\delta \gg 1$ и $n \approx \chi \gg 1$ много меньше длины волны λ.

В заключение хотелось бы отметить два момента.

Условия сильного $\eta/B\omega \gg 1$ или слабого $\eta/B\omega \ll 1$ затухания волн при заданных константах материала η, B позволяют выбрать режимы поверхностного или объемного динамического воздействия в зависимости от частоты. В случае поверхностного воздействия толщина пластически деформированного слоя материала определяется как $d = \sqrt{2S/(\eta\omega)}$.

Поперечный характер волн плотности дефектов установлен на основе кинематических тождеств упругого континуума с дефектами $\nabla \cdot \alpha = 0$, $\partial\alpha/\partial t = \nabla \times I$. Материальное соотношение, определяющее свойства среды, при этом выводе не использовалось. Что касается волн плотности потока дефектов, то их характер неразрывно связан со свойствами среды и поперечный характер волн плотности потока дефектов установлен лишь для рассматриваемых вязкопластических сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02–01–01188).

Список литературы

[1] *Чертова Н.В., Гриняев Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 18. С. 91–94.
[2] *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
[3] *Kroner E.* // Int. Engng. Sci. 1963. V. 1. P. 261–278.
[4] *Grinyaev Yu.V., Chertova N.V.* // Theoretical and applied fracture mechanics. 1998. V. 28. P. 231–236.
[5] *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* // Физ. Мезомех. 2000. Т. 3. № 5. С. 19–32.
[6] *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968.
[7] *Косевич А.М.* Основы механики кристаллической решетки. М.: Мир, 1972.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. // Теоретическая физика. Т. VIII. М.: Наука, 1982.