

03

## Расчет электрического потенциала и силы Лоренца при поперечном обтекании кругового цилиндра в неоднородном магнитном поле, для различных геометрий локально ионизованной области расположенной у поверхности цилиндра

© Е.Г. Шейкин, Wei Yang Cheng

Санкт-Петербургский государственный университет,  
198904 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: egsh@pochta.ru

(Поступило в Редакцию 21 ноября 2012 г. В окончательной редакции 21 мая 2013 г.)

Получено решение уравнения для электрического потенциала в локально ионизованном магнитогидродинамическом течении при поперечном обтекании кругового цилиндра в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником для различных конфигураций области ионизации. Получены аналитические формулы для расчета объемной плотности силы Лоренца, действующей на поток в локально ионизованной области. Проанализировано влияние параметра Холла и конфигурации области магнитогидродинамического взаимодействия на силу Лоренца. Показано, что увеличение параметра Холла приводит к уменьшению силы Лоренца действующей на поток, а изменение конфигурации локально ионизованной области позволяет ослабить влияние параметра Холла на величину силу Лоренца.

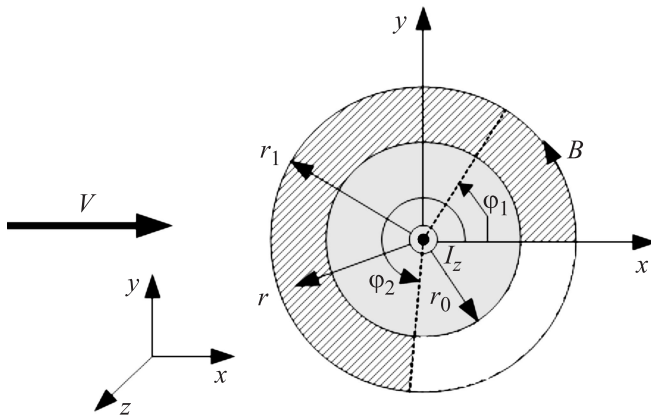
### Введение

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется изучению магнитогидродинамического (МГД) воздействия на поток с целью управления его характеристиками [1–16]. Рассматриваются возможности управления: потоком в воздухозаборнике летательного аппарата, процессами смещения потоков, процессами в двигателе высокоскоростного летательного аппарата, положением головной ударной волны, тепловыми потоками на обтекаемую поверхность. В большинстве рассматриваемых МГД приложений магнитное поле будет неоднородным, а равновесная проводимость потока пренебрежимо мала и для осуществления МГД воздействия на поток необходимо тем или иным способом создать в потоке неравновесную проводимость [4,6,8,17]. Поток, в этом случае, будет локально ионизован. Расчеты локально ионизованного МГД течения в [18–20] показали, что эффективность МГД управления течением во многом определяется пространственным распределением силы Лоренца. Таким образом, выбор конфигурации МГД воздействия на поток в конкретных приложениях целесообразно предварить анализом распределения силы Лоренца в области МГД взаимодействия. Это требует наличия простых способов для расчета силы Лоренца в локально ионизованном МГД течении в неоднородном магнитном поле. В работе [21] получены аналитические формулы для расчета объемной плотности силы Лоренца действующей на МГД течение при поперечном обтекании цилиндра в случае, когда у поверхности цилиндра создается область ионизации, ограниченная поверхностью цилиндра и цилиндрической поверхностью с радиусом, превышающим радиус цилиндра.

В настоящей работе будут получены формулы для расчета силы Лоренца действующей на поток при поперечном обтекании цилиндра для более общей конфигурации области ионизации, чем в [21]. Будет рассмотрена область ионизации потока, которая покрывает не всю поверхность цилиндра как в работе [21], а только ее часть. Будет исследовано влияние геометрии локально ионизованной области, параметра Холла и приложенного электрического поля на силу Лоренца в области МГД взаимодействия.

### 1. Нахождение электрического потенциала в локально-ионизованном МГД течении при поперечном обтекании кругового цилиндра в неоднородном магнитном поле

Геометрия задачи и основные обозначения показаны на рис. 1. В качестве неоднородного магнитного поля будем рассматривать поле, создаваемое прямолинейным проводником, направленным вдоль оси  $z$  и проходящим через центр координат в точке  $(0,0)$ , совпадающей с осью симметрии кругового цилиндра радиуса  $r_0$ . Рассматривается локально ионизованное МГД течение. Предполагается, что плазма вокруг цилиндра существует только в ограниченной области:  $r_0 < r < r_1$ ;  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ . Данная область выделена на рис. 1 штриховкой. Проводимость потока вне этой области равна нулю. Рассматривается двумерное приближение, в котором характеристики МГД течения, электрического и магнитного поля, а также токи в плазме не зависят от координаты  $z$ .



**Рис. 1.** Геометрия, используемая для нахождения электрического потенциала в МГД тчении в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным током  $I_z$ , при поперечном обтекании цилиндра радиусом  $r_0$ .

Уравнение для электрического потенциала  $\Phi(r, \varphi)$  в области МГД взаимодействия при поперечном обтекании кругового цилиндра в приближении потенциального течения получено в работе [21], там же детально описаны физические допущения, использованные при выводе этого уравнения. Уравнение для  $\Phi(r, \varphi)$  из работы [21] приведем в безразмерной форме с использованием безразмерных переменных:

$$(r^2 + \beta_0^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + r^4 (r^2 + \beta_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + r^3 (r^2 + 3\beta_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + (r^3 - \beta_0^2 (r + \beta_0^2/r) - 3r) \beta_0 \cos \varphi - 2r^2 \beta_0^3 E_z = 0, \quad (1)$$

где  $\beta_0 = \mu_e B_0$  — характерное значение параметра Холла, определяемое через подвижность электронов  $\mu_e$  и значение магнитной индукции  $B_0$  на поверхности цилиндра,  $E_z$  — напряженность внешнего электрического поля. Согласно [21], приложение внешнего электрического поля вдоль оси  $z$  может быть использовано для управления силой Лоренца, действующей на поток. Потенциал  $\Phi(r, \varphi)$  в уравнении (1) нормирован на величину  $B_0 V r_0$ , где  $V$  — скорость потока на бесконечном удалении от цилиндра, электрическое поле нормировано на величину  $B_0 V$ , радиус нормирован на величину  $r_0$ . Таким образом, при используемых безразмерных переменных, границе области МГД взаимодействия, расположенной на поверхности цилиндра, отвечает значение  $r = 1$ .

Остальные параметры, используемые в данной статье, также будут фигурировать во всех уравнениях в безразмерной форме. Так плотность тока  $j$  в области МГД взаимодействия нормируется на величину  $\sigma B_0 V$  (где  $\sigma$  — проводимость потока), объемная плотность силы Лоренца  $F$  на  $\sigma B_0^2 V$ , скорость течения  $v$  на  $V$ , а магнитное поле  $B$  на  $B_0$ . Отметим, в частности, что проекции нормированного вектора магнитной индукции в цилиндрической системе координат имеют для рас-

считываемой задачи следующий вид:  $B_r = 0$ ,  $B_\varphi = 1/r$ ,  $B_z = 0$ , а радиальная проекция нормированной скорости потока в приближении потенциального течения имеет следующий вид:  $v_r = (1 - 1/r^2) \cos \varphi$ .

В настоящей работе рассматривается непроводящая поверхность цилиндра, так как в этом случае, согласно [21], МГД воздействие на поток позволяет реализовать более эффективное торможение потока, чем в случае с проводящей поверхностью цилиндра. Таким образом, при решении уравнения (1) будем использовать граничные условия непротекания электрического тока через границы ионизованной области:

$$j_r|_{r=1, r=r_i} = 0 \quad \text{и} \quad j_\varphi|_{\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) для произвольных значений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  будем искать в виде следующей суммы:

$$\Phi(r, \varphi) = \Phi_a(r, \varphi) + \Phi_b(r, \varphi), \quad (3)$$

где  $\Phi_a(r, \varphi)$  — решение уравнения (1) с граничными условиями (2) в частном случае при  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = 2\pi$ . Аналитическое выражение для потенциала  $\Phi_a(r, \varphi)$ , полученное в работе [21], с использованием безразмерных переменных может быть записано в виде

$$\Phi_a(r, \varphi) = -\beta_0 E_z \ln \left( \frac{\beta_0}{r} \right) + \frac{\cos \varphi}{\beta_0} \left( C_1 Z_1(\beta_0/r) + C_2 Z_2(\beta_0/r) - \frac{r^2 + 1}{r} \right), \quad (4)$$

где функции  $Z_1$  и  $Z_2$  являются комбинацией модифицированных функций Бесселя:  $Z_1(x) = I_1(x) + x I_2(x)$ ,  $Z_2(x) = K_1(x) - x K_2(x)$ . Константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются выражениями:  $C_1 = -(r_1 - 1/r_1) K_1(\beta_0)/H$ ,  $C_2 = (r_1 - 1/r_1) I_1(\beta_0)/H$ , где  $H = I_1(\beta_0/r_1) K_1(\beta_0) - I_1(\beta_0) K_1(\beta_0/r_1)$ . Подставив выражения (3,4) в уравнение (1), получим уравнение для потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$ :

$$(r^2 + \beta_0^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial \varphi^2} + r^4 (r^2 + \beta_0^2) \frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial r^2} + r^3 (r^2 + 3\beta_0^2) \frac{\partial \Phi_b}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Используя соотношения (3) из работы [21], определяющие связь между проекциями плотности тока и электрическим потенциалом, и учитывая представление потенциала в форме (3), выразим проекции плотности тока  $j_r$  и  $j_\varphi$  через потенциал  $\Phi_b(r, \varphi)$ :

$$j_r = j_{r,a} - \frac{r^2}{(r^2 + \beta_0^2)} \frac{\partial \Phi_b}{\partial r}, \quad j_\varphi = j_{\varphi,a} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_b}{\partial \varphi}, \quad (6)$$

где плотности тока  $j_{r,a}$  и  $j_{\varphi,a}$  отвечают задаче с  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$  и могут быть представлены в следующем виде:

$$j_{r,a} = \frac{1}{\beta_0 r} \left[ C_1 I_1 \left( \frac{\beta_0}{r} \right) + C_2 K_1 \left( \frac{\beta_0}{r} \right) + \frac{r^2 - 1}{r} \right] \cos \varphi, \\ j_{\varphi,a} = \frac{1}{\beta_0 r} \left[ C_1 I_1 \left( \frac{\beta_0}{r} \right) + C_2 Z_2 \left( \frac{\beta_0}{r} \right) - \frac{r^2 + 1}{r} \right] \sin \varphi. \quad (7)$$

Так как  $j_{r,a}|_{r=1,r=r_1} = 0$ , то граничные условия (2) с учетом (6) принимают вид

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial r} \Big|_{r=1,r=r_1} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2} = r j_{\varphi,a} \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2}. \quad (8b)$$

Для решения уравнения (5) используем метод разделения переменных. При этом потенциал представляется в виде ряда  $\Phi_b(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r) \Psi_k(\varphi)$ , где функции  $R_k(r)$  и  $\Psi_k(\varphi)$  определяются из решения систем уравнений:

$$\frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{r^2 + 3\beta_0^2}{r(r^2 + \beta_0^2)} \frac{dR_k}{dr} + \lambda_k \frac{r^2 + \beta_0^2}{r^4} R_k = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \Psi_k}{d\varphi^2} - \lambda_k \Psi_k = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что граничные условия (8a) для  $\Phi_b(r, \varphi)$  будут удовлетворены, если решение уравнения (9) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$dR_k/dr \Big|_{r=1,r=r_1} = 0. \quad (11)$$

Задача нахождения нетривиального решения уравнения (9) с граничными условиями (11) сводится к задаче Штурма–Лиувилля, в которой требуется найти собственные значения  $\lambda_k$  и соответствующие им собственные функции  $R_k(r)$ . Используя несложные математические преобразования, приведем уравнение (9) к традиционному используемому для задачи Штурма–Лиувилля виду

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^3}{r^2 + \beta_0^2} \frac{dR_k(r)}{dr} \right) + \lambda_k \frac{1}{r} R_k(r) = 0. \quad (12)$$

Согласно [22] для данного уравнения, с граничными условиями (11) минимальное собственное значение  $\lambda_0 = 0$ , а соответствующая ему собственная функция  $R_0 = \text{const}$ , остальные собственные значения  $\lambda_k$  положительны. Что касается собственных функций  $R_k(r)$ , то они ортогональны на промежутке  $[1, r_1]$  с весом  $1/r$

$$\int_1^{r_1} \frac{1}{r} R_j(r) R_k(r) dr = \delta_{jk}, \quad (13)$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера, который равен единице, если индексы  $j$  и  $k$  совпадают, и нулю в случае различных индексов. Принимая во внимание, что  $\lambda_k \geq 0$ , решение уравнения (10) запишем в виде

$$\Psi_0(\varphi) = a_0 + b_0 \varphi,$$

$$\Psi_k(\varphi) = a_k \text{ch}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) + b_k \text{sh}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)), \quad k \geq 1. \quad (14)$$

Константы  $a_k$  и  $b_k$  в (14) определим используя граничное условие (8b), которое запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k(r) \frac{d\Psi_k(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2} = \frac{1}{\beta_0} \left( C_1 Z_1(1, \beta_0/r) + C_2 Z_2(1, \beta_0/r) - \frac{r^2 + 1}{r} \right) \sin \varphi \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2}. \quad (15)$$

Подставив (14) в (15) и используя ортогональность собственных функций  $R_k(r)$  (13), получим систему уравнений для определения констант  $a_k$  и  $b_k$ . При  $k \geq 1$  система уравнений принимает следующий вид:

$$\sqrt{\lambda_k} \left( a_k \text{sh}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) + b_k \text{ch}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) \right) \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2} = -Q_k \sin(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2},$$

где

$$Q_k = \frac{1}{\beta_0}$$

$$\times \int_1^{r_1} \left( C_1 Z_1(1, \beta_0/r) + C_2 Z_2(1, \beta_0/r) - \frac{r^2 + 1}{r} \right) \frac{R_k(r)}{r} dr.$$

Решение данной системы уравнений может быть записано в виде

$$a_k = \frac{Q_k}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{A - B}{C - D},$$

$$b_k = \frac{Q_k}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{E - F}{C - D},$$

$$A = \text{ch}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_1)] \sin \varphi_2,$$

$$B = \text{ch}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_2)] \sin \varphi_1,$$

$$C = \text{sh}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_1)] \text{ch}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_2)],$$

$$D = \text{ch}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_1)] \text{sh}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_2)],$$

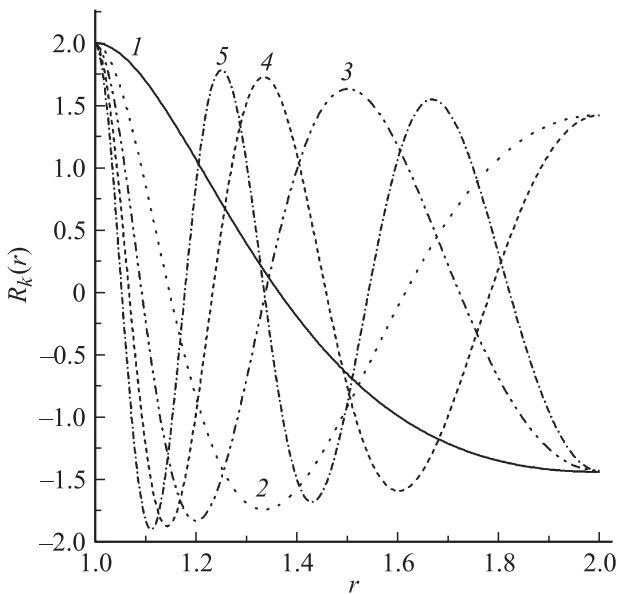
$$E = \text{sh}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_1)] \sin \varphi_2,$$

$$F = \text{sh}[\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_2)] \sin \varphi_1. \quad (16)$$

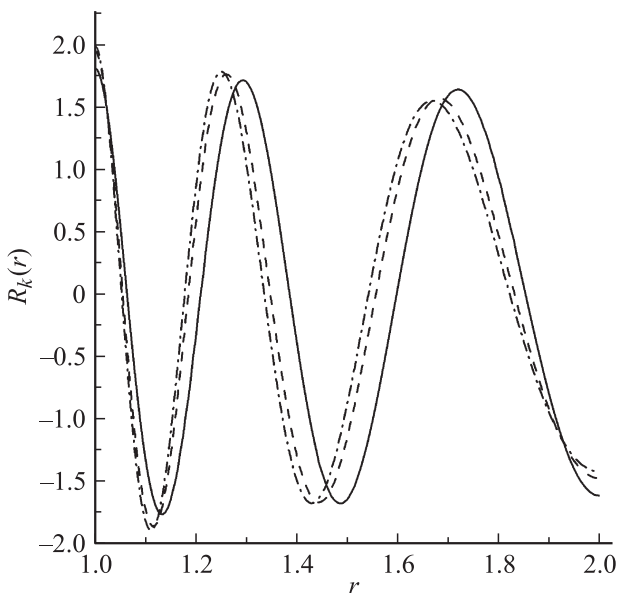
При  $k = 0$  получаем уравнение  $b_0 = Q_0 \sin(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi=\varphi_2}$ . Расчет величины  $Q_0$ , проведенный с учетом того, что  $R_0(r) = \text{const}$  показывает, что  $Q_0 \equiv 0$ , а следовательно, и  $b_0 \equiv 0$ . Что касается коэффициента  $a_0$ , то без уменьшения общности решения полагаем  $a_0 = 0$ . Таким образом, потенциал  $\Phi_b(r, \varphi)$  в области МГД взаимодействия определяется следующим соотношением:

$$\Phi_b(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) \Psi_k(\varphi).$$

Из (16) нетрудно заметить, что в частном случае при  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = 2\pi$  все коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  равны нулю, что означает обращение в ноль  $\Psi_k(\varphi)$ , а следовательно и



**Рис. 2.** Собственные функции  $R_k(r)$  задачи Штурма–Лиувилля (11), (12) для параметров  $r_1 = 2$  и  $\beta_0 = 10$ . Значения  $k$  указаны у кривых.



**Рис. 3.** Собственные функции  $R_k(r)$  задачи Штурма–Лиувилля (11), (12), отвечающие значению  $k = 5$  для различных значений параметра Холла, при  $r_1 = 2$ . Сплошная кривая соответствует значению  $\beta_0 = 1$ , пунктир соответствует значению  $\beta_0 = 3$ , штрихпунктир соответствует значению  $\beta_0 = 10$ .

потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$ . Особо выделим случай симметричной относительно оси  $x$  области МГД взаимодействия отвечающей значению угла  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$ . В этом случае выражения (16) для определения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  заметно упрощаются:

$$a_k = -\frac{Q_k}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{\sin(\varphi_1)}{\text{sh}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi_1))}, \quad b_k = 0. \quad (17)$$

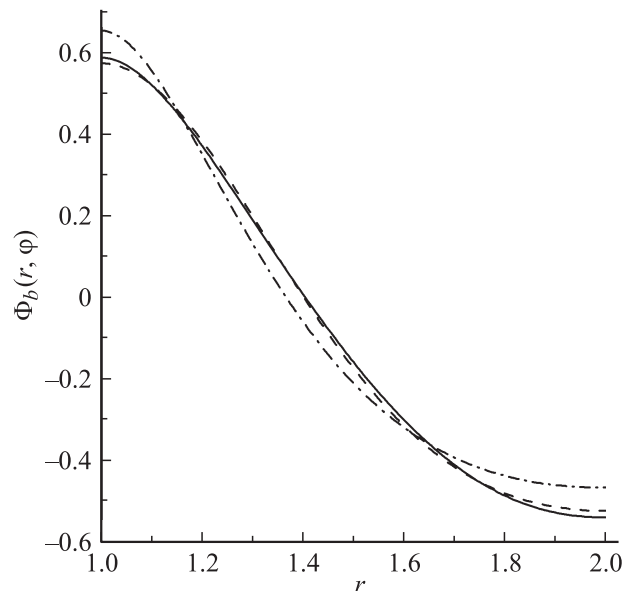
Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (11), (12)  $\lambda_k$  при различных значениях параметров  $r_1$  и  $\beta_0$

$k$	$r_1 = 2.0$		$r_1 = 1.2$	
	$\beta_0 = 1$	$\beta_0 = 10$	$\beta_0 = 1$	$\beta_0 = 10$
1	13.519	0.38298	161.74	3.5082
2	53.694	1.5439	646.65	14.041
3	120.66	3.4792	1454.8	31.596
4	214.41	6.1886	2586.3	56.172
5	334.95	9.6721	4941.0	87.770
6	482.27	13.030	5819.0	126.39
7	656.38	18.961	7920.3	172.03
8	857.27	24.767	10344.8	224.70
9	1084.96	31.347	13092.6	284.38
10	1339.42	38.701	16163.7	351.09

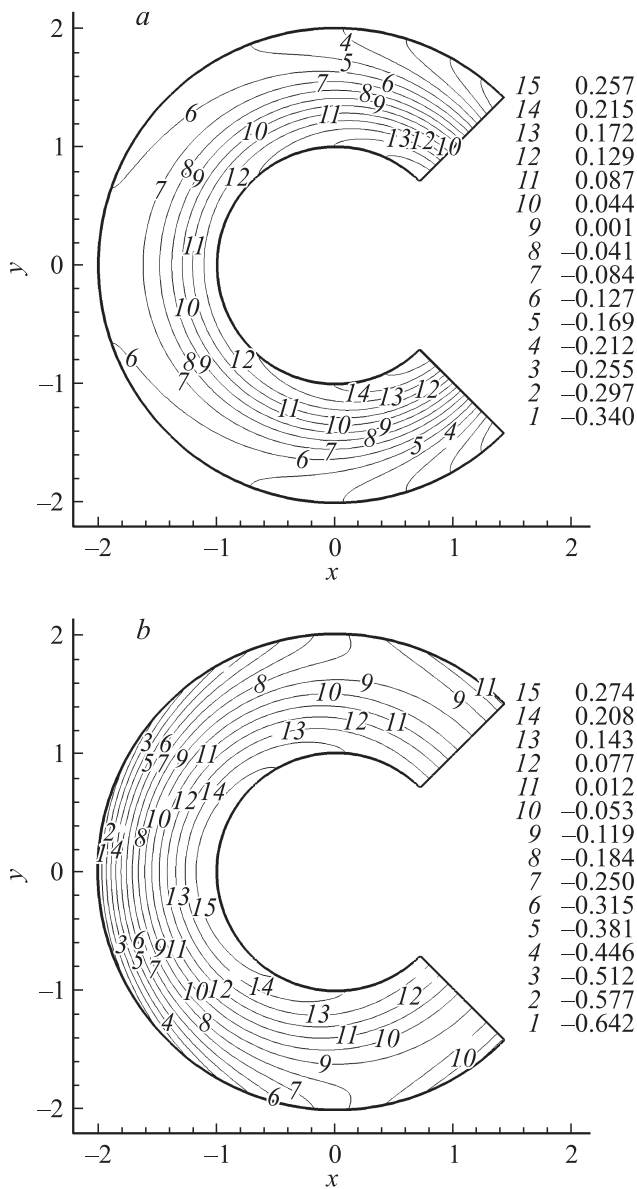
При расчете электрического потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  вначале находят собственные значения  $\lambda_k$  и собственные функции  $R_k(r)$  из решения задачи Штурма–Лиувилля (11), (12). Затем, с использованием уравнений (14), (16), определяются функции  $\Psi_k(\varphi)$ , и потенциал с помощью выражения:

$$\Phi_b(r, \varphi) = \sum_{k=1}^N R_k(r) \Psi_k(\varphi), \quad (18)$$

где в качестве предела суммирования используется не бесконечность, а некоторое конечное число членов разложения  $N$ .



**Рис. 4.** Распределение электрического потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  в области МГД взаимодействия при  $\varphi = \pi$ , рассчитанное, с использованием различного числа членов разложения  $N$  в уравнении (18) при значении параметров:  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 10$ ,  $E_z = 0$ ,  $\varphi_1 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_2 = 5\pi/4$ . Штрихпунктир отвечает значению  $N = 1$ , пунктир — значению  $N = 2$ , сплошная кривая — значению  $N = 5$ .



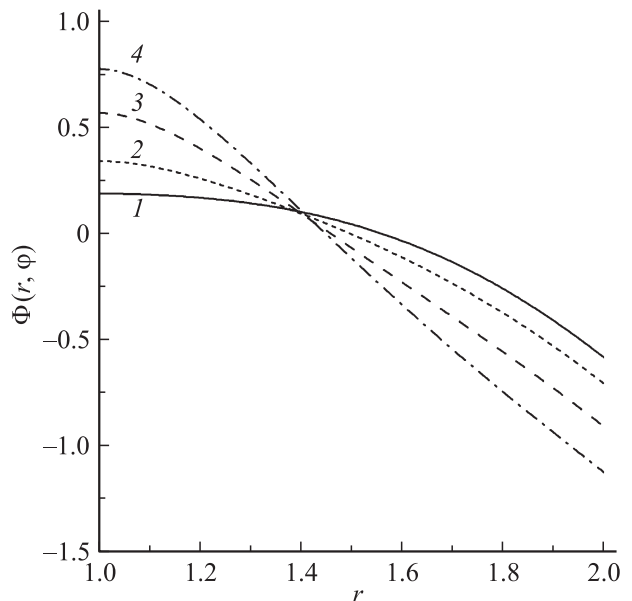
**Рис. 5.** Распределение электрического потенциала в области МГД взаимодействия при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 10$ ,  $\varphi_1 = \pi/4$ ,  $\varphi_2 = 7\pi/4$ . *a* —  $\Phi_b(r, \varphi)$ , *b* —  $\Phi(r, \varphi) = \Phi_a(r, \varphi) + \Phi_b(r, \varphi)$ .

Так как аналитическое решение уравнения (12) найти не удалось, то задача Штурма–Лиувилля решалась численно с использованием процедуры SLEIGN2 [23]. Первые 10 собственных значений  $\lambda_k$  для различных значений  $\beta_0$  и  $r_1$  приведены в таблице. Из приведенных результатов следует, что, при фиксированном значении  $k$ , увеличение как параметра Холла  $\beta_0$ , так и радиуса  $r_1$  приводит к уменьшению значений  $\lambda_k$ . Собственные функции  $R_k(r)$ , согласно рис. 2, характеризуются монотонным уменьшением амплитуды колебаний при удалении от поверхности цилиндра. Согласно рис. 3, при увеличении параметра Холла, положения экстрему-

мов собственных функций сдвигаются в направлении к поверхности цилиндра.

На рис. 4 представлено распределение потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  вдоль линии торможения, соответствующей значению  $\varphi = \pi$ . Потенциал рассчитан по формуле (18) при разном числе членов разложения  $N$ . С увеличением числа  $N$  результат расчета достаточно быстро сходится к точному решению. Для условий расчета, соответствующих рис. 4, распределение потенциала, отвечающее значению  $N = 5$ , практически не изменяется при дальнейшем увеличении параметра  $N$ . Необходимо отметить, что расчеты, проведенные при различных значениях параметров  $\beta_0$  и  $r_1$ , показали, что при увеличении как  $\beta_0$ , так и  $r_1$  требуется использовать большее число членов разложения  $N$ , чтобы результат расчета перестал зависеть от параметра  $N$ . Во всех последующих расчетах использовалось значение  $N = 50$ , гарантированно обеспечившее высокую точность расчета потенциала при всех рассмотренных параметрах.

На рис. 5 показано распределение потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  и  $\Phi(r, \varphi) = \Phi_a(r, \varphi) + \Phi_b(r, \varphi)$  для симметричной, относительно оси  $x$ , области МГД взаимодействия. Из рис. 5, *a* следует, что у потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  сгущение изолиний, отвечающее максимальным значениям напряженности электрического поля, наблюдается около границ  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ . Для потенциала  $\Phi(r, \varphi)$  (рис. 5, *b*), максимальное сгущение изолиний наблюдается вдоль линии торможения при  $\varphi = \pi$ . Распределение потенциала вдоль линии торможения для различных конфигураций области МГД взаимодействия, симметричных относительно оси  $x$ , показано на рис. 6. Из рис. 6 следует, что потенциал существенно зависит от конфи-



**Рис. 6.** Распределение электрического потенциала вдоль линии торможения, полученное для различных значений  $\varphi_1$ , при значении параметров:  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 10$ ,  $E_z = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$ : 1 —  $\varphi_1 = 0$ , 2 —  $\varphi_1 = \pi/4$ , 3 —  $\varphi_1 = \pi/2$ , 4 —  $\varphi_1 = 3\pi/4$ .

гурации области МГД взаимодействия. Увеличение угла  $\varphi_1$  (сужение области МГД взаимодействия) приводит к увеличению разницы потенциалов на границах области  $r = 1$  и  $r = r_1$ . Согласно (6), изменение распределения потенциала приведет к изменению распределения токов в области МГД взаимодействия. А это в свою очередь должно привести к изменению силы Лоренца, действующей на поток.

## 2. Расчет силы Лоренца в локально-ионизованном МГД течении в неоднородном магнитном поле

Сила Лоренца, действующая на МГД течение при заданном распределении магнитного поля, определяется токами, протекающими в области МГД взаимодействия, с использованием соотношения:  $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . Используя уравнения (6), (14), (18), получим выражения для плотностей тока  $j_r$  и  $j_\varphi$  в следующем виде:

$$j_\varphi = j_{\varphi,a} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} \left[ a_k \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) + b_k \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) \right] R_k(r),$$

$$j_r = j_{r,a} - \frac{r^2}{(r^2 + \beta_0^2)} \sum_{k=1}^N \left[ a_k \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) + b_k \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k}(\pi - \varphi)) \right] \frac{dR_k(r)}{dr}, \quad (19)$$

где  $j_{r,a}$ ,  $j_{\varphi,a}$  определены уравнениями (7). Выражение для плотности тока  $j_z$  через плотность тока  $j_r$  получим, используя уравнение (27) из [21], в следующем виде:

$$j_z = E_z + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \varphi = j_r \beta_0 \frac{1}{r}. \quad (20)$$

На рис. 7 показаны линии тока в области МГД взаимодействия для двух геометрий области МГД взаимодействия. Видно, что в обоих случаях токи в плоскости  $xu$  имеют вихревой характер. В области МГД взаимодействия существуют два вихревых тока, имеющие противоположные направления вращения. Граница раздела между вихрями для геометрии, симметричной относительно оси  $x$  (рис. 7, а), совпадает с осью  $x$ . При несимметричной области МГД взаимодействия (рис. 7, б) граница раздела между вихрями смещается в сторону меньшего вихря.

Магнитное поле в рассматриваемой задаче имеет только одну ненулевую компоненту  $B_\varphi$ , вследствие этого проекция силы Лоренца  $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  в плоскости  $xu$  имеет только радиальную компоненту, определяемую соотношением  $F_r = -j_z B_0$ . Учитывая (20), представим  $F_r$  в

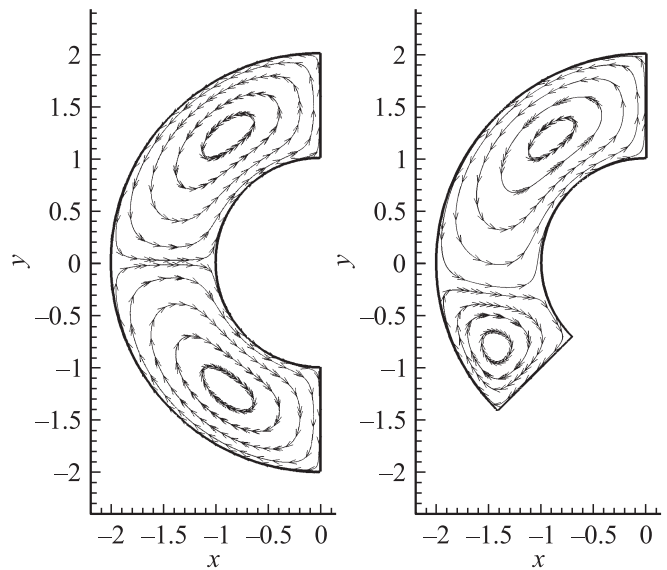


Рис. 7. Линии тока в области МГД взаимодействия при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 3$ ,  $\varphi_1 = \pi/2$ : а —  $\varphi_2 = 3\pi/2$ , б —  $\varphi_2 = 5\pi/4$ .

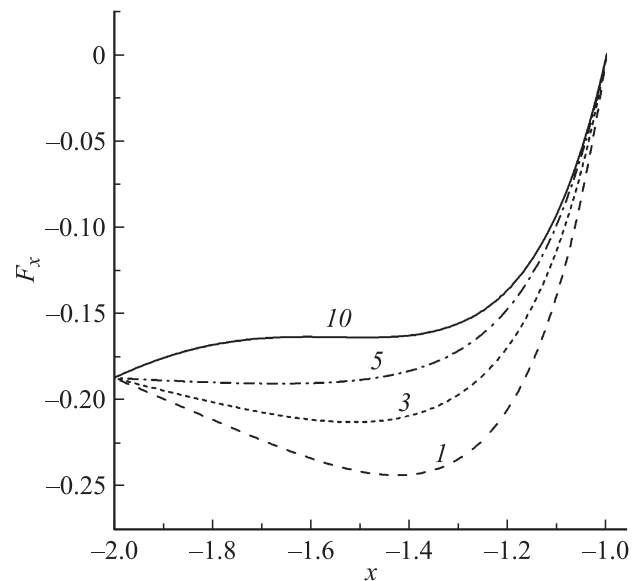
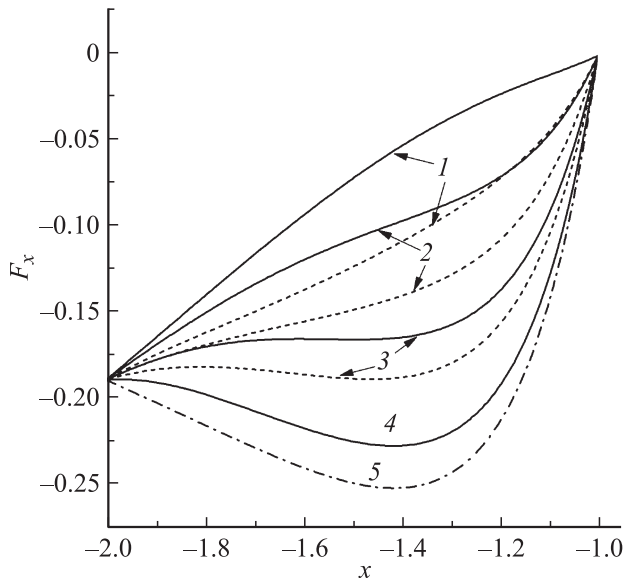


Рис. 8. Сила Лоренца, действующая вдоль линии торможения при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1 = 2$ ,  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/2$ . Значения  $\beta_0$  указаны у кривых.

следующем виде:

$$F_r = -\frac{E_z}{r} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \varphi + \frac{j_r \beta_0}{r^2}. \quad (21)$$

МГД управление потоком часто рассматривается как способ снижения теплового потока на поверхность за счет МГД торможения потока [9,15]. В этой связи наибольший интерес представляет исследование силы Лоренца вдоль линии торможения от внешней границы плазмы до критической точки, расположенной на



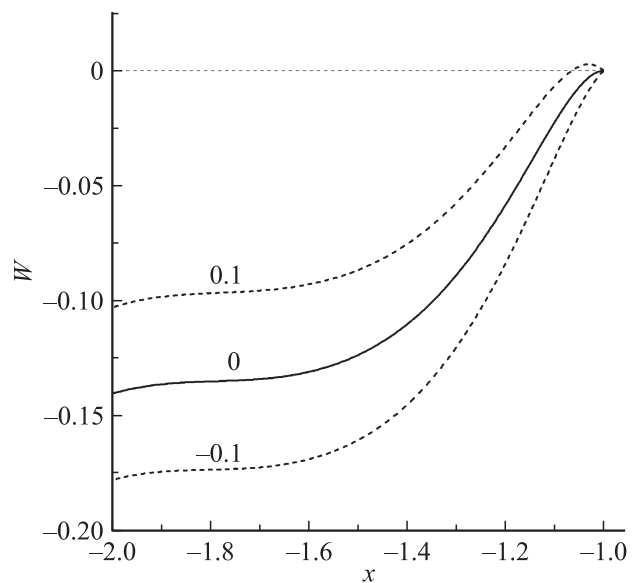
**Рис. 9.** Сила Лоренца, действующая вдоль линии торможения для различных значений  $\varphi_1$ , при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 10$ . Сплошные кривые отвечают симметричной области МГД взаимодействия с  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$ , штриховые —  $\varphi_2 = 5\pi/4$ : 1 —  $\varphi_1 = 0$ , 2 —  $\varphi_1 = \pi/4$ , 3 —  $\varphi_1 = \pi/2$ , 4 —  $\varphi_1 = 3\pi/4$ . Кривая 5 отвечает предельному значению силы Лоренца, рассчитанному в приближении  $j_r = 0$ .

передней части цилиндра. Проекция силы Лоренца в декартовой системе координат определяются следующим образом:  $F_x = F_r \cos \varphi$ ,  $F_y = F_r \sin \varphi$ . Вдоль линии торможения, соответствующей значению угла  $\varphi = \pi$ , имеем соответственно  $F_y = 0$  и  $F_x = -F_r$ . На рис. 8 приведена сила Лоренца  $F_x$  при различных значениях параметра Холла. Отрицательное значение  $F_x$  показывает, что сила Лоренца приводит к торможению набегающего на цилиндр потока. Согласно рис. 8, при увеличении параметра Холла эффект торможения потока в области МГД взаимодействия будет снижаться.

На рис. 9 приведена сила Лоренца при различных геометриях области МГД взаимодействия. Рассматриваются как симметричные (сплошные кривые), так и несимметричные (пунктир) относительно оси  $x$  области МГД взаимодействия. Штрихпунктирная кривая на рис. 9 соответствует силе Лоренца в случае  $j_r = 0$ . Эта кривая показывает предельное значение силы Лоренца, при котором будет достигаться максимальное торможение потока. Наличие минимума в зависимости предельной силы Лоренца от координаты обусловлено тем, что радиальная скорость потока уменьшается с приближением к поверхности цилиндра, а магнитное поле, наоборот, возрастает. Из рис. 9 следует, что уменьшение размаха области МГД взаимодействия по углу  $\varphi$  (увеличение  $\varphi_1$ ) приводит к ослаблению влияния параметра Холла  $\beta_0$  на величину силы Лоренца и приближает  $F_x$  к своему предельному значению. От-

метим, что сужение области МГД взаимодействия по радиусу (уменьшение  $r_1$ ), согласно работе [21], также приводит к уменьшению влияния параметра Холла на силу Лоренца. Отсюда следует, что для обеспечения эффективного МГД торможения потока вдоль линии торможения необходимо обеспечивать ионизацию потока не во всем объеме, а локально, в окрестности критической точки, расположенной на передней части цилиндра. Оптимальный выбор геометрии области МГД взаимодействия возможен при решении комплексной задачи, включающей в себя также моделирование проводимости потока.

Как следует из уравнения (21) дополнительным фактором, влияющим на силу Лоренца, является внешнее поле  $E_z$ . При этом, согласно (21), при  $E_z \neq 0$  сила Лоренца  $F_r$  на поверхности цилиндра ( $r = 1$ ) также будет иметь ненулевое значение. Но так как на поверхности цилиндра  $v_r = 0$ , то работа силы Лоренца на этой границе будет равна нулю. Поэтому сравнивая ситуации с различными значениями поля  $E_z$  целесообразно анализировать не силу Лоренца, а работу, которую данная сила совершает. Обозначим работу, совершаемую силой Лоренца в единицу времени в единице объема как  $W = F_r v_r$ . Из рис. 10 видно, что зависимость величины  $W$  от координаты  $x$  для трех значений  $E_z$ . На рис. 10, при  $E_z > 0$ , у поверхности цилиндра имеется узкий приповерхностный слой, где  $W > 0$ , и, следовательно, сила Лоренца приводит к ускорению потока в этом слое. При  $E_z \leq 0$  во всей области МГД воздействия и при  $E_z > 0$  на некотором удалении от поверхности цилиндра величина  $W < 0$ . В этом случае сила Лоренца приводит к торможению потока. Согласно рис. 10, наложение поля  $E_z < 0$ , позволяет привести к дополнительному МГД торможению потока вдоль линии торможения.



**Рис. 10.** Величина  $W$  вдоль линии торможения при значении параметров:  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 10$ ,  $\varphi_1 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_2 = 5\pi/4$ . Значения  $E_z$  указаны у кривых.

### 3. Приближенное аналитическое решение задачи нахождения собственных функций для построения потенциала $\Phi_b(r, \varphi)$

Анализ уравнения (12) для нахождения функции  $R_k(r)$  показывает, что при больших значениях параметра Холла или при малых толщинах области МГД взаимодействия  $r_1 - 1$  можно получить приближенное решение данного уравнения. Нетрудно заметить, что при выполнении указанных условий в знаменателе левой части уравнения (12) вместо выражения  $r^2 + \beta_0^2$  можно приближенно использовать  $1 + \beta_0^2$ . В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{dR_k^{\text{appr}}(r)}{dr} \right) + (1 + \beta_0^2)\lambda_k \frac{1}{r} R_k^{\text{appr}}(r) = 0. \quad (22)$$

Верхний индекс „appr“ в обозначении функции  $R_k^{\text{appr}}(r)$  акцентирует внимание на том, что это решение является решением приближенного уравнения. С использованием результатов [24], решение уравнения (22) может быть представлено в следующем виде:

$$R_k^{\text{appr}}(r) = \left[ C_3 J_1(\sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k}/r) + C_4 Y_1(\sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k}/r) \right] / r, \quad (23)$$

где  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя первого рода,  $Y_\nu(x)$  — функция Бесселя второго рода.

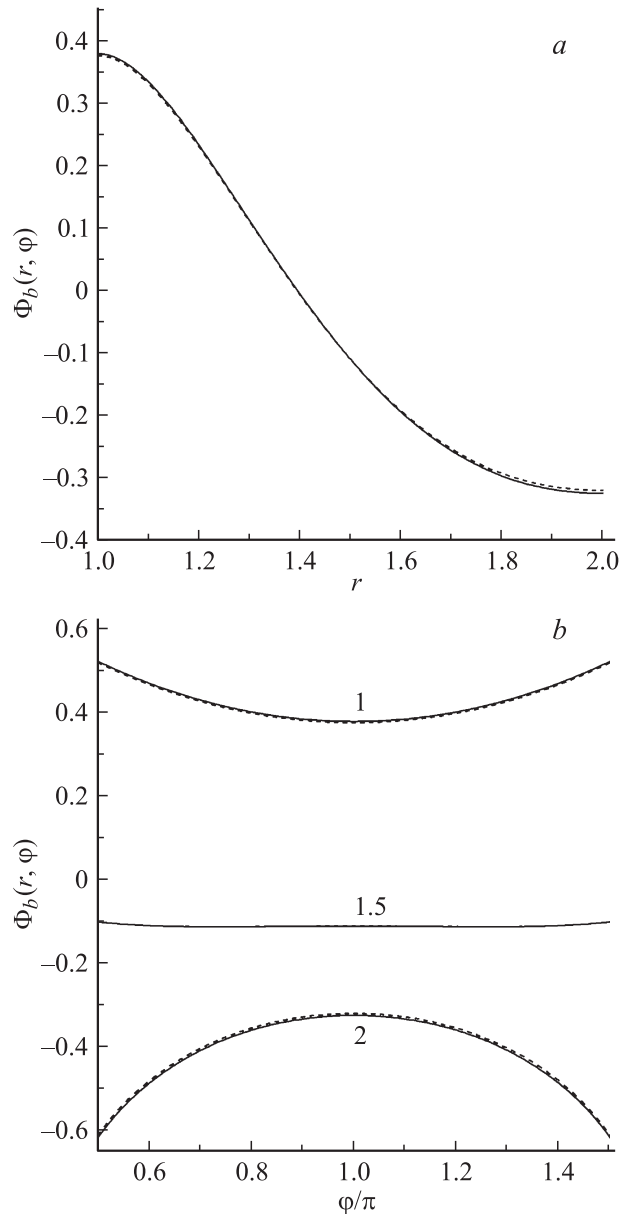
Неопределенную константу  $C_3$  в (23) определим из граничного условия (11) при  $r = 1$ . В результате получим

$$R_k^{\text{appr}}(r) = \frac{C_4}{r} \left[ Y_1 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k}/r \right) - J_1 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k}/r \right) \frac{Y_0 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k} \right)}{J_0 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k} \right)} \right]. \quad (24)$$

Константа  $C_4$  в уравнении (24) определяется из условия нормировки собственных функций  $\int_1^{r_1} \frac{1}{r} (R_k^{\text{appr}}(r))^2 dr = 1$ .

Собственные значения  $\lambda_k$  определяются с использованием граничного условия (11) при  $r = r_1$ . Подставив (24) в (11), с помощью несложных преобразований получим следующее уравнение для нахождения собственных значений  $\lambda_k$ :

$$J_0 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k}/r_1 \right) Y_0 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k} \right) - J_0 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k} \right) Y_0 \left( \sqrt{(1 + \beta_0^2)\lambda_k}/r_1 \right) = 0. \quad (25)$$



**Рис. 11.** Распределение электрического потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  в различных сечениях области МГД взаимодействия при значениях параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 10$ ,  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/2$ . Приближенному решению соответствуют штриховые кривые, точному решению — сплошные кривые:  $a$  — радиальная зависимость при  $\varphi = \pi$ ,  $b$  — угловые зависимости при различных значениях  $r$ , указанных у кривых.

Нетрудно заметить, что для нахождения собственных значений  $\lambda_k$  из решения уравнения (25) достаточно определить нули функции  $f(\alpha) = J_0(\alpha/r_1)Y_0(\alpha) - J_0(\alpha)Y_0(\alpha/r_1)$ , зависящие только от  $r_1$ . Затем для произвольного значения параметра Холла получим  $\lambda_k = \alpha_k^2/(1 + \beta_0^2)$ . Согласно [25], нули  $\alpha_k$  функции  $f(\alpha)$  являются действительными и простыми. Таким образом, нахождение  $\alpha_k$  является элементарной задачей. Необходимо отметить, что собственные значения  $\lambda_k$ , отвечаю-



щие функции  $R_k^{\text{appr}}(r)$ , отличаются от собственных значений, отвечающих решению уравнения (12). В частности, при  $r_1 = 2$  и  $\beta_0 = 10$  десятым корнем уравнения (25) является  $\lambda_{10} = 39.083$ , что примерно на 1% отличается от соответствующего значения  $\lambda_{10} = 38.701$  из таблицы. При  $r_1 = 1.2$  и  $\beta_0 = 10$  из решения уравнения (25) мы получим  $\lambda_{10} = 351.78$ , что больше соответствующего значения  $\lambda_{10} = 351.09$  из таблицы примерно на 0.2%. При  $\beta_0 = 20$  и  $r_1 = 2$  величина  $\lambda_{10}$  для приближенного и точного решений отличается примерно на 0.2%. Таким образом, можно заключить, что при увеличении параметра  $\beta_0$  и при уменьшении  $r_1$  отличие собственных значений для приближенного и точного решений уменьшается.

На рис. 11 проводится сравнение приближенного аналитического решения для потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  с точным решением в различных сечениях области МГД взаимодействия. Для аналитического расчета потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  используется выражение (18), в которое вместо  $R_k(r)$  подставляется  $R_k^{\text{appr}}(r)$ . На рис. 11, *a* приведены зависимости  $\Phi_b(r, \varphi)$  от радиуса вдоль линии торможения ( $\varphi = \pi$ ). На рис. 11, *b* — потенциал от угла  $\varphi$  при различных значениях радиуса  $r$ . Согласно рис. 11, точное и приближенное решения для потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  для рассматриваемых условий отличается незначительно. Расчеты, проведенные с использованием различных значений  $\beta_0$  и  $r_1$  показали, что для  $r_1 = 2$  приближенное и точное решения практически совпадают при  $\beta_0 \geq 15$ . В случае  $r_1 = 1.5$  приближенное и точное решения практически совпадают при  $\beta_0 \geq 10$ . Для  $r_1 = 1.2$  расчет потенциала  $\Phi_b(r, \varphi)$  можно осуществлять, используя приближенное аналитическое решение при  $\beta_0 \geq 7$ .

В диапазоне изменения параметров  $\beta_0$  и  $r_1$ , при которых аналитическое решение позволяет с высокой точностью рассчитывать потенциал  $\Phi_b(r, \varphi)$ , мы можем использовать аналитическое решение для расчета силы Лоренца, действующей на поток в области МГД взаимодействия. В этом случае сила Лоренца рассчитывается по формуле (21), в которой плотность тока рассчитывается по формуле (19). При этом в выражение (19) вместо  $dR_k(r)/dr$  подставляется  $dR_k^{\text{appr}}(r)/dr$ , где  $R_k^{\text{appr}}(r)$  определяется формулой (24).

## Заключение

Получено решение уравнения для электрического потенциала в локально ионизованном МГД течении для различных конфигураций области ионизации при поперечном обтекании кругового цилиндра в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником. Проанализировано влияние параметра Холла и конфигурации области МГД взаимодействия на электрический потенциал и силу Лоренца. Показано, что уменьшение размаха области МГД взаимодействия по углу  $\varphi$  приводит к ослаблению влияния параметра

Холла на величину силы Лоренца, которая при этом стремится к предельно достижимому значению, отвечающему условию  $j_r = 0$ . Показано, что наложение поля  $E_z < 0$  позволяет привести к дополнительному МГД торможению потока вдоль линии торможения.

Получено приближенное аналитическое решение для нахождения собственных функций используемых при расчете потенциала и силы Лоренца. Для ряда значений  $r_1$  приведены ограничения на параметр  $\beta_0$ , при котором использование приближенного аналитического решения позволяет практически точно рассчитывать потенциал, а следовательно, и силу Лоренца в области МГД взаимодействия.

## Список литературы

- [1] Фрайштатт В.Л., Куранов А.Л., Шейкин Е.Г. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 43–47.
- [2] Kopchenov V.I., Vatazhin A.B., Gouskov O.V. // AIAA Paper 99-4971. 9<sup>th</sup> International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference. Norfolk, 1999.
- [3] Головачев Ю.П., Суцух С.Ю. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 2. С. 28–33.
- [4] Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B. // AIAA Paper 2001-0492. 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2001.
- [5] Bityurin V., Bocharov A., Baranov D., Leonov S. // AIAA Paper 2002-0492. 40<sup>th</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2002.
- [6] Kuranov A.L., Sheikin E.G. // J. Spacecraft and Rockets. 2003. Vol. 40. N 2. P. 174–182.
- [7] Gaitonde D. // AIAA Paper 2003-0172. 41<sup>st</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2003.
- [8] Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B. // AIAA Paper 2003-3763. 34<sup>th</sup> AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference. Orlando, 2003.
- [9] Lineberry J.T., Bityurin V.A., Bocharov A.N., Baranov D.S., Vatazhin A.B., Kopchenov V.I., Gouskov O.B., Alferov V.I., Boushmin A.S. // 3<sup>rd</sup> Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics in Aerospace Applications. Moscow, April 24–26, 2001. P. 15–25.
- [10] Taylor T., Riggins D.W. // AIAA Paper 2004-0859. 42<sup>nd</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2004.
- [11] Васильева П.В., Ерофеев А.В., Лапушкина Т.А., Поляев С.А., Бобашев С.В., Ванви Д. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 27–33.
- [12] Sheikin E.G., Kuranov A.L. // AIAA Paper 2005-3223. AIAA/CIRA 13<sup>th</sup> International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference. Capua, 2005.
- [13] Adamovich I., Nishihara M. // AIAA Paper 2006-1004. 44<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2006.
- [14] Biturin V., Bocharov A., Baranov D. // AIAA Paper 2006-1008. 44<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2006.
- [15] Битюрин В.А., Бочаров А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 188–203.
- [16] Sheikin E.G. // AIAA Paper 2007-1379. 45<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, 2007.

- [17] *Шейкин Е.Г.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 5. С. 1–9.
- [18] *Sheikin E.G.* // J. Phys.D: Appl. Phys. 2009. Vol. 42. P. 035 201.
- [19] *Sheikin E.G.* // AIAA Paper 2010-0832. 48<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Orlando, 2010.
- [20] *Sheikin E.G.* // AIAA Paper 2012-1028. 50<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Nashville, 2012.
- [21] *Шейкин Е.Г., Yang C.W.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 54–63.
- [22] *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of mathematics for engineers and scientists. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2007.
- [23] *Bailey P.B., Everitt W.N., Zettl A.* // ACM Trans. Math. Software. 2001. Vol. 27. N 2. P. 143–192.
- [24] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [25] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.