

## Возбуждение цилиндрического резонатора током спирали и осевым током электронного пучка

© М.В. Давидович, Н.А. Бушуев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
ФГУП НПП „Алмаз“,  
410031 Саратов, Россия  
E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 10 сентября 2012 г.)

В явном виде получены формулы возбуждения цилиндрического резонатора в формах Л.А. Вайнштейна и Г.Т. Маркова с идеально проводящими стенками, а также с импедансными торцами. Рассмотрено возбуждение цилиндрического резонатора и цилиндрического волновода заданным неоднородным осевым током электронного пучка и спиральным током переменного шага, возбуждаемым сосредоточенным источником напряжения и нагруженным на заданную точечную согласованную нагрузку. Для тока на спирали сформулировано интегродифференциальное уравнение. В приближении заданного тока пучка произведено моделирование ЛБВ с учетом неравномерной намотки спирали, неоднородного электронного пучка и потерь.

### Введение

Теория возбуждения экранированных резонаторов в отличие от открытых резонаторов [1–3] является достаточно развитой и кажется завершенной. Однако и здесь, как будет видно далее, есть ряд весьма тонких моментов. Имеется ряд способов построения окончательных соотношений, например [4–12], которые отличаются по внешнему виду, имеют разную сходимость, но, естественно, в принципе эквивалентны. Аналогичные вопросы по различным формам возбуждения волноводов (включая и периодические волноводы) рассмотрены в работе [13]. Как будет показано (см. также [7–12]), строгая теория возбуждения реальных резонаторов с диссипацией или активными средами должна строиться на решении интегродифференциальных уравнений (ИДУ). Практическое применение теории возбуждения резонаторов, например, при проектировании электронных приборов, встречается не часто, причем обычно используют серьезные приближения: ограничиваются одной модой, квазистатическим полем или его частью и т.п. Это связано с громоздкими формами соответствующих соотношений и трудностью численного моделирования на строгой основе.

Цель данной работы — рассмотреть явные строгие виды формул возбуждения цилиндрического резонатора применительно для его возбуждения осевым и спиральным токами. Указанная задача прямо соответствует моделированию спиральной лампы бегущей волны (ЛБВ) заданным током пучка, т.е. в линейном приближении без учета уравнений движения. Обычно при моделировании ЛБВ рассматривают бесконечные замедляющие системы (ЗС), определяют дисперсию и сопротивление связи. Однако знание дисперсии периодической спиральной ЗС [14] не позволяет точно моделировать спиральные ЛБВ. Во-первых, спираль является конечной (т.е. квазипериодической) и находится в экране — цилиндри-

ческом резонаторе (ЦР). Во-вторых, есть окна ввода и вывода энергии, диэлектрические держатели спирали и другие неоднородности, часто имеются ферритовые и иные поглощающие включения. Активный электронный поток и диссипация также нарушают периодичность. Для повышения КПД обычно спираль делают с непериодической намоткой, т.е. опять периодичность не имеет места. Естественно, для такой задачи следует использовать теорию возбуждения резонатора, а не ЗС. ЦР часто используют для других целей, например, в качестве реакторов для плазменного магнетронного напыления. Поэтому явный вид соотношений, приведенных в работе, может оказаться полезным и для других применений. В первой части работы выписаны формулы возбуждения в форме Л.А. Вайнштейна [4,5] и в форме Г.Т. Маркова [6]. Обсуждены их отличия в части моделирования ЦР применительно к спиральной ЛБВ. Приведена модификация формул Маркова для импедансных торцов. Далее расчеты основаны на соотношениях из работы [6]. Во второй части сформулирована задача о возбуждении ЦР заданным линейным осевым током и спиральным током постоянного и переменного шага. В третьей части получено ИДУ для тока на спирали и построена модель ЛБВ. В модели считаем, что на входе к спирали подсоединен согласованный сосредоточенный эквивалентный генератор, с внутренним сопротивлением, соответствующим питающей коаксиальной линии (КЛ). На выходе спирали имеется сосредоточенная нагрузка, моделирующая коаксиальный выход. Сначала рассматриваем ЦР с идеально проводящей поверхностью. Далее диссипация вводится добавлением мнимых частей в постоянные распространения цилиндрического волновода (ЦВ). Задача о возбуждении формулируется на основе приведенных в первой части формул в виде ИДУ для тока спирали. В четвертой части приведены численные результаты моделирования. Работа является развитием публикаций [11–13].

## 1. Формулы возбуждения ЦР

Рассмотрим ЦР радиуса  $R$  и длины  $d$ , центр одного из торцов которого находится в точке  $\rho = 0, z = 0$ . Будем сначала считать резонатор полым, возбуждаемым сторонними токами (электрическим  $\mathbf{J}^e$  и магнитным  $\mathbf{J}^m$ ) и имеющим идеально проводящие стенки. Это позволит далее учесть, в частности, диэлектрические и магнитные (например, ферритовые) вставки как вторичные источники — токи поляризации  $\mathbf{J}_p^e = j\omega\epsilon_0(\hat{\epsilon} - \hat{I})\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}_p^m = j\omega\mu_0(\hat{\mu} - \hat{I})\mathbf{H}$ . В общем случае мы описываем проницаемости тензорами (тогда  $\hat{I}$  — единичный тензор). Теорию возбуждения ЦР можно строить несколькими путями, разлагая возбуждаемые распределенными сторонними токами поля по стоячим волнам цилиндрического волновода, по модам радиального волновода [6], а также по модам цилиндрического резонатора [3,4]. При этом можно представить результат в релятивистски ковариантном виде, используя калибровку Лоренца или явно выделяя квазистатическую часть поля, используя кулоновскую калибровку [8,10,13].

Задача о возбуждении структуры, описываемой линейным самосопряженным (эрмитовым) оператором, как известно, записывается в виде  $(\hat{L} - \lambda\hat{I})u = f$ , при этом  $\langle w, \hat{L}u \rangle = \langle \hat{L}^+w, u \rangle$  (скобки Дирака означают внутреннее или скалярное произведение), а при эрмитовости операторов имеем  $\hat{L}^+ = \hat{L}$ . Если задача самосопряженная, т.е. оператор эрмитов и граничные условия тоже самосопряженные, то структура консервативна — ее энергия сохраняется. Последнее означает, что операторы существенных граничных условий тоже эрмитовые, т.е. нет обмена энергией с внешней средой через границу, а также и нет диссипации внутри. Тогда существует полная счетная система ортонормированных функций и действительных возрастающих собственных значений  $\hat{L}u_n = \lambda_n u_n$ , а решение можно искать в виде резольвенты  $\hat{R} = (\hat{L} - \lambda\hat{I})^{-1}$  или функции Грина (ФГ) [15]:

$$u = \hat{R}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n, f \rangle u_n}{\lambda - \lambda_n} = \langle G, f \rangle, \quad (1)$$

где ФГ имеет представление [15]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\mathbf{r})u_n^*(\mathbf{r}')}{\lambda - \lambda_n}. \quad (2)$$

Именно такой подход в электродинамике известен как теория возбуждения резонаторов Л.А. Вайнштейна. Соответственно операторное уравнение здесь уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}^e, \quad -\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu_0\mathbf{H} + \mathbf{J}^m. \quad (3)$$

Сам оператор в этом случае известен как матричный оператор Максвелла [16], а под функцией следует понимать набор из полей  $u = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ . Поток мощности через идеально проводящую оболочку отсутствует, а

внутри резонатора энергия сохраняется. Далее можно ввести в его объем диэлектрические и магнитные вставки и моделировать их соответствующими объемными распределениями токов поляризации (вторичными источниками), рассматриваемыми как дополнительное возбуждение. Если рассматривать заполненный средой ЦР (как в формулах Вайнштейна [5]) и учесть дисперсию, сразу имеет место диссипация, и задача становится несамосопряженной. В этом случае спектр используемых функций ЦР неполный, их ортогональность нарушается и разложение (1) уже приближенное. В общем случае собственные значения  $\lambda_n$  становятся комплексными (в формулах Вайнштейна им соответствуют комплексные резонансные частоты), причем возможно наличие непрерывного спектра, а набор квазисобственных функций тогда неполный. Применять формулы можно, считая диссипацию слабой. Мы будем использовать полный набор собственных функций пустого резонатора. При этом теория возбуждения в форме (1) при наличии магнитодиэлектрических включений сводится при отсутствии дисперсии к интегральным уравнениям (ИУ) в общем случае и при нестационарном возбуждении к ИДУ [8]. Далее рассматриваются только стационарные процессы с зависимостью  $\exp j\omega t$ .

Согласно теореме Гельмгольца, векторные поля запишем в виде соленоидальных и потенциальных подсистем

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{E}_k - \nabla\Phi^e, \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathbf{H}_k - \nabla\Phi^m. \quad (5)$$

Формально здесь введен и магнитный скалярный потенциал. Собственные векторы в (4) и (5) удовлетворяют однородной системе уравнений Максвелла (3), при этом  $\nabla\Phi^e = \nabla^2\Phi^e = \rho^e/\epsilon_0$ ,  $\nabla^2\Phi^m = \rho^m/\mu_0$ . Здесь  $\rho^e$  характеризует полную плотность свободных и связанных зарядов, а  $\rho^m$  — только связанных фиктивных магнитных зарядов. Так, если внутри ЦР присутствует изотропный неоднородный магнетик, то ток его поляризации (намагниченности) есть  $\mathbf{J}_m^p = j\omega\mu_0(\mu - 1)\mathbf{H}$ . Он также возбуждает полый ЦР. В силу отсутствия магнитных зарядов имеем  $\nabla(\mu\mathbf{H}) = \mu\nabla\mathbf{H} + \mathbf{H}\nabla\mu = 0$ , откуда  $\nabla\mathbf{J}_m^p = -j\omega\mu_0\mathbf{H}\nabla\mu/\mu$ , поэтому  $\rho^m = \mu_0\mathbf{H}\nabla\mu/\mu$ . На границах раздела диэлектрических и магнитных тел присутствуют соответствующие связанные заряды.

Собственные векторы в (4), (5) будем нормировать следующим образом (можно использовать различные нормировки):

$$\epsilon_0 \int_V \mathbf{E}_k \mathbf{E}_n^* dV = \mu_0 \int_V \mathbf{H}_k \mathbf{H}_n^* dV = \delta_{kn} W_k, \quad (6)$$

где  $2W_k$  — энергия колебания с номером  $k$ . Коэффициенты разложений (4), (5) определяются известными

формулами Вайнштейна:

$$a_n = \frac{j[\omega \langle \mathbf{E}_k^*, \mathbf{J}^e \rangle + \omega_k \langle \mathbf{H}_k^*, \mathbf{J}^m \rangle]}{(\omega^2 - \omega_k^2)W_k},$$

$$b_n = \frac{j[\omega_k \langle \mathbf{E}_k^*, \mathbf{J}^e \rangle + \omega \langle \mathbf{H}_k^*, \mathbf{J}^m \rangle]}{(\omega^2 - \omega_k^2)W_k}. \quad (7)$$

Здесь скобками Дирака обозначены интегралы в (6), а  $k$  представляет собой мультииндекс, характеризующий моду. Кроме этого, для получения полей необходимо решить два уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi^e = -\frac{\rho^e}{\varepsilon_0} = \frac{\nabla \mathbf{J}^e}{j\omega\varepsilon_0},$$

$$\nabla^2 \Phi^m = -\frac{\rho^m}{\mu_0} = \frac{j\nabla \mathbf{J}^m}{j\omega\mu_0}. \quad (8)$$

Наличие этих уравнений, связанное с потенциальной частью полей, приводит к формулировке уравнений возбуждения, не имеющей явный релятивистски ковариантный вид, и соответствует кулоновской калибровке  $\nabla \mathbf{A}^{(e,m)} = 0$ . Для нерелятивистской ЛБВ удобнее использовать эту калибровку, а не лоренцеву. Соленоидальные части полей и вектор-потенциал удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, например,

$$(\nabla^2 + k_0^2)\mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{J}^e - \nabla \times \mathbf{J}^m,$$

$$(\nabla^2 + k_0^2)\mathbf{H} = -j\omega\varepsilon_0\mathbf{J}^m + \nabla \times \mathbf{J}^e. \quad (9)$$

В калибровке Лоренца имеем также уравнения Гельмгольца и для потенциалов

$$(\nabla^2 + k_0^2)\mathbf{A}^{(e,m)} = -\mathbf{J}^{(e,m)},$$

$$(\nabla^2 + k_0^2)\Phi^{(e,m)} = -\rho^{(e,m)}/(\varepsilon_0, \mu_0). \quad (10)$$

Если известны ФГ этих уравнений, решение задачи о возбуждении строится тогда стандартно. Например,

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{A}^e + \frac{\nabla \otimes \nabla \mathbf{A}^e}{j\omega\varepsilon_0} - \nabla \times \mathbf{A}^m, \quad (11)$$

где  $\nabla \otimes \nabla \mathbf{A}^e = \text{grad}(\text{div})\mathbf{A}^e = -j\omega\varepsilon_0\nabla\Phi^e$ , при этом

$$\mathbf{A}^{(e,m)}(\mathbf{r}) = (\hat{G}^{(e,m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}^{(e,m)}(\mathbf{r}')),$$

$$\Phi^e(\mathbf{r}) = (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \rho^e)/\varepsilon_0,$$

$$\Phi^m(\mathbf{r}) = (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \rho^m)/\mu_0. \quad (12)$$

Здесь круглые скобки означают объемное интегрирование по штрихованным координатам (точке источника) уже без взятия сопряжения. В (12) введены две тензорные ФГ и одна скалярная. Это связано с тем, что векторы-потенциалы удовлетворяют разным граничным условиям на граничных поверхностях ЦР. Соответственно решение задачи будет различаться в зависимости от того, каким точечным диполем тока (электрическим или магнитным) возбуждается ЦР

и как этот ток направлен [6]. Для скалярной ФГ  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  будем предполагать, что потенциал равен нулю на поверхности ЦР. В принципе для нахождения полей достаточно знания двух тензорных ФГ и использования формул типа (11). Это приводит к выражению полей только через токи, которое формально можно представить с помощью четырех тензорных ФГ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\hat{\Gamma}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}^e(\mathbf{r}')) + (\hat{\Gamma}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}^m(\mathbf{r}')),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (\hat{\Gamma}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}^e(\mathbf{r}')) + (\hat{\Gamma}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}^m(\mathbf{r}')). \quad (13)$$

Получить компоненты этих ФГ можно, решив шесть граничных задач о возбуждении ЦР электрическими и магнитными точечными диполями, направленными вдоль единичных координатных векторов  $\rho_0, \varphi_0, z_0$ . Это весьма громоздкая процедура построения ФГ.

Заметим, что потенциальная часть поля бесконечно кратно вырождена, т.е. для нулевой частоты имеет место бесконечное число собственных функций однородного уравнения (8) (оператора Лапласа) [16]. В кулоновской калибровке в уравнениях для векторов-потенциалов следует оставлять только соленоидальные части токов.

Воспользуемся разложением полей по собственным функциям  $E_{nm\ell}$  и  $H_{nm\ell}$  мод ЦР. Это соответствует возбуждению только осевыми диполями, что упрощает задачу. Тогда

$$E_{ez}^{(nkl)} = \exp(-jn\varphi)J_n(\kappa_{nk}\rho) \cos(\gamma_{nkl}^e z),$$

$$H_{mz}^{(nkl)} = \exp(-jn\varphi)J_n(\chi_{nk}\rho) \sin(\gamma_{nkl}^m z). \quad (14)$$

Здесь  $J_n(\kappa_{nk}R) = 0, J'_n(\chi_{nk}R) = 0$ , введены собственные частоты

$$\omega_{nml}^e = c\sqrt{(\kappa_{nm}/R)^2 + (l\pi/d)^2},$$

$$\omega_{nml}^m = c\sqrt{(\chi_{nm}/R)^2 + (l\pi/d)^2}$$

и продольные волновые числа

$$\gamma_{nm}^e = \sqrt{k_{nml}^2 - (\kappa_{nm}/R)^2} = l\pi/d,$$

$$\gamma_{nkl}^m = \sqrt{k_{nml}^2 - (\chi_{nk}/R)^2} = l\pi/d.$$

Поэтому продольные компоненты полей удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхности ЦР. Остальные компоненты электрических мод имеют вид

$$E_{e\rho}^{(nkl)} = \frac{-\gamma_{nkl}^e}{\kappa_{nk}} \exp(-jn\varphi)J'_n(\kappa_{nk}\rho) \sin(\gamma_{nkl}^e z),$$

$$E_{e\varphi}^{(nkl)} = \frac{-jn\gamma_{nkl}^e}{\kappa_{nk}^2\rho} \exp(-jn\varphi)J_n(\kappa_{nk}\rho) \sin(\gamma_{nkl}^e z),$$

$$H_{e\rho}^{(nkl)} = \frac{n\omega\varepsilon_0}{\kappa_{nk}^2\rho} \exp(-jn\varphi)J_n(\kappa_{nk}\rho) \cos(\gamma_{nkl}^e z),$$

$$H_{e\varphi}^{(nkl)} = \frac{-j\omega\varepsilon_0}{\kappa_{nk}\rho} \exp(-jn\varphi)J'_n(\kappa_{nk}\rho) \cos(\gamma_{nkl}^e z). \quad (15)$$

Для поперечных компонент магнитных мод получим

$$\begin{aligned} E_{m\rho}^{(nkl)} &= \frac{-n\omega\mu_0}{\chi_{nk}^2\rho} \exp(-jn\varphi) J_n(\chi_{nk}\rho) \sin(\gamma_{nkl}^m z), \\ E_{m\varphi}^{(nkl)} &= \frac{-j\omega\mu_0}{\chi_{nk}} \exp(-jn\varphi) J'_n(\chi_{nk}\rho) \sin(\gamma_{nkl}^m z), \\ H_{m\rho}^{(nkl)} &= \frac{l\gamma_{nkl}^m}{\chi_{nk}} \exp(-jn\varphi) J'_n(\chi_{nk}\rho) \cos(\gamma_{nkl}^m z), \\ H_{m\varphi}^{(nkl)} &= \frac{-jn\gamma_{nkl}^m}{\rho\chi_{nk}^2} \exp(-jn\varphi) J_n(\chi_{nk}\rho) \cos(\gamma_{nkl}^m z). \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим нормы колебаний. Для продольных компонент интегралы известны:

$$\begin{aligned} \|E_{ez}^{(nkl)}\|^2 &= \pi \left( d + \frac{\sin(2\gamma_{nkl}^e d)}{2\gamma_{nkl}^e} \right) \\ &\times \frac{R^2}{2} [-J_{n-1}(\kappa_{nk}R) J_{n+1}(\kappa_{nk}R)] = \frac{\pi d R^2}{2} J_m'^2(\kappa_{nk}R), \end{aligned}$$

$$\|H_{mz}^{(nkl)}\|^2 = \frac{\pi d R^2}{2} \left( 1 - \frac{n^2}{\chi_{kn}^2 R^2} \right) J_n^2(\chi_{nk}R).$$

Для части поперечных компонент также получаем явные выражения. Затруднения возникают для четырех компонент, у которых  $\rho$  входит в знаменатель, например,

$$\|E_{m\rho}^{(nkl)}\|^2 = \frac{(n\omega\mu_0)^2}{\chi_{nk}^4} \pi d \int_0^R \frac{J_n^2(\chi_{nk}\rho)}{\rho} d\rho.$$

Соответствующие интегралы можно вычислить численно или через производные функций Бесселя по индексу. Мы используем другой подход. Пусть известны скалярные собственные функции двумерного уравнения Гельмгольца (мембранные функции), ортонормированные в двумерной области и удовлетворяющие на ее контуре нулевым граничным условиям или с нулевыми граничными условиями для нормальных производных на нем. В нашем случае это поля

$$\psi_e^{(nk)} = \exp(-jn\varphi) J_n(\kappa_{nk}\rho) / w_e^{(nk)}, \quad w_e^{(nk)} = \pi R^2 J_m'^2(\kappa_{nk}R),$$

$$\begin{aligned} \psi_m^{(nk)} &= \exp(-jn\varphi) J_n(\chi_{nk}\rho) / w_m^{(nk)}, \\ w_m^{(nk)} &= \pi R^2 \left( 1 - \frac{n^2}{\chi_{kn}^2 R^2} \right) J_n^2(\chi_{nk}R). \end{aligned}$$

Тогда векторные мембранные функции

$$\mathbf{e}_e^{(nk)} = \nabla \times \mathbf{z}_0 \psi_e^{(nk)} / \sqrt{\kappa_{nk}}, \quad \mathbf{h}_m^{(nk)} = \nabla \times \mathbf{z}_0 \psi_m^{(nk)} / \sqrt{\kappa_{nk}}$$

тоже взаимно ортогональны и ортогональны между собой, например,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{e}_e^{(nk)}(\rho, \varphi) \mathbf{e}_e^{(n'k')}(\rho, \varphi) dS &= \kappa_{nk}^{-2} \int_S \nabla_{\perp} \psi_e^{(nk)}(\rho, \varphi) \\ &\times \nabla_{\perp} \psi_e^{(n'k')}(\rho, \varphi) dS = -\kappa_{nk}^2 \int_S \psi_e^{(nk)}(\rho, \varphi) \nabla_{\perp}^2 \\ &\times \psi_e^{(n'k')}(\rho, \varphi) dS = \int_S \psi_e^{(nk)}(\rho, \varphi) \psi_e^{(n'k')}(\rho, \varphi) dS = \delta_{nn'} \delta_{kk'}. \end{aligned}$$

Для доказательства использована теорема Грина. В результате получим нормы  $W_{nk}^e = \varepsilon_0 w_e^{(nk)} d$ ,  $W_{nk}^m = \mu_0 w_m^{(nk)} d$ .

Рассмотрим вопрос о решении уравнений (8). Фактически надо найти скалярную ФГ уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями. Будем искать потенциал в виде разложений [17]

$$\Phi^{(e,m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} f_{njl}^{(e,m)} \exp(-jn\varphi) J_n(\kappa_{nk}\rho) \sin(l\pi z/d).$$

Тогда, например,

$$f_{njl}^e = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{\rho^e(\rho, \varphi, z) \exp(jn\varphi) J_n(\kappa_{nk}\rho) \sin(l\pi z/d) \rho d\rho d\varphi dz}{\varepsilon_0 \pi R^2 d [\kappa_{nk}^2 + (l\pi/d)^2] J_n^2(\kappa_{nk}R)/2}$$

и потенциальная часть поля от электрических зарядов есть

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \frac{\nabla}{\varepsilon_0} \int_V G(\rho, \varphi, z | \rho', \varphi', z') \rho^e(\rho', \varphi', z') d^3 r' \\ &= \frac{\nabla}{j\omega\varepsilon_0} \int_V G(\rho, \varphi, z | \rho', \varphi', z') \nabla' \mathbf{J}^e(\rho', \varphi', z') d^3 r'. \end{aligned}$$

Здесь  $d^3 r' = \rho' d\rho' d\varphi' dz'$  — элемент объема и введена скалярная ФГ уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} G(\rho, \varphi, z | \rho', \varphi', z') &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(-jn(\varphi-\varphi')) J_n(\kappa_{nk}\rho) J_n(\kappa_{nk}\rho') \sin(l\pi z/d) \sin(l\pi z'/d)}{\pi R^2 d [\kappa_{nk}^2 + (l\pi/d)^2] J_n^2(\kappa_{nk}R)/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, поля представимы в форме интегралов с функциями Грина, но соответствующие им операторы интегрирования дифференциальные. Приведем явный вид тензорных ФГ для электрического поля (для магнитного соотношения аналогичные):

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=e,m} \frac{j\omega \mathbf{E}_{nkl}^s(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{nkl}^{s*}(\mathbf{r}')}{(\omega^2 - \omega_{nkl}^s) W_{nkl}^s} \right. \\ &\left. + \nabla \frac{\exp(-jn(\varphi-\varphi')) J_n(\kappa_{nk}\rho) J_n(\kappa_{nk}\rho') \sin(l\pi z/d) \sin(l\pi z'/d)}{\pi R^2 d [\kappa_{nk}^2 + (l\pi/d)^2] J_n^2(\kappa_{nk}R)/2} \nabla' \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\hat{\Gamma}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=e,m} \frac{j\omega_{nk}^s \mathbf{E}_{nk}^s(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{nk}^{s*}(\mathbf{r}')}{(\omega^2 - \omega_{nk}^s) W_{nk}^s} + \nabla \frac{\exp(-jn(\varphi - \varphi')) J_n(\kappa_{nk} \rho) J_n(\kappa_{nk} \rho') \sin(l\pi z/d) \sin(l\pi z'/d)}{\pi R^2 d [\kappa_{nk}^2 + (l\pi/d)^2] J_n^2(\kappa_{nk} R)/2} \nabla' \right\}. \quad (18)$$

Наконец, рассмотрим важный вопрос о полюсах ФГ. Полученные соотношения точные, поскольку использован полный базис полого ЦР с идеально проводящими стенками, краевая задача для которого самосопряженная. Однако полюса не позволяют проводить расчет на частотах вблизи резонансных. В работе [4] предложено считать резонансные частоты комплексными, т.е. добротности колебаний высокими, но конечными. Для этого предложено провести границу внутри неидеальной металлической оболочки за пределами скин-слоя, где полей нет. Соответственно нет и потока мощности из резонатора. Однако при этом строгость разложения (4), (5) теряется, резонансные частоты изменяются. Вырезанный слой металла представляет собой диэлектрик с большой мнимой частью, в резонатор вносятся потери, и задача становится несамосопряженной. Найти комплексные частоты резонатора приближенно можно методом возмущений [18]. Строгий подход при внесении в резонатор диспергирующих сред требует для получения формул его возбуждения решения объемных ИДУ для полей в указанных средах [7,8]. При этом полюса в ФГ остаются, но решение задачи строгое.

Реально резонатор возбуждаться гармоническими во времени источниками не может. При квазистационарном же возбуждении наличие потерь внутри не приводит к бесконечно большим амплитудам. При обращении Фурье ФГ добавление бесконечно малых мнимых частей к резонансным частотам приводит к полюсам в верхней полуплоскости комплексной плоскости частоты, что дает причинную (запаздывающую) ФГ во временном представлении.

Приведенные в работе [6] формулы возбуждения ЦР явно не содержат резонансных частот и потенциальных частей поля. Однако указанные полюса возникают, а потенциальную часть тоже можно выделить. Формулы основаны на теории возбуждения ЦВ, представлении решения по стоячим волнам и наложении граничных условий на торцах. Они имеют вид

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{znk}(\rho, \varphi, z), \\ H_z(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_{znk}(\rho, \varphi, z), \quad (19)$$

$$E_{znk}(\rho, \varphi, z) = \frac{\exp(-jn\varphi) J_n(\kappa_{nk} \rho) L_{nk}^e(z)}{j\gamma_{nk}^e \sin(\gamma_{nk}^e d) \pi R^2 J_n^2(\kappa_{nk} R)}, \\ H_{znk}(\rho, \varphi, z) = \frac{\exp(-jn\varphi) J_n(\chi_{nk} \rho) L_{nk}^m(z)}{j\gamma_{nk}^m \sin(\gamma_{nk}^m d) \pi R^2 J_n^2(\chi_{nk} R) (1 - \frac{n^2}{\chi_{nk}^2})},$$

$$L_{nk}^e(z) = \int_V M_z^e(\rho', \varphi', z') e^{jn\varphi'} J_n(\kappa_{nk} \rho') f_{nk}^e(z - z') d^3 r',$$

$$L_{nk}^m(z) = \int_V M_z^m(\rho', \varphi', z') e^{jn\varphi'} J_n(\kappa_{nk} \rho') f_{nk}^m(z - z') d^3 r',$$

$$f_{nk}^e(z - z') = \cos(\gamma_{nk}^e (d - |z - z'|)) + \cos(\gamma_{nk}^e (d - z - z')),$$

$$f_{nk}^m(z - z') = \cos(\gamma_{nk}^m (d - |z - z'|)) - \cos(\gamma_{nk}^m (d - z - z')).$$

Примечательно, что в эти соотношения входят только z-компоненты  $M_z^e$  и  $M_z^m$  величин, определяемых, согласно [6], через токи как

$$\mathbf{M}^e = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}^e + \nabla \nabla \mathbf{J}^e / j\omega\epsilon_0 - \nabla \times \mathbf{J}^m,$$

$$\mathbf{M}^m = -j\omega\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{J}^m + \nabla \nabla \mathbf{J}^e / j\omega\mu_0 + \nabla \times \mathbf{J}^e.$$

В цилиндрической системе они принимают форму

$$M_z^e = -j\omega\mu_0 J_z^e - (\partial/\partial z)\rho^e/\epsilon_0 - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_\varphi^m) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_\rho^m}{\partial \varphi} \right],$$

$$M_z^m = -j\omega\mu_0 J_z^m - (\partial/\partial z)\rho^m/\mu_0 + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_\varphi^e) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_\rho^e}{\partial \varphi} \right].$$

Естественно, для несолоноидальных токов возникает зависимость от всех их компонент, так как, например, плотность электрического заряда выражается в виде

$$\rho^e = \frac{j}{\omega} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_\varphi^e) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_\rho^e}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z^e}{\partial z} \right].$$

Еще один способ построения теории возбуждения может быть основан на использовании векторов-потенциалов или векторов (потенциалов) Герца. В этом случае мы ищем решения уже для векторов-потенциалов, а поля находятся их дифференцированием и имеют обычное представление в виде интегралов от ФГ и токов (12). Неудобство такого представления в том, что необходимо решать задачу возбуждения для каждой компоненты тока, а при дифференцировании ядра ФГ становятся сильно сингулярными.

## 2. Возбуждение ЦР спиральным и осевым токами

Будем считать пучок нитевидным, т.е. имеющим плотность тока вида

$$J_z = \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi) I_e(z) / \rho_0,$$

где  $J_e(z)$  — ток пучка.

Тогда

$$M_z^e = \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi) [-j\omega\mu_0 I_e(z) + \partial^2 I_e(z) / \partial z^2 / (j\omega\epsilon_0)] / \rho_0,$$

$$L_{nk}^e = \int_0^d [-j\omega\mu_0 I_e(z - z') + \partial^2 I_e(z) / \partial z^2 / (j\omega\epsilon_0)] \times J_n(\kappa_{nk} \rho_0) f_{nk}^e(z - z') dz'.$$

Сместив пучок в центр ( $\rho_0 = 0$ ), видим, что в сумме остается один член с  $n = 0$ :

$$E_z(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{z0k}(\rho, z),$$

$$E_{z0k}(\rho, z) = \frac{J_0(\kappa_{0k}\rho)L_{0k}^e(z)}{j\gamma_{0k}^e \sin(\gamma_{0k}^e d) \pi R^2 J_0^2(\kappa_{0k}R)}, \quad (20)$$

$$L_{0k}^e = \int_0^d [-j\omega\mu_0 I_e(z-z') + \partial^e I_e(z)/\partial z^2 / (j\omega\epsilon_0)] \times f_{0k}^e(z-z') dz'.$$

Здесь  $J_0^2(\kappa_{0k}R) = J_1^2(\kappa_{0k}R)$ , а поле теперь азимутально-симметричное. Пусть электроны пучка тормозятся по закону  $v = v_0 - at$ . Тогда скорость у торца  $z = d$  (коллектора) есть  $v_d = \sqrt{v_0^2 - 2da}$ , а каждый электрон отдает энергию  $m_e da$ . Волну электронного тока можно записать так:  $I_e(z) = -I_0^e \exp(-j\gamma(z)z - j\psi)$ . Мы предполагаем ток в каждом сечении неизменным (оседанием пучка пренебрегаем). Соответственно  $\gamma(z) = \omega/\sqrt{v_0^2} = 2az$ , а  $\psi$  — начальная фаза при влете. В общем случае будем считать, что постоянная распространения зависит по более сложному закону  $\gamma(z) = \omega/\sqrt{v_0^2 - 2az - bz^2}$ , т.е. электроны тормозятся неравномерно вдоль  $z$ . Поскольку  $I_0^e = evN_e = \text{const}$ , то число электронов  $N_e$  на единицу длины обратно пропорционально их скорости. Считаем, что группировка электронов не меняется, а разброса по скоростям нет.

Ток спирали также считаем линейным, т.е. сосредоточенным на оси проволоки ее намотки радиуса  $r$  и зависящим от длины дуги  $s$  осевой линии, отсчитываемой от начала при  $z = 0$ . Поскольку приведенные соотношения требуют дифференцирования тока, будем задавать его аналитически. В этом смысле использование ФГ типа (13) позволяет применять менее гладкие функции, например, кусочно-постоянные конечные элементы. Это, в частности, удобно для бесконечной спирали в свободном пространстве [19] и ЦВ [14], где ФГ известны аналитически. Возьмем искомое решение в виде

$$I(s) = I_0 \exp(\alpha z + \beta z^2) \exp(-jk_0\theta(1 + \eta z)s). \quad (21)$$

Здесь параметр  $\theta$  (вообще говоря, зависящий от частоты) характеризует отличие замедления от геометрического в начале спирали (при  $z = 0$ ), параметр  $\eta$  характеризует увеличение замедления с ростом  $z$  (предполагается, что шаг намотки уменьшается), а параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяют нарастание тока. Поскольку нагрузка у спирали слева и справа одинакова, коэффициент усиления по току есть  $K_I = \exp(\alpha d + \beta d^2) = I_d/I_0$ .

Будем рассматривать спираль с положительной намоткой (против часовой стрелки) с изменяющимся шагом  $h(z) = h_0 - \delta z$ . Соответственно  $h(d) = h_0 - \delta d > 0$ . Безразмерный параметр  $\delta$  мал. Параметрическое уравнение

намотки осевой спиральной кривой с  $N$  витками имеет вид

$$\rho = R_0, \quad \varphi = 2\pi N\tau, \quad z = Nh(z)\tau,$$

$$x = R_0 \cos \varphi, \quad y = R_0 \sin \varphi, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

где  $z = Nh_0\tau/(1 + N\delta\tau)$ . Для длины дуги  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  имеем соотношение  $ds = l(\tau)d\tau$ ,  $l(\tau) = N\sqrt{(2\pi R_0)^2 + h_0^2/(1 + N\delta\tau)^2}$ . Точный аналитический вид соответствующего интеграла для получения связи длины дуги с параметром  $\tau$  при  $\delta > 0$  в элементарных функциях не существует. Проще использовать численное интегрирование. Воспользуемся малостью  $\delta$ . Тогда имеем приближение

$$s = L_0\tau - \delta h_0^2 N^3 \tau^2 / (2L_0). \quad (22)$$

Здесь  $L_0 = l(0) = N\sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2}$  — общая длина спирали с равномерной намоткой (при  $\delta = 0$ ). Соответственно длина неравномерной спирали принимает вид  $L \approx L_0 - \delta H_0^2 N^3 / (2L_0)$ . Размер равномерной спирали (ее длина) вдоль оси  $z$  есть  $L_{0d} = Nh_0$ , тогда как при неравномерном шаге намотки он равен  $L_d = N(h_0 - \delta d)$ . Для равномерной спирали  $\sin \vartheta = L_{0d}/L_0$  определяет угол намотки. В общем случае угол намотки определяется из соотношения  $\sin \vartheta(z) = dz/ds$ . Далее были использованы как соотношение (22), так и численное интегрирование. Отличие не превышало процента.

Компоненты тока, текущего по оси, можно записать так:

$$I_x(z) = -2\pi R_0 I(\tau) \sin(\Omega\tau) / \sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)},$$

$$I_y(z) = 2\pi R_0 I(\tau) \cos(\Omega\tau) / \sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)}, \quad (23)$$

$$I_z(z) = h(\tau) I(\tau) / \sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)},$$

где  $\Omega = 2N\tau$ , при этом  $I^2(\tau) = I_x^2(\tau) + I_y^2(\tau) + I_z^2(\tau)$ . Здесь переменный шаг записан как функция параметра  $\tau$  в силу дробно-линейной связи с координатой  $z$ . Соотношение (21) с учетом (22) можно считать функцией  $\tau$  и использовать в (23). Далее нам понадобятся компоненты тока в цилиндрических координатах

$$I_\rho(\tau) = 0,$$

$$I_\varphi(\tau) = 2\pi R_0 I(\tau) / \sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)}, \quad (24)$$

$$I_z(\tau) = h(\tau) I(\tau) / \sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)}.$$

Этим компонентам соответствует плотность тока

$$\mathbf{J}(\rho(\tau), \varphi(\tau), z(\tau)) = \mathbf{i}_0(\tau) I(\tau) \delta(\rho - R_0) \delta(\varphi - \Omega\tau) / R_0. \quad (25)$$

Здесь  $\mathbf{i}_0$  — единичный касательный вектор к спиральной линии. Указанное представление позволяет перейти к

интегралу по спиральной линии. Нетрудно видеть, что достаточно учесть только величину

$$M_z^e(\tau) = [-j\omega\mu_0 I_z(\tau) - (\partial/\partial z)\rho_s^e(\tau)/\varepsilon_0] \times \delta(\rho - R_0)\delta(\varphi - \Omega\tau)/R_0,$$

где  $\rho_s^e(\tau)$  — плотность линейного заряда для тока спирали. Для нее имеем

$$\rho_s^e(\tau) = \frac{j}{\omega N} \left( \frac{I'(\tau)}{\sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)}} - \frac{I(\tau)h(\tau)h'(\tau)}{(\sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)})^3} \right) + \frac{j(1 + N\delta\tau)^2}{\omega N h_0} \left( \frac{h'(\tau)I(\tau) + h(\tau)I'(\tau)}{\sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)}} - \frac{h^2(\tau)h'(\tau)I(\tau)}{(\sqrt{(2\pi R_0)^2 + h^2(\tau)})^3} \right). \quad (26)$$

Из соотношения (49) определяем  $(\partial/\partial z)\rho_s^e(\tau) = \rho_s^e(\tau) \frac{(1+N\delta\tau)^2}{N h_0}$ . Также, подставляя в (21) зависимость (22) и зависимость  $z(\tau)$ , получаем ток  $I(\tau)$  и его производную  $I'(\tau)$ , а затем находим функцию

$$L_{nk}^e(z) = J_n(\kappa_{nk} R_0) \int_0^d [-j\omega\mu_0 I_z(\tau') - (\partial/\partial z')\rho_s^e(\tau')/\varepsilon_0] \times e^{jn\Omega\tau'} f_{nk}^e(z - z') dz'.$$

Заметим, что заменой переменных  $z = N h_0 \tau / (1 + N\delta\tau)$  она может быть сведена к функции от  $\tau$ . Второй член в интеграле можно проинтегрировать по частям

$$\int_0^d (\partial/\partial z')\rho_s^e(z') e^{jn\Omega \frac{z'}{N(h_0 - \delta z')}} f_{nk}^e(z - z') dz' = \rho_s^e(d) e^{jn\Omega \frac{d}{N(h_0 - \delta d)}} f_{nk}^e(z - d) - \rho_s^e(0) f_{nk}^e(z) - \int_0^d \rho_s^e(z') \left[ \frac{jn\Omega h_0}{N(h_0 - \delta z')^2} e^{jn\Omega \frac{z'}{N(h_0 - \delta z')}} f_{nk}^e(z - z') dz' \times e^{jn\Omega \frac{z'}{N(h_0 - \delta z')}} (\partial/\partial z') f_{nk}^e(z - z') \right] dz'.$$

Таким образом, вычислять производную линейного заряда не обязательно. Но следует иметь в виду, что  $(\partial/\partial z')|z - z'| = \text{sgn}(z' - z)$ .

### 3. Интегродифференциальное уравнение возбуждения ЦР

Итак, получены вклады в  $z$ -компоненту поля от осевого электронного потока и спирали с переменным шагом. Интересно отметить, что тонкая спираль не возбуждает магнитные волны: член в квадратных скобках у  $M_z^m$  равен

нулю. Однако спираль с проволокой конечной толщины или ленточной формы приведет к их появлению. Нам необходима еще компонента  $E_\varphi$ . Ее получим дифференцированием  $E_z$  по известным формулам. Теперь можно сконструировать касательный к спирали вектор электрического поля. Мы возьмем две линии на поверхности спирали, определяемые уравнениями

$$\rho = R_0 \pm r, \quad \varphi = 2\pi N\tau, \quad z = nh(z)\tau,$$

$$x = (R_0 \pm r) \cos \varphi, \quad y = (R_0 \pm r) \sin \varphi, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Определим теперь компоненты  $E_\varphi^\pm(R_0 \pm r, \varphi(\tau), z(\tau))$  и  $E_z^\pm(R_0 \pm r, \varphi(\tau), z(\tau))$  полем  $\mathbf{E}_r^\pm(\tau)$ , касательных к цилиндрам радиусов  $R_0 \pm r$ . Далее в  $\mathbf{E}_r^\pm(\tau)$  делаем замену переменных (если используется соотношение (22))

$$\tau = \frac{2L_0^2}{\delta h_0^2 N^3} - \sqrt{\frac{4L_0^4}{(\delta h_0^2 N^3)^2} - \frac{2L_0}{\delta h_0^2 N^3}} s \approx s/L_0,$$

умножаем их скалярно на вектор  $\mathbf{i}_0(s)I^*(x)$  и интегрируем

$$\int_0^{L^\pm} I^*(s) \mathbf{i}_0(s) \mathbf{E}_r^\pm(s) ds + Z_0 |I_d|^2 = 2P_0 = UI_0. \quad (27)$$

При получении уравнения (27) было предположено, что в начале спирали включен сосредоточенный дельта-источник напряжения  $U$ . Он моделирует входную КЛ с волновым сопротивлением  $Z_0$ . Выходная КЛ также моделируется как сосредоточенная нагрузка  $Z_0$ . В нее отдается ток  $I_d$ . Здесь  $L^\pm \approx L$  — длины соответствующих спиральных кривых,  $P_0$  — максимальная отдаваемая генератором мощность за период. Поскольку такая мощность отдается только в нагрузку  $Z_0$ , равную внутреннему сопротивлению генератора (идеальное согласование по переданной мощности), амплитуда тока есть  $I_0 = U/Z_0$ , а  $P_0 = U^2/(2Z_0)$ . Здесь следует отметить, что реальная амплитуда напряжения генератора  $2U$  делится между нагрузкой и его внутренним сопротивлением  $Z_0$ , которое находится вне ЦР. Отражение отсутствует, если входной импеданс спирали в ЦР равен  $Z_0$ , что и предполагается. Очевидно, интеграл по дуге в этом уравнении может быть заменен интегралом по параметру

$$I_{hel}^\pm = \int_0^1 I^*(\tau) \mathbf{i}_0(\tau) \mathbf{E}_r^\pm(\tau) l(\tau) d\tau \approx \frac{l(0) + l(1)}{2} \int_0^1 I^*(\tau) \mathbf{i}_0(\tau) \mathbf{E}_r^\pm(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Уравнение (27) представляет баланс мощности, но он не полный, если имеется электронный поток и в поле  $\mathbf{E}_r^\pm(t)$  присутствует его вклад. Обозначим  $I_d = |I(1)|$ .

Полный баланс комплексной мощности определяется соотношением

$$P = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{J}^*(\mathbf{r}) d^3r = P_0 - \frac{Z_0 I_d^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^d E_z(0, 0, z) I_e^*(z) dz - \frac{1}{2} \int_0^L I^*(s) \mathbf{i}_0(s) \mathbf{E}_r^\pm(s) ds. \quad (29)$$

Его смысл в том, что полная развиваемая в ЦР мощность есть сумма входной мощности источника сигнала, мощности, развиваемой током пучка и спирали, минус мощность, передаваемая в нагрузку. Соответственно в (29) присутствует полное поле, тогда как в (27) только поле, возбуждаемое спиралью. Уравнение (27) замкнуто в отсутствие электронного потока: в этом случае из него определяется ток спирали. Оно аналогично уравнению Поклингтона или Галлена в теории антенн. Уравнение (29) становится замкнутым, поскольку  $P = 0$  в силу отсутствия потока мощности через поверхность. Оно определяет ток  $I(s)$ . Последний член в (29) (интеграл (28) с минусом) определяет мощность, излучаемую спиралью. Эта мощность нулевая при идеальной проводимости или отрицательная при наличии потерь (теряемая мощность дается интегралом (28)). В случае идеальной проводимости следует положить  $I_{hel} = (I_{hel}^\pm + I_{hel}^\mp)/2$  (здесь мы усреднили по двум спиральным кривым), а при импедансной спирали возникнет дополнительный член. С учетом (28) имеем однородное уравнение. Оно имело бы нулевое решение, если бы не граничные условия для тока:  $I(0) = I_0$ ,  $|I(1)| = I_d$ . Задание падающей мощности  $P_0 = Z_0 I_0^2/2$  ведет к заданию и личины  $I_0$ . Таким образом, при аппроксимации тока (21) имеем 4 искомых параметра:  $\alpha, \beta, \theta, \eta$ . Но параметр  $\theta$  удобно задать, исходя из дисперсии бесконечной экранированной спирали с равномерным шагом  $h_0$ .

Естественно, вместо аппроксимации (21) можно взять разложение по системам дифференцируемых функций и решать ИДУ проекционным методом. В нашем случае будем численно искать минимум выражения  $I_{hel}$

$$\min_{\alpha, \beta, \eta} (|I_{hel}|). \quad (30)$$

Когда минимум (30) найден (считаем, что он равен нулю), т.е. определен ток спирали, можно найти  $E_z(0, 0, z)$ , и тогда вычисляем полную выходную мощность

$$P_d = P_0 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^d E_z(0, 0, z) I_e^*(z) dz \right). \quad (31)$$

Здесь  $P_d = Z_0 I_d^2/2$ . Отсюда получаем формулу коэффициента усиления по мощности

$$K = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_0^d E_z(0, z) I_e^*(z) dz \right) / P_0. \quad (32)$$

С другой стороны, имеем другое выражение  $\tilde{K} = |I_d|^2/I_0^2$ .

В общем случае для касательного поля  $E_r^\pm(s)$  на спирали имеет место уравнение

$$E_r^\pm(s) + E_{0r}^\pm(s) = E_{0r}^\pm(s) + \int_0^L \tilde{K}^\pm(s, s') I(s') ds' = U \delta(s) - Z_0 I(s) \delta(s - L) \quad (33)$$

с ядром  $\tilde{K}^\pm(s, s')$  в виде дифференциального оператора, в котором  $E_{0r}^\pm(s)$  — заданное касательное поле на спирали, возбуждаемое электронным потоком. Задав в нем ток  $I(s)$  в виде разложения по некоторым базисным функциям с условием  $I(0) = I_0 = \sqrt{2P_0/Z_0}$  (т.е. введя падающую мощность) и получив его решение (т.е. определив коэффициенты разложения), получим все искомые параметры задачи в рассмотренной постановке. Для более корректного учета граничных условий мы использовали их усреднение на двух спиральных кривых. Число последних можно увеличить, например, взяв четыре кривые. В принципе в силу малости  $r$  достаточно одной кривой. Учет нескольких кривых позволяет моделировать форму проволоки катушки. Так, для ленты следует использовать различные значения тока в (33) для каждой формирующей ее кривой. Соответственно размерность задачи возрастает.

Когда решение задачи в указанном виде получено, можно провести его корректировку для более сложной задачи, например, при наличии дополнительных магнитоэлектрических включений. Именно по полученным полям определяем дополнительные токи поляризации включений. Затем уточняем полученное решение. Возможно несколько таких последовательных приближений. С вычислительной точки зрения это удобнее, нежели решение объемных ИДУ большой размерности. Также приведенные формулы позволяют определить поле на оси, решить уравнение движения, получить скорректированный ток пучка и скорректированное поле. Такой метод последовательных приближений уже дает возможность решать нелинейные задачи моделирования, используя полученные формулы возбуждения.

#### 4. Результаты численного моделирования

Выражение для осевой компоненты поля на оси ЦР имеет вид

$$E_z(0, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^d [-j\omega\mu_0(I_e(z') + I_s(z')) + \frac{\partial^2 I_e(z')/\partial z'^2}{j\omega\epsilon_0} - \frac{\partial \rho_s^e(z')/\partial z'}{\epsilon_0}] \times f_{0k}^e(z - z') dz'}{j\gamma_{0k}^e \sin(\gamma_{0k}^e d) \pi R^2 J_0^2(\kappa_{0k} R)}. \quad (34)$$

Это выражение используем для вычисления мощности (31). Предварительно минимизируем выражение (30). Для него имеем

$$I_{hel}^{\pm} = \frac{N}{L} \int_0^1 I^*(t) [2\pi R_0 E_{\varphi}^{\pm}(t) + h_0(1 - \delta t/(1 + N\delta t)) E_z^{\pm}(t)] dt. \quad (35)$$

Сюда входит поле, возбуждаемое пучком и спиралью. Для пучка  $z$ -компонента определяется так

$$E_z(R_0 \pm r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{z0k}^{\pm}(R_0 \pm r, z),$$

$$E_{z0k}^{\pm}(R_0 \pm r, z) = \frac{J_0(\kappa_{0k}(R_0 \pm r)) L_{0k}^e(z)}{j\gamma_{0k}^e \sin(\gamma_{0k}^e d) \pi R^2 J_1^2(\kappa_{0k} R)}, \quad (36)$$

$$L_{0k}^e = \int_0^d [-j\omega\mu_0 I_e(z') + \partial^2 I_e(z')/\partial z'^2/(j\omega\epsilon_0)] \times f_{0k}^e(z - z') dz'.$$

Для тока спирали пишем

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{zmk}^{\pm}(R_0 \pm r, \varphi, z), \quad (37)$$

$$E_{zmk}^{\pm}(R_0 \pm r, \varphi, z) = \frac{\exp(-jn\varphi) J_n(\kappa_{nk}(R_0 \pm r)) L_{nk}^e(z)}{j\gamma_{nk}^e \sin(\gamma_{nk}^e d) \pi R^2 J_n^2(\kappa_{nk} R)},$$

$$L_{nk}^e(z) = \int_0^d [-j\omega\mu_0 I_z(t') - (\partial/\partial z') \rho_s^e(t')/\epsilon_0] \times e^{jn\Omega t'} f_{nk}^e(z - z') dz'.$$

Азимутальная компонента поля для пучка отсутствует, а для тока спирали имеем

$$E_{\varphi}(R_0 \pm r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\varphi mk}^{\pm}(R_0 \pm r, \varphi, z),$$

$$E_{\varphi mk}^{\pm}(R_0 \pm r, \varphi, z) = \frac{1}{\kappa_{mk}^2(R_0 \pm r)} \frac{\partial^2 E_{zmk}^{\pm}(R_0 \pm r, \varphi, z)}{\partial \varphi \partial z}.$$

При вычислении полученных интегралов полагаем постоянные распространения  $\gamma_{nk}^e$  комплексными (это достаточно сделать только для распространяющихся мод), для чего используем теорию возмущения для мод ЦВ с импедансными условиями Леонтовича [18]. Дополнительные потери вносит и спираль. Соответствующие вносимые потери оцениваем как потери КЛ с внешним и внутренним радиусами  $R$  и  $r$  длины  $L$ .

В приведенных результатах было взято 11 азимутальных ( $-5 \leq n \leq 5$ ) и 9 радиальных ( $1 \leq k \leq 9$ ) членов

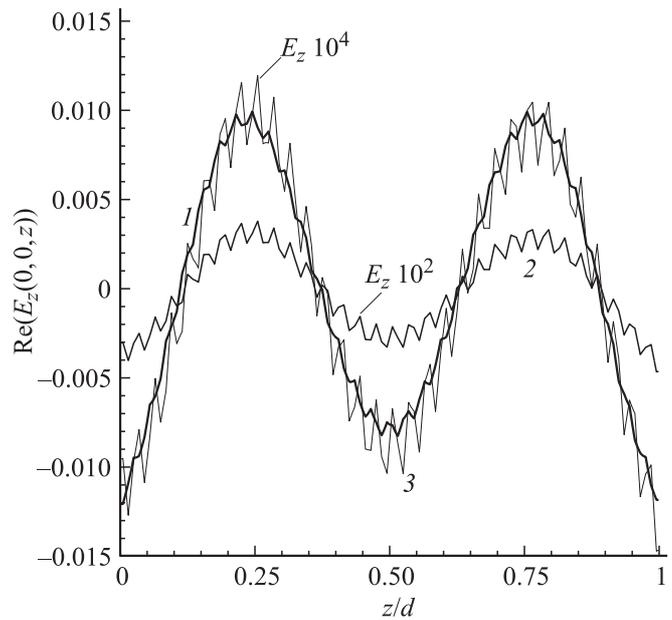


Рис. 1. Компонента  $E_z$  (V/cm) на оси при воздействии тока пучка (1), тока пучка и тока спирали при амплитудных значениях соответственно  $I_0 = 0.00632$  А (2) и  $I_0 = 0.02$  А (3).

в суммах. Использовались следующие параметры: средняя частота  $f_0 = 10$  GHz,  $N = 15$ ,  $R = 3.5$  (все размеры далее в см),  $R_0 = 1$ ,  $h_0 = 0.6$ ,  $r = 0.1$ , длина ЦР  $d_0 = 9$  при  $\delta = 0$  и  $d = 7.83$  при  $\delta = 0.01$ , начальное замедление 10.52, замедление на конце неравномерной намотанной спирали 12.1, число замедленных длин волн 29.5, скорость электронов на влете (при  $z = 0$ )  $v_0 = 2.85 \cdot 10^7$  m/s, скорость электронов на вылете (при  $z = d$ )  $v_d = 2.48 \cdot 10^7$  m/s, электронный КПД 24.3%,  $Z_0 = 50 \Omega$ . Ток пучка брался равным  $I_0^e = 0.0125$  А.

На рис. 1 приведено распределение компоненты электрического поля  $E_z(0, 0, z)$  на оси при возбуждении заданным током пучка  $I_e(z) = I_0^e \exp(-j\omega z/v_0 - j\psi)$  при  $\psi = 0$  (кривая 1), указанным током и током (21) при  $\alpha = \beta = \eta = 0$ ,  $\theta = 1$  равномерной спирали со значениями  $I_0$ , соответствующими входной мощности 0.001 (кривая 2) и 0.01 W (кривая 3) W. Соответственно ИДУ здесь не решалось и сопротивления нагрузки не учитывались. Видно, что возбуждение заданным током приводит к наличию крупномасштабных (связанных с основной электрической модой ЦР) и мелкомасштабных (связанных с замедленной длиной волны) резонансов. Для подавления первых в конструкциях ЛБВ ставятся поглотители. Учесть их в рассмотренной модели можно указанным выше способом, что существенно усложняет алгоритм. Применим другой подход, основанный на введении в уравнения возбуждения в форме [6], выведя отличный от  $-1$  коэффициент отражения по электрическому полю от торцов, что соответствует заданию на них неких импедансных условий (или нагрузок). Строго говоря, это приводит к гибридным модам, однако вклад магнитных мал. Считая, что возбуждаются только электрические

моды, представляя поле в виде формул (11.35), (11.36) работы [6], получаем

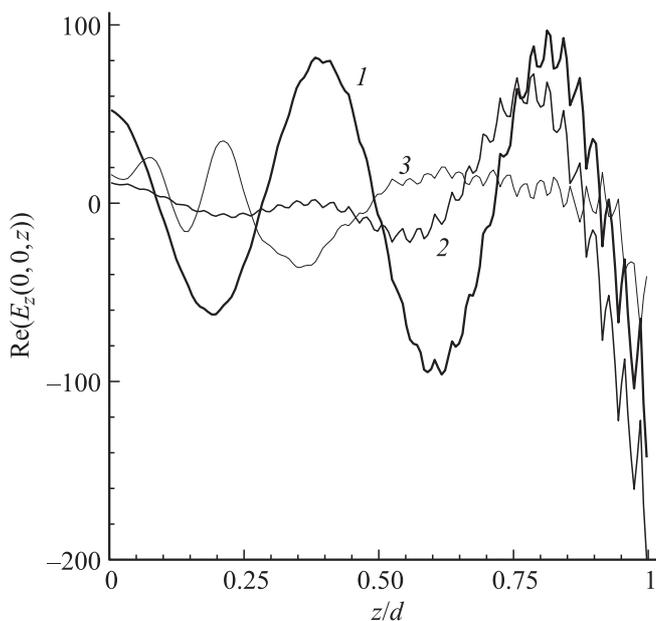
$$E_{znk}(\rho, \varphi, z) = \frac{\exp(-jn\varphi)J_n(\kappa_{nk}\rho)L_{nk}^e(z)}{2\pi j\gamma_{nk}^e R^2 J_n^2(\kappa_{nk}R)}$$

Здесь  $L_{nk}^e(z)$  имеет ту же структуру и отличается только функцией

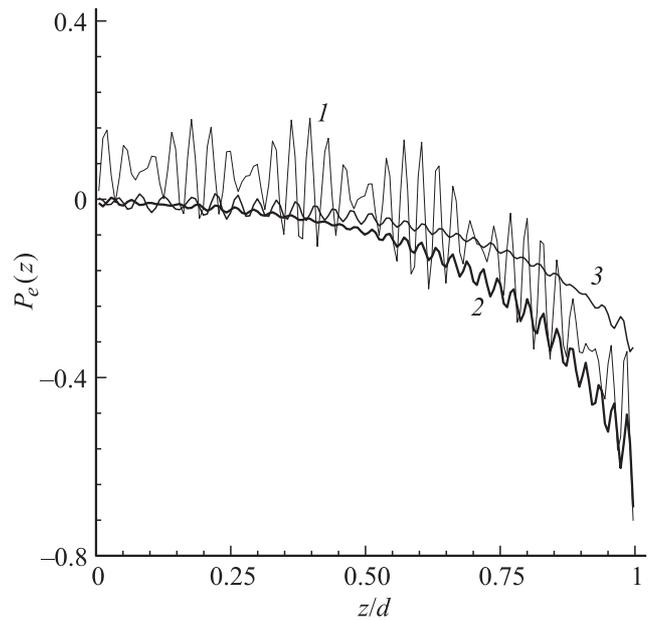
$$f_{nk}^e(z - z') = \exp(-j\gamma_{nk}^e|z - z'|) - \Gamma \frac{\exp(-j\gamma_{nk}^e z) \cos(\gamma_{nk}^e(d - z')) + \exp(j\gamma_{nk}^e(z - d)) \cos(\gamma_{nk}^e z')}{j \sin(\gamma_{nk}^e d)},$$

в которую введен коэффициент отражения от торцов Г. При  $\Gamma = 0$  получаем формулы возбуждения ЦВ [6]. Как видно, соотношения не сильно усложняются, а с вычислительной точки зрения эффективность алгоритма не ухудшается. Для  $\Gamma = 0$  компонента  $E_z$  получается путем интегрирования  $\exp(-j\gamma_{nk}^e|z - z'|)$  с быстро осциллирующими функциями  $I_e(z')$  и  $I(z')$ . Как видно, при этом возникают быстрые осцилляции, модулированные медленными, соответствующими распространяющимся волнам ЦВ. Таким образом, устранение торцевых экранов не решает полностью проблему медленной модуляции компоненты  $E_z$ . Реально полностью подавить отражения от торцов не удастся, а внесение потерь ухудшает усиление и КПД. Все это говорит в пользу резонаторной модели ЛБВ по сравнению с анализом на основе ЗС.

На рис. 2 приведено распределение реальной части  $E_z(0, 0, z)$  для входной мощности 0.001 W для модели с ЦР (кривые 1, 3) и при возбуждении ЦВ (2).

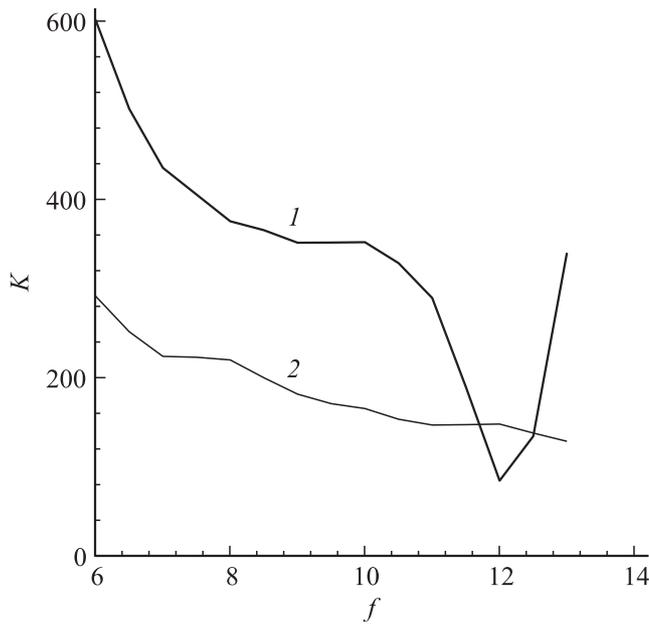


**Рис. 2.** Реальная часть компоненты  $E_z(0, 0, z)$  для малых (кривая 1) и больших (2) потерь в ЦР и малых потерь в случае возбуждения цилиндрического волновода при входной мощности на спирали 0.001 W.



**Рис. 3.** Зависимость мощности пучка от нормированной координаты.

Кривая 1 соответствует введению малого затухания в величины  $\gamma_{nm}$ . Соответствующая добротность основной моды ЦР примерно равнялась 3000. Кривая 2 получена при введении больших потерь (добротность уменьшена в 300 раз). На рис. 3 приведены результаты распределения мощности пучка, соответствующие рис. 2. Величина  $P_e$  есть половина реальной части интеграла в (32) с переменным верхним пределом  $z$ . Для высокодобротной резонаторной модели мощность сильно колеблется и вначале положительная, т.е. пучок забирает мощность, а в конце становится отрицательной, т.е. пучок излучает мощность. Для низкодобротной резонаторной модели и волноводной модели пучок практически на всей длине излучает мощность. Для этих результатов минимизировалась невязка (30) по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$  (при  $\eta = 0$ ), которую удалось снизить на два порядка от невязки для первоначально выбранных значений. Для резонатора полученные параметры  $\alpha = 0.45$ ,  $\beta = 0.012$  соответствуют  $\tilde{K} = 4.9 \cdot 10^3$ . Вычисленный коэффициент усиления для ЦР  $K = 352.4$  при высокой добротности и  $K = 342.8$  для низкой добротности, а для ЦВ  $K = 167.5$ . Различие, по-видимому, обусловлено тем, что в ЦВ имеет место излучение влево и вправо от распределенных на отрезке  $(0, d)$  токов. Для пучка взято  $a = 0.087$ ,  $b = 0.01$ , что соответствует максимально возможному теоретическому коэффициенту усиления  $K = 7 \cdot 10^3$  при входной мощности 1 mW. По-видимому, использованная модель согласованной со спиралью нагрузки весьма приближенная. Реально имеет место отраженная волна тока, и в нагрузку поступает не вся мощность. Строгая постановка в виде возбуждения волноводного трансформатора из ЦР с подключенными к спирали входной КЛ и выходной КЛ весьма сложна, так как требует учета воз-



**Рис. 4.** Частотная зависимость коэффициента усиления для резонаторной (кривая 1) и волноводной (2) моделей для входной мощности 1 мВт.

Зависимость коэффициента усиления на частоте 10 GHz от входной мощности для резонаторной волноводной модели

Входная мощность, W	Коэффициент усиления	
	для резонатора	для волновода
0.001	352.4	165.6
0.002	117.9	115.4
0.004	83.6	83.3
0.008	59.1	66.9
0.016	43.0	47.6

буждения ЦР неизвестными полями на апертуре (которые эквивалентны поверхностным магнитным токам) и определения этих полей из поверхностных ИУ. При этом необходимо решать связанные ИУ на апертурах и ИДУ для тока спирали. Такой подход в принципе позволяет определить и амплитуды высших мод, передаваемых в КЛ, что важно для учета излучения на высших гармониках при решении самосогласованной нелинейной задачи с моделированием тока пучка. На рис. 4 приведены зависимости коэффициента усиления от частоты, а в таблице — его зависимость от входной мощности.

### Заключение

Приведены явные формулы возбуждения цилиндрического резонатора и волновода применительно для моделирования их возбуждения заданным осевым током и током на проводящей спиральной линии с переменным шагом. Результаты использованы для моделирования

спиральной ЛБВ с неоднородной спиралью с учетом потерь и неоднородного электронного потока. Выявлен ряд интересных закономерностей. Получены формулы возбуждения резонатора при неидеально отражающих торцах. Результаты могут быть использованы для построения строгих нелинейных моделей ЛБВ, а также для других применений с использованием электродинамических структур на основе ЦР.

### Список литературы

- [1] Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
- [2] Давидович М.В. // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Физика. 2005. Т. 5. Вып. 1. С. 68–83.
- [3] Давидович М.В. // Моделирование в прикладной электродинамике и электронике. Сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2005. Вып. 6. С. 64–77.
- [4] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь. 1988. 440 с.
- [5] Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электродинамике. М.: Сов. радио, 1973. 392 с.
- [6] Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
- [7] Давидович М.В. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 11. С. 12–19.
- [8] Давидович М.В. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 10. С. 1198–1205.
- [9] Давидович М.В. // Моделирование в прикладной электродинамике и электронике. Сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. Вып. 6. 2005. С. 4–12.
- [10] Давидович М.В., Шилин И.В. // Актуальные проблемы электронного приборостроения. Материалы Международной науч.-техн. конф. Саратов, СГТУ. 2004. С. 226–230.
- [11] Давидович М.В., Шилин И.В. // Актуальные проблемы электронного приборостроения: материалы Международной науч.-техн. конф. Саратов, СГТУ. 2004. С. 240–244.
- [12] Davidovich M.V., Shilin I.V. // Proc. SPIE. 2005. V. 5776. P. 37–42.
- [13] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 10. С. 2003–2008.
- [14] Davidovich M.V., Bushuev N.A., Stephuk J.V. // Modeling in Applied Electromagnetics and Electronics. Saratov University Press. 2011. N 10. P. 47–56.
- [15] Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики / Пер. с англ. Т. 1,2. М.: ИИЛ, 1958. 1816 с.
- [16] Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
- [17] Давидович М.В. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 11. С. 2224–2232.
- [18] Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 664 с.
- [19] Колобаева Т.Е., Пензяков В.В., Финкельштейн Ю.Х. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1981. Вып. 10 (334). С. 31–35.