

01

## Эволюция распределения ионов по скоростям после резкого включения периодического электрического поля. СЕМ-модель

© А.Я. Эндер,<sup>1</sup> И.А. Эндер,<sup>2</sup> А.Б. Герасименко<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
198504 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: andrei.ender@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 6 ноября 2012 г.)

Получено аналитическое решение задачи об эволюции функции распределения ионов по скоростям после включения периодического электрического поля. Решение построено для случая резонансной перезарядки с постоянной частотой столкновений — СЕМ-модели. Выявлены особенности переходного процесса на начальной стадии эволюции. На периодической стадии проанализирован фазовый сдвиг между приложенным полем и ионным током. Показано, что на функции распределения появляются резкие скачки, распространяющиеся в пространстве скоростей. С использованием периодического электрического поля предложен метод изучения сечений взаимодействия ионов с атомами, основанный на анализе тока на электрод, имеющий задерживающий потенциал.

### Введение

Изучение функции распределения (ФР) ионов по скоростям при наличии электрического поля является актуальной проблемой при решении многих задач физики плазмы. Периодическое электрическое поле используется во многих технических приложениях: обработка материалов [1,2], плазменная химия [3], ВЧ-разряд [4], спектрометры приращенной ионной подвижности (СПИП) [5] и т.д. Во многих случаях это гармонические колебания, а в СПИП — несимметричные периодические колебания поля. Для ВЧ-разряда важно знать, как изменяется ФР, особенно в области больших энергий, поскольку это определяет интенсивность возбуждения атомов и молекул и в конечном счете скорость ионизации.

Можно выделить несколько основных подходов к задачам о примеси ионов. Первый подход основывается на уравнениях Ньютона, которые описывают движения отдельных ионов. Основным недостатком этого метода является сложность определения силы торможения, возникающей при столкновении иона с атомом. Другой, очень распространенный способ решения, основан на гидродинамическом приближении с заданными коэффициентами переноса. Однако во многих задачах не ясно, каким образом выбирать эти коэффициенты, и кроме того, как замечено, в частности, в [6], этот метод не всегда может давать верные результаты. Так, в [6] рассматривался идеальный стационарный таунсендовский эксперимент и было показано, что гидродинамическое описание приводит к неверным количественным и качественным результатам.

Подходом, который помогает преодолеть подобные сложности, является непосредственное решение уравнения Больцмана. Только путем решения уравнения Больцмана можно точно учесть механизм столкновения частиц и получить исчерпывающее описание состояния

системы в виде ФР ионов. Ранее нами [7–9] на основе уравнения Больцмана был изучен процесс эволюции ФР ионов после резкого включения постоянного однородного электрического поля. Рассматривались различные модели взаимодействия. Задачи решались нестационарным моментным методом с использованием разработанного нами способа расчета матричных элементов интеграла столкновений [10]. При этом удалось вычислять матричные элементы практически со сколь угодно большими индексами, что дало возможность проводить расчеты ФР и ее моментов моментным методом для умеренных и даже достаточно сильных полей.

Необходимо отметить, что одним из основным механизмов взаимодействия ионов и нейтральных частиц является резонансная перезарядка. В ряде работ рассматривается модель резонансной перезарядки с постоянной частотой столкновений (см., например, [11,12]). Мы называли эту модель СЕМ-моделью; она соответствует резонансной перезарядке (*Charge exchange*) с полным сечением рассеяния, обратно пропорциональным относительной скорости, так же как в случае максвелловских (Maxwell) молекул. Для этой модели частота столкновений постоянна и интеграл столкновений принимает вид линейной БГК-модели [13]. Однако если БГК-модель создана с целью упрощения интеграла столкновений и не имеет физического обоснования, то СЕМ-модель является следствием выбора вполне определенного сечения рассеяния. В то же время СЕМ-модель обладает всеми достоинствами БГК-модели. Ранее [8] в случае постоянного электрического поля для СЕМ-модели было получено аналитическое решение задачи об эволюции малой примеси ионов на фоновом газе после резкого включения постоянного электрического поля. В частности, это решение было использовано для отладки моментного метода.

В настоящей работе в рамках СЕМ-модели подробно исследована эволюция функции распределения ионов,

движущихся в фоновом газе после резкого включения периодического гармонического электрического поля. Оказалось, что ФР и ее первый момент — плотность электрического тока имеют ряд интересных особенностей как на переходной, так и на периодической стадиях процесса. Ряд результатов носит общий характер.

### 1. Распределение ионов по скоростям и ионный ток

Рассмотрим нестационарную пространственно-одномерную задачу о поведении малой примеси ионов после резкого включения периодического электрического поля. Малость примеси понимается в том смысле, что ион-ионные столкновения редки и дебаевский радиус экранирования много больше длины свободного пробега. Фоновый атомный газ имеет максвелловское распределение с температурой  $T$ :

$$f_a(v) = \left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT),$$

где  $m$  — масса атома, которая в рассматриваемом случае совпадает с массой иона,  $k$  — постоянная Больцмана, а  $v$  — скорость атома.

В случае резонансной перезарядки ион, пролетая мимо атома, обменивается с ним электроном, не меняя при этом направления своего движения. Это эквивалентно рассеянию на  $180^\circ$ . Дифференциальное сечение такого процесса имеет вид

$$\sigma(g, \theta) = \Sigma(g)\delta(\theta - \pi).$$

Здесь  $g$  — относительная скорость, а  $\theta$  — угол рассеяния. В случае СЕМ-модели, когда  $\Sigma(g) \propto 1/g$ , интеграл столкновений в уравнении Больцмана принимает вид

$$\frac{f_a(v) - f(v)}{\tau},$$

где  $\tau$  — не зависящее от скорости среднее время между столкновениями. Пусть внешнее электрическое поле направлено по оси  $z$ . В случае СЕМ-модели распределение ионов по поперечным скоростям ( $v_\rho$ ) не меняется в ходе релаксации (остается максвелловским), и функцию распределения можно строить только на оси симметрии, т.е. при  $v_\rho = 0$ , и она зависит только от двух переменных  $v_z$  и  $t$ .

При обезразмеривании в качестве единицы измерения времени выберем  $\tau$ , а в качестве единицы измерения скорости — тепловую скорость  $v_T = \sqrt{2kT/m}$ . Тогда безразмерная напряженность электрического поля определяется следующим образом:

$$\epsilon(t) = \frac{eE(t)\tau}{\sqrt{2kTm}}, \quad (1)$$

где  $E(t)$  — напряженность внешнего электрического поля, а  $e$  — величина заряда электрона.

Для справки отметим, что если принять сечение рассеяния иона на атоме  $\Sigma = 5 \cdot 10^{-19} m^2$  [14], то значению  $\epsilon = 1$  при нормальных условиях будет соответствовать  $E/N \approx 23Td$ .

Уравнение Больцмана в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f(v_z, t)}{\partial t} + \epsilon(t) \frac{\partial f(v_z, t)}{\partial v_z} + f(v_z, t) = M(v_z), \quad (2)$$

где

$$M(v_z) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-v_z^2). \quad (3)$$

Пусть до момента  $t = 0$  электрическое поле равно нулю, а при  $t = 0$  поле включается и затем меняется по некоторому закону. Начальное распределение ионов — максвелловское (3)

$$f(v_z, 0) = M(v_z).$$

Конкретно рассмотрим периодическое электрическое поле вида

$$\epsilon(t) = \Theta(t)\epsilon_0 \cos(\omega t), \quad (4)$$

где  $\Theta(t)$  — функция скачка Хевисайда. В этом случае напряженность электрического поля сразу после включения принимает максимальное значение  $\epsilon_0$ , а затем совершает периодические гармонические колебания с частотой  $\omega$ .

Для решения уравнения (2) при включении в момент  $t = 0$  произвольного поля  $\epsilon(t)$  введем функцию

$$R(t) = \int_0^t \epsilon(t') dt'$$

и перейдем от переменных  $t, v_z$  к переменным  $t, Y = v_z - R(t)$ . Тогда в новых переменных

$$\tilde{M}(Y, t) = M(v_z) = M(Y + R(t)).$$

Обозначим  $\tilde{f}(Y, t) = f(v_z(Y, t), t)$  и рассмотрим полную производную

$$\frac{d\tilde{f}(Y, t)}{dt} = \frac{df(v_z(Y, t), t)}{dt} = \frac{\partial f(v_z, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(v_z, t)}{\partial v_z} \epsilon(t).$$

Здесь учтено, что  $\partial v_z / \partial t = \partial R(t) / \partial t = \epsilon(t)$ . Таким образом, уравнение Больцмана в новых переменных имеет вид

$$\frac{d\tilde{f}(Y, t)}{dt} + \tilde{f}(Y, t) = \tilde{M}(Y, t) \quad (5)$$

с начальным условием

$$\tilde{f}(Y, 0) = \tilde{M}(Y, 0) = M(Y). \quad (6)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (5) с начальным условием (6) в исходных переменных имеет вид

$$f(v_z, t) = \exp(-t) \left( \int_0^t \exp(x) M(Y + R(x)) dx + M(Y) \right), \quad (7)$$

$$Y = v_z - R(t).$$

При включении периодического гармонического поля (4) имеем  $R(t) = \epsilon_0 \sin \omega t / \omega$  и (7) преобразуется к виду

$$f(v_z, t) = \frac{M(Y)}{\exp(t)} \left( \int_0^t \exp(x - 2Y\epsilon_0 \sin(\omega x) / \omega - \epsilon_0^2 \sin^2(\omega x) / \omega^2) dx + 1 \right),$$

$$Y = v_z - \epsilon_0 \sin(\omega t) / \omega. \quad (8)$$

Обозначим период функции  $\sin(\omega t)$  через  $T_\omega = 2\pi / \omega$ . Количество периодов на промежутке от 0 до  $t$  будет равно  $s = [t/T_\omega]$ . Тогда весь интеграл в (8) разобьется на следующую сумму интегралов:

$$f(v_z, t) = \exp(-t)M(Y) \left( \sum_{k=0}^{s-1} S_k + Q + 1 \right), \quad (9)$$

где

$$S_k = \int_{kT_\omega}^{(k+1)T_\omega} \exp(x) \exp(-2Y\epsilon_0 \sin(\omega x) / \omega - \epsilon_0^2 \sin^2(\omega x) / \omega^2) dx,$$

$$Q = \int_{sT_\omega}^t \exp(x) \exp(-2Y\epsilon_0 \sin(\omega x) / \omega - \epsilon_0^2 \sin^2(\omega x) / \omega^2) dx.$$

В интеграле  $S_k$  сделаем замену переменной  $z = x - kT_\omega$ , а в интеграле  $Q$  замену  $z = x - sT_\omega$ . В результате получаем

$$S_k = \exp(kT_\omega)q(Y, T_\omega), \quad Q = \exp(sT_\omega)q(Y, t - sT_\omega),$$

где

$$q(Y, t) = \int_0^t \exp(z) \exp(-2Y\epsilon_0 \sin(\omega z) / \omega - \epsilon_0^2 \sin^2(\omega z) / \omega^2) dz.$$

Теперь сумма в (9) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{s-1} S_k = q(Y, T_\omega) \sum_{k=0}^{s-1} \exp(kT_\omega) = q(Y, T_\omega) \frac{\exp(sT_\omega) - 1}{\exp(T_\omega) - 1}.$$

Окончательно общее решение (8) имеет вид

$$f(v_z, t) = \exp(-t)M(Y) \left( q(Y, T_\omega) \frac{\exp(sT_\omega) - 1}{\exp(T_\omega) - 1} + \exp(sT_\omega)q(Y, t - sT_\omega) + 1 \right). \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что с учетом периодичности  $Y$  и  $t - sT_\omega$  функция (10) разделяется на периодическую и затухающую части следующим образом:

$$f(v_z, t) = f_p(v_z, t) + f_a(v_z, t),$$

$$f_p(v_z, t) = \exp(-(t - sT_\omega))M(Y) \times \left( \frac{q(Y, T_\omega)}{\exp(T_\omega) - 1} + q(Y, t - sT_\omega) \right), \quad (11)$$

$$f_a(v_z, t) = \exp(-t)M(Y) \left( -\frac{q(Y, T_\omega)}{\exp(T_\omega) - 1} + 1 \right),$$

$$Y = v_z - \epsilon_0 \sin(\omega t) / \omega. \quad (12)$$

Интегралы  $q(Y, T_\omega)$  и  $q(Y, t - sT_\omega)$  легко вычисляются.

Периодическая часть ФР для СЕМ-модели была построена в [4]. Рассматривались времена, далекие от момента включения поля, т.е. переходный процесс в этой работе не рассматривался. Авторы учитывали, что для СЕМ-модели отдельные группы (ансамбли) ионов, возникающие в один и тот же момент времени, имеют максвелловское распределение по скоростям. Кроме того, считалось, что за время между столкновениями происходил сдвиг ФР в пространстве скоростей за счет ускорения частиц полем. Число ионов в отдельном ансамбле со временем уменьшалось из-за столкновений экспоненциально по закону  $\exp(-t/\tau)$ . ФР полного ансамбля ионов находилась как суперпозиция функций распределения отдельных ансамблей. Полученное нами путем решения уравнения Больцмана выражение для периодической части ФР  $f_p$  после приведения к одинаковым единицам измерения совпало с выражением, полученным в [4]. В то же время подход на основе уравнения Больцмана позволил получить решение не только для чисто периодического, но и для переходного процесса.

К сожалению, авторы [4] не провели систематического исследования периодической части ФР. Ими были представлены только 3D-графики, из которых трудно понять, как влияют различные параметры задачи на функцию распределения ионов.

Возвращаясь к решению для ФР (7), отметим, что его можно применять не только к периодическому электрическому полю. В частности, из (7) легко получить решение для включения постоянного поля. Этот случай был подробно исследован нами в [7,8]. Было показано, что сразу после включения электрического поля с напряженностью  $\epsilon_0$  на ФР возникает возмущение сначала в области малых скоростей, в дальнейшем оно формируется в виде некоторого фронта, который распространяется в направлении положительных скоростей, причем скорость движения этого фронта  $dv_z/dt \propto \epsilon_0$ . Выход на стационарное решение в области очень больших  $v_z$  происходит за очень большое время.

Как известно [14], одним из основных методов решения уравнения Больцмана при наличии электрического поля является моментный метод. Применение этого

метода к расчету с высокой точностью ФР ионов в нестационарном процессе для нескольких моделей взаимодействия было продемонстрировано в работах [7–9].

В моментном методе проводится разложение ФР по сферическим полиномам Эрмита (функциям Барнетта)  $H_{rlm}^i$  [15]. В рассматриваемом нами случае ФР осесимметрична, и разложение проводится по  $H_{rl}$ :

$$f(\mathbf{v}, t) = M(v) \sum_{r,l} C_{rl}(t) P_l(\theta) S_{l+1/2}^r(v^2), \quad (13)$$

где  $P_l(\theta)$  — полиномы Лежандра, а  $S_{l+1/2}^r(v^2)$  — полиномы Сонина.

Хочется особо подчеркнуть важность нестационарного подхода. Дело в том, что для сходимости разложения (13) необходимо, чтобы ФР достаточно быстро убывала при стремлении скорости к бесконечности, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\int \exp(v^2) f^2(\mathbf{v}) d^3v < \infty. \quad (14)$$

При включении постоянного электрического поля в случае СЕМ-модели в ходе нестационарного процесса критерий (14) выполняется, а в стационарном состоянии не выполняется. Это связано с описанным выше поведением ФР в области больших скоростей. В результате не удастся построить ФР в стационарном состоянии, решая стационарные моментные уравнения.

Для решения стационарной системы моментных уравнений в [16] был предложен метод итераций. Мы убедились, что этим методом можно построить ФР только при очень малых напряженностях электрического поля  $\epsilon_0 < 0.2$ . При таких полях ФР мало отличается от решения Чепмена–Энскога, которое для СЕМ-модели имеет очень простой вид

$$f(\mathbf{v}) = M(v) (1 + \epsilon_0 \Phi(v_z)) \quad (15)$$

при  $\Phi(v_z) = 2v_z$  и не содержит высоких моментов.

В то же время при нестационарном подходе восстановление ФР по ее моментам как в ходе нестационарного процесса, так и в стационарном состоянии оказалось возможным в большом диапазоне времен даже при  $\epsilon_0 = 3$ .

Таким образом, моментный метод с привлечением очень большого количества моментов может быть использован для построения ФР в нестационарном процессе, в частности в периодическом электрическом поле, причем для произвольного сечения взаимодействия ионов с атомами.

Вообще говоря, зная ФР, можно, интегрируя ее с различными степенями компонент скоростей, построить такие физические моменты, как средняя скорость, энергия, давление и т.д. Однако при использовании моментного метода их можно выразить непосредственно через коэффициенты  $C_{rl}$ . Плотность электрического тока в размерном виде равна  $en_i v_T C_{01}/2$ , где  $n_i$  —

концентрация ионов. За единицу измерения плотности тока примем  $en_i v_T$ , тогда имеем  $j = C_{01}/2$ .

В случае СЕМ-модели моментные уравнения для  $C_{rl}$  оказываются рекуррентно разрешимыми [7], уравнение для  $C_{01}$  отщепляется и имеет вид

$$\frac{\partial C_{01}}{\partial t} + C_{01} = 2\epsilon(t). \quad (16)$$

Решая это уравнение при включении произвольного поля  $\epsilon(t)$ , получаем для плотности тока

$$j(t) = \frac{C_{01}(t)}{2} = \exp(-t) \int_0^t \exp(x) \epsilon(x) dx. \quad (17)$$

В рассматриваемом случае периодического гармонического поля (4) соответственно имеем

$$j(t) = j_p(t) + j_a(t),$$

где  $j_p(t)$  и  $j_a(t)$  — периодическая и аperiodическая части зависимости плотности тока от времени:

$$j_p(t) = \epsilon_0 \frac{\cos(\omega t - \arctg(\omega))}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad j_a(t) = -\epsilon_0 \frac{\exp(-t)}{1 + \omega^2}. \quad (18)$$

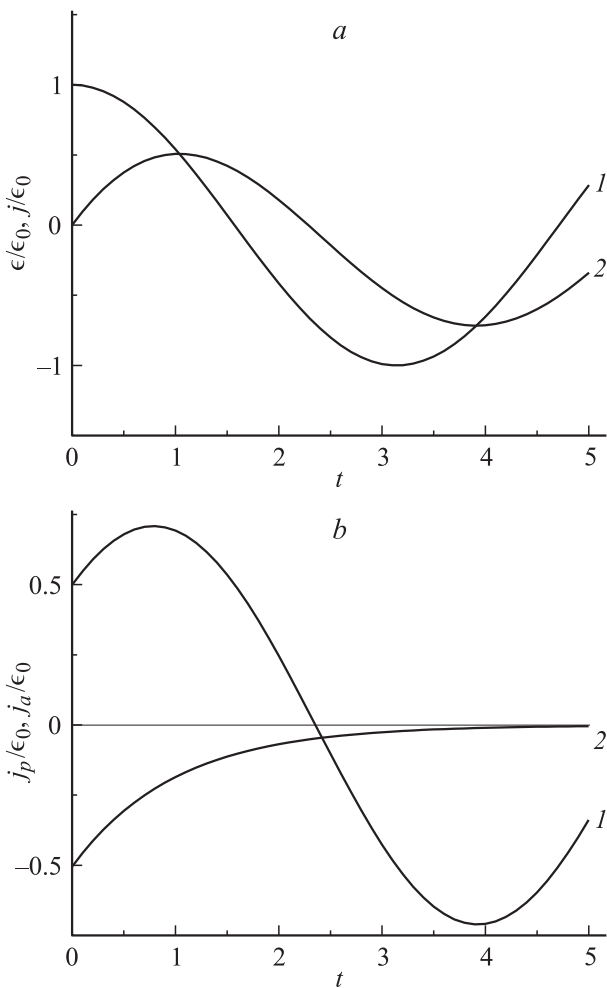
## 2. Анализ полученных решений

### 2.1. Плотность тока

Из (18) видно, что для СЕМ-модели характерна пропорциональность плотности тока  $j$  и амплитуды прикладываемого поля  $\epsilon_0$ . Амплитуда периодической части и максимальное значение аperiodической части плотности тока убывают с ростом частоты, причем второе убывает в  $\sqrt{1 + \omega^2}$  быстрее. После включения поля аperiodическая часть быстро убывает (как  $e^{-t}$ ) и за несколько единиц времени практически обращается в нуль. После этого процесс становится чисто периодическим. На рис. 1 для иллюстрации представлена зависимость плотности тока от времени при  $\omega = 1$ .

Для СЕМ-модели характерно, что колебания тока носят гармонический характер. Однако они сдвинуты по фазе относительно колебаний электрического поля на  $\Delta\varphi = -\arctg(\omega)$ , т.е. периодическая часть плотности тока имеет запаздывание по сравнению с полем. Отметим, что для СЕМ-модели  $\Delta\varphi$  не зависит от  $\epsilon_0$ . Этот сдвиг  $\Delta\varphi$  стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$  и стремится к  $-\pi/2$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . При  $\omega = 1$  имеем  $\Delta\varphi = -\pi/4$ . Если вспомнить, что в качестве единицы времени выбрано время между столкновениями  $\tau$ , то в размерных единицах фазовому сдвигу  $\Delta\varphi = -\pi/4$  соответствует  $\Omega\tau = 1$ . Здесь  $\Omega$  — размерная частота.

Наличие фазового сдвига и похожая зависимость  $\Delta\varphi(\omega)$  будут наблюдаться и для других сечений взаимодействия. Это может быть использовано для экспериментального определения среднего времени между столкновениями. Пусть между двумя электродами



**Рис. 1.** Зависимость  $j(t)/\epsilon_0$  при  $\omega = 1$ . *a* — сравнение  $j(t)/\epsilon_0$  — кривая 1, с  $\epsilon(t)/\epsilon_0$  — кривая 2; *b* — периодическая и аperiodическая части тока:  $j_p(t)/\epsilon_0$  — кривая 1,  $j_a(t)/\epsilon_0$  — кривая 2.

имеется газ с небольшой примесью ионов и между электродами приложено гармоническое напряжение, т.е. ионы находятся в периодическом гармоническом поле. Измеряя ионный ток, можно найти фазовый сдвиг между током и напряжением как функцию от частоты, найти  $\omega$ , соответствующую  $\Delta\varphi = -\pi/4$ , и определить  $\tau$ . Для использования такого метода определения  $\tau$  необходимо вычислить плотность тока при включении гармонического поля для других сечений взаимодействия. Это будет сделано в следующей работе.

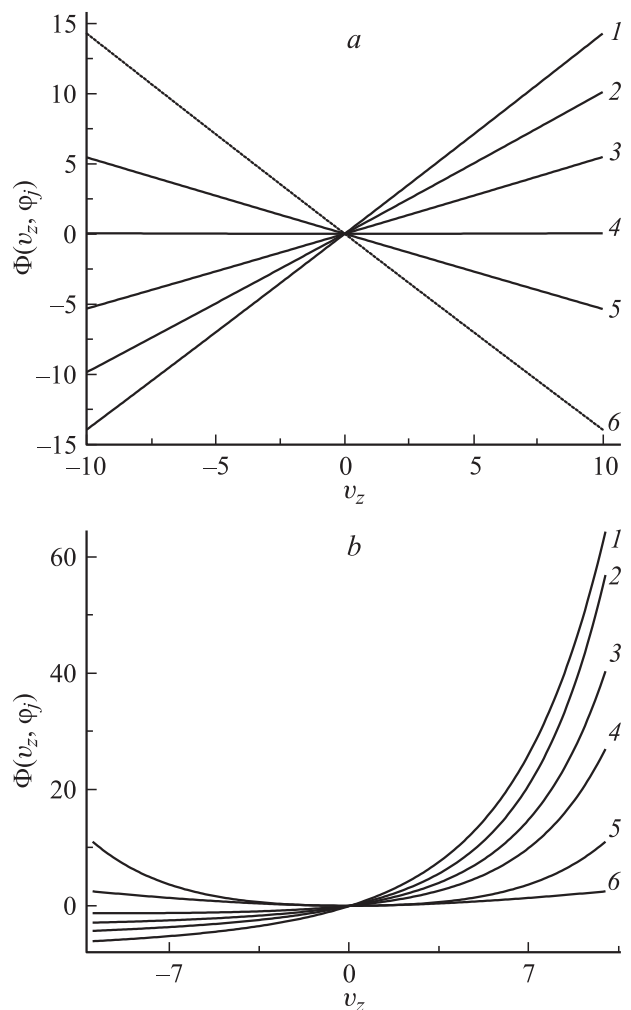
Поскольку с ростом частоты максимальное значение  $j_a$  убывает значительно быстрее, чем амплитуда  $j_p$ , при больших частотах ( $\omega \gg 1$ ) аperiodическая часть становится пренебрежимо малой, и с самого начала процесс можно считать периодическим. При  $\omega \ll 1$  аperiodическая часть затухает за время, много меньшее периода колебаний, и периодический процесс включается практически мгновенно. Таким образом, наиболее сильно аperiodическая часть плотности тока проявляется на временах порядка нескольких первых периодов при частотах  $\omega \approx 1$ .

Отметим, что, используя полученное решение (18), можно найти плотность тока при включении электрического поля произвольной формы. Действительно, такое поле можно разложить в ряд Фурье с гармониками, кратными основной. Каждой из этих гармоник будет соответствовать свое решение (18), и полная плотность тока найдется как сумма этих гармонических колебаний.

### 2.2. Периодическая часть функции распределения

При анализе периодической части ФР (11) удобно рассматривать времена, соответствующие определенной фазе плотности тока. Поэтому помимо фазы, соответствующей электрическому полю ( $\varphi_e = \omega t$ ), введем фазу, соответствующую плотности тока ( $\varphi_j = \omega t + \Delta\varphi$ ).

При малых амплитудах поля ( $\epsilon_0 \ll 1$ ) ФР близка к максвелловской и может быть представлена в виде (15). При  $\epsilon_0 \leq 0.01$  функция  $\Phi(v_z, t)$  пропорциональна  $v_z$ . На рис. 2 представлены графики функций  $\Phi(v_z, t)$  для двух значений  $\epsilon_0$  и  $\omega = 1$ , в качестве параметра вместо  $t$



**Рис. 2.** Функция  $\Phi(v_z)$  при разных фазах тока для *a* —  $\epsilon_0 = 0.001$  и *b* —  $\epsilon_0 = 0.1$ . Кривые: (1)  $\varphi_j = 0$ , (2)  $\varphi_j = \pi/4$ , (3)  $\varphi_j = 3\pi/8$ , (4)  $\varphi_j = \pi/2$ , (5)  $\varphi_j = 5\pi/8$ , (6)  $\varphi_j = \pi$ .

выбрано  $\varphi_j$ . При  $\epsilon_0 = 0.001$  (рис. 2, *a*) функция  $\Phi(v_z, t)$  представляет собой прямую, поворачивающуюся относительно начала координат.

При других  $\omega$  и  $\epsilon_0 \leq 0.01$  функция  $\Phi$  ведет себя аналогично, т.е. представляет собой прямую  $kv_z$ , где коэффициент наклона  $k$  зависит от  $\varphi_j$  и  $\omega$ . Этот коэффициент легко связать с плотностью тока. Действительно, умножив ФР (15) на  $v_z$  и проинтегрировав по  $v_z$ , получим

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} v_z M(v_z) \Phi(v_z) dv_z = k/2.$$

Таким образом, при очень малых  $\epsilon_0$  имеем

$$f_p(v_z, t) = M(v_z)(1 + 2j_p(t)v_z).$$

При увеличении поля ФР перестает быть такой простой. Уже при  $\epsilon_0 = 0.1$  и  $\omega = 1$  (рис. 2, *b*) функция  $\Phi(v_z, t)$  отклоняется от линейной и сильно искажается в области больших скоростей. При увеличении  $\epsilon_0$  функция  $f_p(v_z, t)$  еще сильнее изменяется и существенно зависит от  $\omega$ .

Влияние частоты  $\omega$  на  $f_p(v_z)$  в основном проиллюстрируем на примере очень сильного электрического поля ( $\epsilon_0 = 10$ ). На рис. 3 представлены зависимости  $f_p(v_z)$  для двух моментов времени, соответствующих максимальной ( $\varphi_j = 0$ ) и нулевой ( $\varphi_j = \pi/2$ ) плотностям тока. На рис. 3, *a, b* рассматриваются частоты  $\omega \leq 1$ , а на рис. 3, *c, d* —  $\omega \geq 1$ . При очень малых частотах  $\omega \ll 1$  (кривая 5, рис. 3, *a, b*) функция  $f_p(v_z)$  оказывается квазистационарной, т.е. ее вид мало отличается от стационарного решения, соответствующего мгновенному значению поля (кривая 6). Это объясняется тем, что при очень малых частотах среднее время между столкновениями много меньше периода колебаний поля, за время релаксации поле практически не меняется и ФР принимает в каждый момент времени  $t_0$  вид, соответствующий стационарному состоянию с постоянным полем, равным  $\epsilon_0(t_0)$ .

Продолжая рассмотрение частот  $\omega \leq 1$  (рис. 3, *a, b*), замечаем, что при  $\omega = 0.3$  в области очень больших скоростей на ФР наблюдается скачок. С ростом частоты ( $\omega \rightarrow 1$ ) положение скачка смещается в область меньших скоростей, а высота его растет (см. кривые 1–3 на рис. 3, *a*). Характерной особенностью этого скачка является очень резкое уменьшение ФР. Так, например, при  $\omega = 1$  с изменением  $v_z$  от 17.5 до 19.5  $f_p$  уменьшается на 3 порядка и еще на 8 порядков убывает при увеличении скорости до  $v_z = 22$ . При  $\varphi_j = \pi/2$  скачки также существуют, но их высота становится меньше и на рис. 3, *b* они не показаны.

Рассмотрим более детально изменение периодической части ФР со временем. Интересно это сделать для  $\epsilon_0 = 5$  и  $\omega = 1$ . На рис. 4 представлены зависимости  $f_p(v_z)$  при нескольких значениях  $\varphi_j$  для одного полупериода

( $0 \leq \varphi_j \leq \pi$ ). Периодическая часть ФР обладает свойством

$$f_p(v_z, t) = f_p(-v_z, t - T_\omega/2),$$

$$f_p(v_z, \varphi_j) = f_p(-v_z, \varphi_j - \pi),$$

что можно увидеть и на рис. 4: ФР в момент времени, соответствующий  $\varphi_j = \pi$  (штриховая кривая на рисунке), представляет собой отражение относительно оси  $v_z = 0$  ФР при  $\varphi_j = 0$ . В результате для любого момента времени  $\pi \leq \varphi_j \leq 2\pi$  может быть построена путем отражения ФР из интервала  $0 \leq \varphi_j \leq \pi$ .

Из рис. 4 видно, что в любой момент времени на ФР имеется скачок. На этом скачке величина ФР меняется на много порядков. В результате никогда не появляются ионы со скоростями выше некоторой предельной, которая в рассматриваемом случае равна примерно двенадцати тепловым. При  $\epsilon_0 = 10$  и  $\omega = 1$  предельная скорость равна примерно двадцати тепловым.

Возвращаясь к изучению влияния частоты на  $f_p(v_z)$  при  $\epsilon_0 = 10$ , замечаем, что при  $\omega \geq 1$  (рис. 3, *c, d*) с ростом  $\omega$  скачки продолжают смещаться влево и их высота продолжает возрастать. Здесь уже скачки хорошо видны при обеих фазах и их высота при  $\varphi_j = \pi/2$  меньше по сравнению с высотой при  $\varphi_j = 0$ , а положение почти совпадает.

При  $\omega = 10$  скачков не видно, а при  $\omega = 100$  ФР почти не отличается от максвеллиана (кривые 5 и 6 на рис. 3, *c, d*). Далее с ростом  $\omega$  функция распределения еще больше приближается к максвелловской. Мы численно нашли отклонение от максвеллиана и убедились, что при очень больших значениях  $\omega$  имеем

$$f_p(v_z) = M(v_z)(1 + \Phi(v_z, t)), \quad \Phi(v_z) = 2v_z j_p(t). \quad (19)$$

Из (18) видно, что при  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда периодической части тока пропорциональна малому параметру  $\alpha = \epsilon_0/\omega$ . Такой же параметр входит в общее решение для ФР (8). Если предположить, что  $\omega \gg 1$ , а  $\alpha \ll 1$ , то путем разложения в ряд по  $\alpha$  функции  $M(Y)$  и экспоненты под интегралом в (8) получим в первом приближении по  $\alpha$  для  $f_p(v_z, t)$  выражение (19).

Сравним полученное решение с бесстолкновительным режимом. В этом случае ток и ФР описываются соответственно уравнениями (16) и (2) или (5) с нулевыми столкновительными членами.

Для тока с использованием (4) получаем

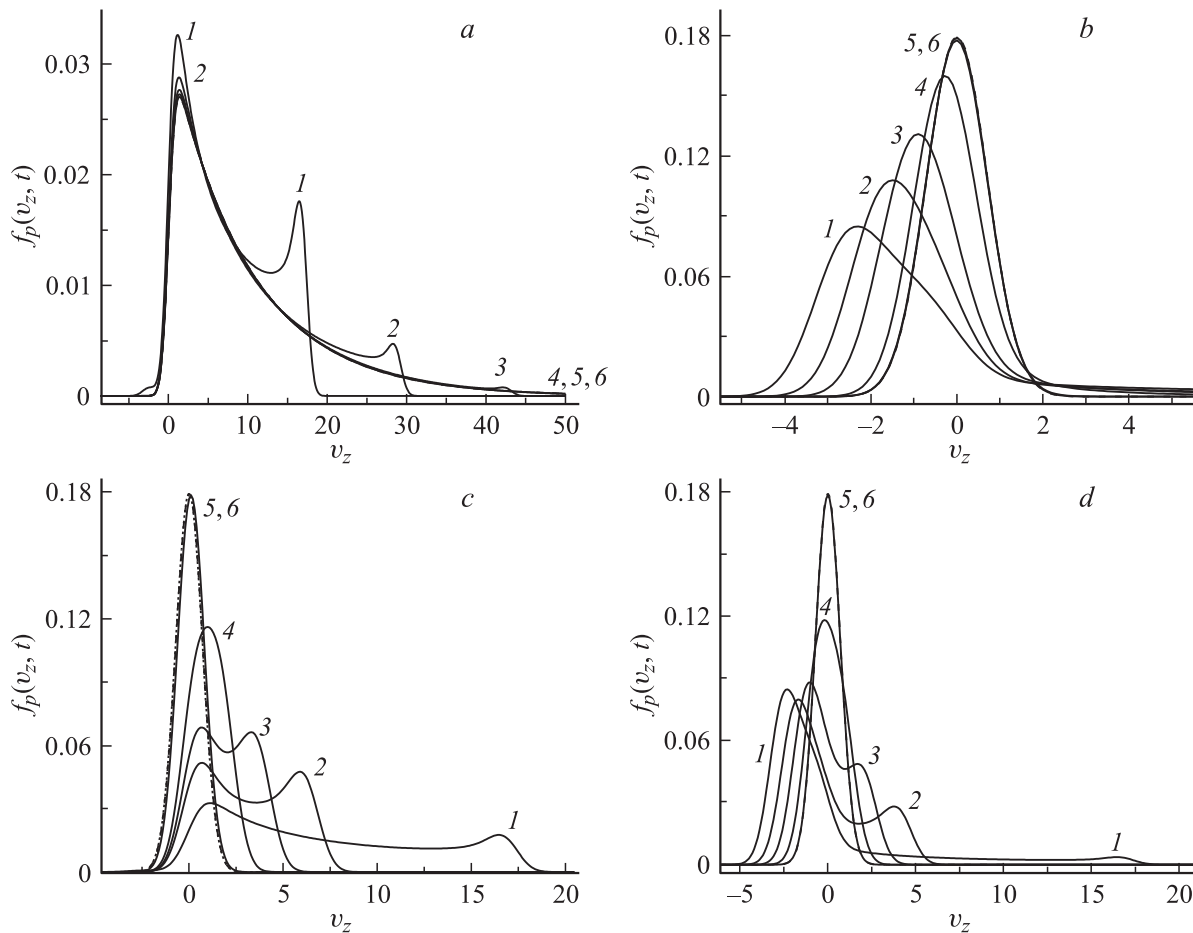
$$j(t) = \frac{C_{01}(t)}{2} = \int_0^t \epsilon(t) dt = \frac{\epsilon_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Из (5) получаем уравнение для ФР

$$\frac{d\tilde{f}(Y, t)}{dt} = 0, \quad \tilde{f}(Y, 0) = \tilde{M}(Y, 0) = M(Y). \quad (20)$$

Отсюда следует

$$\tilde{f}(Y, t) = M(Y), \quad f(v_z, t) = M\left(v_z - \frac{\epsilon_0}{\omega} \sin \omega t\right). \quad (21)$$



**Рис. 3.** Функция распределения  $f_p(v_z)$  при  $\epsilon_0 = 10$  и различных значениях частоты поля; (а, с) —  $\varphi_j = 0$  (максимальная плотность тока  $j_p$ ), (b, d) —  $\varphi_j = \pi/2$  ( $j_p = 0$ ). Кривые на (а, b): 1 —  $\omega = 1$ , 2 — 0.5, 3 — 0.3, 4 — 0.1, 5 — 0.01; кривая б — штриховая — на (а) стационарное решение при  $\epsilon = 10$ , на (b) максвеллиан — стационарное решение при  $\epsilon = 0$ . Кривые на (с, d): 1 —  $\omega = 1$ , 2 — 3, 3 — 5, 4 — 10, 5 — 100, 6 — штриховая — максвеллиан.

При малом  $\alpha = \epsilon_0/\omega$  имеем

$$f(v_z, t) = M(v_z)(1 + 2\alpha v_z \sin \omega t) = M(v_z)(1 + 2v_z j(t)).$$

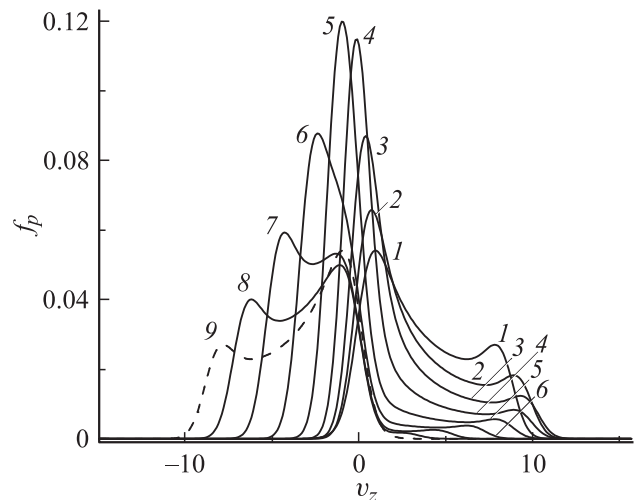
Следовательно, при  $\omega \rightarrow \infty$  периодическая часть столкновительного решения (18) и (19) совпадает с бесстолкновительным решением.

Интересно, что параметр  $\alpha$  не зависит от частоты столкновений и легко выражается через размерные напряженность электрического поля и частоту

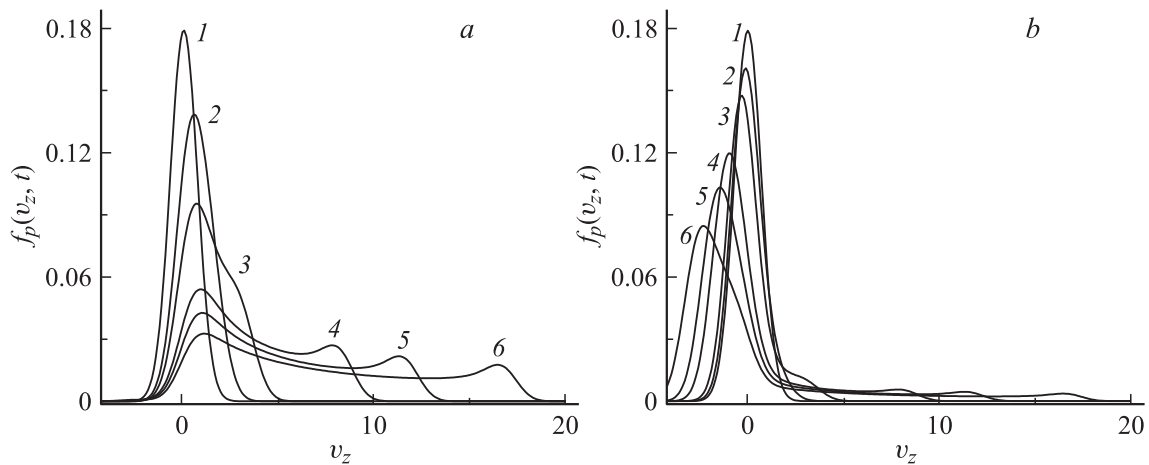
$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{\omega} = \frac{eE_0}{\Omega\sqrt{2kTm}} = \frac{a}{\Omega v_T}, \quad (22)$$

где  $a = eE_0/m$  — ускорение, которое получают ионы при бесстолкновительном движении в поле  $E_0$ .

При отсутствии столкновений в периодическом электрическом поле ФР имеет вид максвеллиана, температура которого постоянна и равна начальной, а средняя скорость совершает колебания с амплитудой  $\alpha$  (21). Следовательно, при фиксированном значении  $E_0$  с ростом  $\Omega$  амплитуда колебаний ионов убывает. Это легко объяснить. В течение полупериода поле не меняет



**Рис. 4.** Функция распределения  $f_p(v_z)$  при  $\epsilon = 5$ ,  $\omega = 1$  и различных значениях  $\varphi_j$ . Кривые: 1 —  $\varphi_j = 0$ , 2 —  $\pi/8$ , 3 —  $\pi/4$ , 4 —  $3\pi/8$ , 5 —  $\pi/2$ , 6 —  $5\pi/8$ , 7 —  $3\pi/4$ , 8 —  $7\pi/8$ , 9 — штриховая  $\varphi_j = \pi$ .



**Рис. 5.** Функция распределения  $f_p(v_z)$  при  $\omega = 1$  и различных амплитудах  $\epsilon_0$ : 1 —  $\epsilon_0 = 0$ ; 2 —  $\epsilon_0 = 1$ ; 3 —  $\epsilon_0 = 2$ ; 4 —  $\epsilon_0 = 5$ ; 5 —  $\epsilon_0 = 7$ ; 6 —  $\epsilon_0 = 10$  и различных фаз тока: (a) —  $\varphi_j = 0$ , (b) —  $\varphi_j = \pi/2$ .

направления и ионы ускоряются в одном направлении. Если частота невелика, то за полупериод ионы могут приобрести достаточно большую скорость. Ограничение скорости связано с тем, что по истечении полупериода направление поля меняется и ионы начинают ускоряться в противоположном направлении. При очень высоких частотах максимальная скорость, которую ионы могут приобрести, оказывается очень малой, и ФР мало отличается от максвелловского распределения атомов. Подобный механизм действует и в столкновительном режиме, что и приводит к уменьшению отклонения от равновесия при больших частотах.

Именно периодическое изменение направления электрического поля приводит к тому, что и при  $\omega \approx 1$  не появляются ионы со скоростями выше некоторой предельной скорости. Не успев разогнаться в одном направлении, ионы начинают тормозиться и разворачиваться в противоположном направлении. В результате скачки на ФР сохраняются в течение всего периода. Кроме того, можно утверждать, что независимо от сечения взаимодействия при больших частотах и при малых значениях  $\alpha$  ФР будет слабо отклоняться от максвелловской.

Следовательно, независимо от сечения взаимодействия при больших частотах решение выходит на бесстолкновительное, а при малых значениях  $\alpha$  слабо отклоняется от максвелловского.

На рис. 5 показано, как при  $\omega = 1$  влияет на периодическую часть ФР величина  $\epsilon_0$ . Слева представлены ФР для  $\varphi_j = 0$ , а справа для  $\varphi_j = \pi/2$ . Видно, что в обоих случаях с ростом амплитуды поля наблюдается сильное увеличение ФР в области больших скоростей. Однако при  $\varphi_j = 0$  это увеличение больше, чем при  $\varphi_j = \pi/2$ .

### 2.3. Аперриодическая часть функции распределения

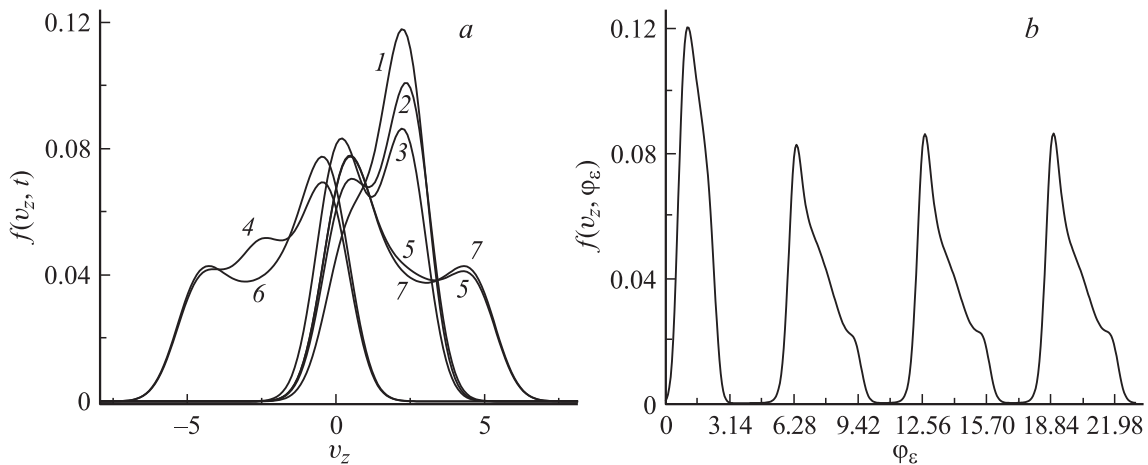
Так же как и в случае плотности тока (1), аперриодическая часть ФР отлична от нуля примерно до трех

времен релаксации. При низких частотах это соответствует малой доле первого периода и дает вклад только на маленьком участке первого периода. При больших частотах амплитуда аперриодической части много меньше амплитуды периодической части и аперриодическая часть мало влияет на полную ФР. Основное же влияние аперриодической части происходит при частотах порядка единицы.

На рис. 6, а представлена полная функция распределения при  $\omega = 2$  и  $\epsilon_0 = 5$  в разные моменты времени, которым соответствуют разные значения  $\varphi_\epsilon = \omega t$ . На первом периоде видно сильное влияние аперриодической части ФР. Так, при  $\varphi_\epsilon = \pi/2$  в окрестности  $v_z = 2.35$  наблюдается высокий пик на функции распределения (штриховая линия на рис. 6, а). Для сравнения на кривых 1 и 3 представлены ФР при  $\varphi_\epsilon = 0.4\pi$  и  $0.6\pi$ . Видно, что до максимальных скоростей на первом периоде ионы разгоняются именно при  $\varphi_\epsilon = \pi/2$ . В дальнейшем (кривая 3) фронт на ФР смещается в сторону меньших скоростей. При  $\varphi_\epsilon = 1.5\pi$  (см. кривая 4) происходит максимальное смещение в область отрицательных скоростей и все еще заметно влияние аперриодической части ФР — кривая 4 заметно отличается от кривой 6, соответствующей  $\varphi_\epsilon = 3.5\pi$ . Небольшое влияние аперриодической части наблюдается даже в начале второго периода — кривая 5 ( $\varphi_\epsilon = 2.5\pi$ ) не полностью совпадает с кривой 7 ( $\varphi_\epsilon = 4.5\pi$ ). И только начиная с середины второго периода ( $\varphi_\epsilon \propto 3\pi$ ) ФР становится периодической функцией по времени. Это хорошо видно на рис. 6, б.

Таким образом, при  $\omega \approx 1$  вид ФР на первом периоде сильно отличается от ФР на последующих периодах. В основном это отличие проявляется в величине предельной скорости, до которой разгоняются ионы. Так, в рассмотренном примере на первом периоде предельная скорость  $v_{\text{lim}} \approx 4.5$ , а на последующих  $v_{\text{lim}} \approx 7$  (рис. 6). Если внешнее электрическое поле приложить только в течение небольшого времени, например в течение четверти периода, то возникнет одиночный положительный импульс ионного тока, и функция распределения во





**Рис. 6.** Функция распределения *a* —  $f(v_z, \omega t)$  и *b* —  $f(v_z, \omega t)$ ,  $v_z = 2.35$  при  $\epsilon_0 = 5$ ,  $\omega = 2$ . Кривые: 1 —  $\phi_\epsilon = 0.4\pi$ , 2 штриховая —  $0.5\pi$ , 3 —  $0.6\pi$ , 4 —  $1.5\pi$ , 5 —  $2.5\pi$ , 6 —  $3.5\pi$ , 7 —  $4.5\pi$ .

время этого импульса будет сильно отличаться от ФР во время положительных импульсов тока в периодическом поле.

### 3. Ток на зонд с задерживающим потенциалом

Наличие скачков на ФР и существование при фиксированных значениях  $\omega \approx 1$  и  $\epsilon_0$  предельной скорости, выше которой ионов фактически не существует, можно наблюдать, если измерять ток на зонд с задерживающим потенциалом. Сделать это можно, например, следующим образом. Пусть между двумя плоскими электродами, один из которых заземлен, находится газ с небольшой примесью ионов. Ко второму электроду в некоторый момент времени прикладывается переменное гармоническое напряжение так, что в момент включения напряжение принимает максимальное значение. Заземленный электрод выполнен в виде сетки или диафрагмы, и с внешней стороны параллельно ему расположен еще один электрод (зонд), на который подан отрицательный потенциал  $V_r$  относительно сетки. Поверхности зонда достигают только те ионы, которые движутся по направлению к зонду и имеют кинетическую энергию, достаточную для преодоления задерживающего потенциала. Ионы на зонд будут попадать только в течение какого-то отрезка времени внутри полупериода, т.е. на зонде будут формироваться некоторые импульсы тока.

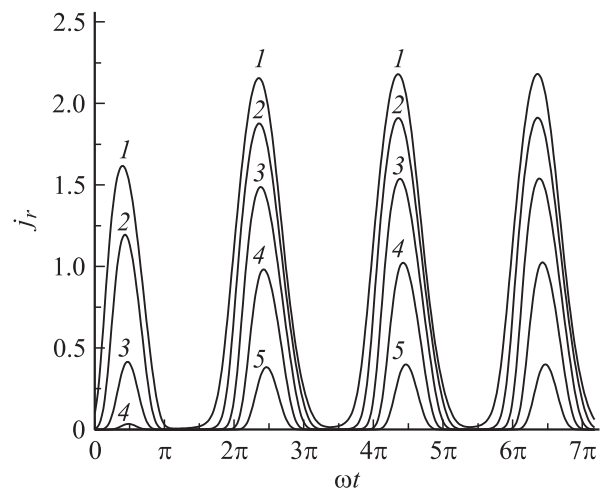
Потенциалу  $V_r$  соответствует скорость  $v_r = \sqrt{2e|V_r|/m}$  или в безразмерном виде  $v_r = \sqrt{|\eta_r|}$ , где  $\eta_r = eV_r/kT$ . Величина плотности ионного тока на зонд определяется как

$$j_r = \int_{v_r}^{\infty} v_z \left( 2\pi \int_0^{\infty} f(\mathbf{v}) v_\rho dv_\rho \right) dv_z, \quad (23)$$

где  $v_z$  и  $v_\rho$  — аксиальная и радиальная компоненты скорости соответственно.

С использованием (23) был рассчитан ток на зонд при различных значениях  $\epsilon$ ,  $\omega$  и  $v_r$ . На рис. 7 представлены результаты расчетов для  $\epsilon_0 = 5$  и  $\omega = 2$ . Видно, что с увеличением потенциала задержки  $\eta_r$  и соответственно скорости  $v_r$  происходит уменьшение амплитуды импульсов на зонд. При превышении задерживающим потенциалом некоторой критической величины импульс практически исчезает. Первый импульс, связанный с аperiodическим процессом, исчезает при  $v_r = 5$ . Второй и все последующие импульсы исчезают при значительно большем  $v_r$ . До такого же уровня, как первый импульс при  $v_r = 5$ , последующие импульсы уменьшаются при  $v_r = 7.2$ , т.е. исчезновение периодических импульсов происходит при потенциале задержки  $\eta_r$ , примерно в 2 раза большим, чем  $\eta_r$ , соответствующее исчезновению первого импульса.

Такое сильное отличие в отсечке первого и последующих импульсов, а также очень резкое исчезновение импульсов при росте  $\eta_r$  характерны для  $\omega \approx 1$ . При



**Рис. 7.** Плотность тока на зонд для  $\epsilon = 5$  и  $\omega = 2$  и при разных значениях  $v_r$ . 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3, 4 — 4, 5 — 5.

переходе к меньшим  $\omega$  некоторое время сохраняется отличие в форме первого и последующих импульсов. Однако исчезают они почти при одинаковом потенциале задержки, и уменьшение амплитуды импульсов происходит довольно медленно. Если переходить к  $\omega > 1$ , то амплитуда импульсов и критический потенциал задержки убывают с ростом  $\omega$ , и отличие первого импульса от последующих исчезает. Все это связано с описанными в предыдущем разделе особенностями ФР.

Если при фиксированных  $\omega$  и  $\eta_r$  увеличивать  $\epsilon_0$ , то амплитуда импульса возрастает. С ростом  $\epsilon_0$  величины критических  $\eta_r$ , соответствующих исчезновению первого и последующих импульсов, также возрастают.

Различие в поведении амплитуд первого и последующих импульсов при  $\omega \approx 1$  будет иметь место при любом сечении взаимодействия, но при каждом сечении вид зависимости амплитуд импульсов от  $\eta_r$  будет разным. Также следует ожидать различий в длительности, форме и моменте появления этих импульсов.

Следовательно, регистрация импульсов на зонд с задерживающим потенциалом и их анализ могут стать способом изучения сечений рассеяния ионов на атомах при низких энергиях.

Использование такого метода диагностики требует решения кинетического уравнения для произвольных сечений взаимодействия. Таким образом, расчет ФР ионов в периодическом электрическом поле представляет собой актуальную задачу. Полученное аналитическое решение для СЕМ-модели можно считать первым, достаточно важным шагом на этом пути.

## Заключение

В случае резонансной перезарядки ионов на атомах с постоянной частотой столкновений (СЕМ-модели) получено аналитическое решение задачи о поведении ФР ионов после включения периодического электрического поля.

Исследованы зависимости ФР и плотности тока от амплитуды электрического поля, частоты и фазы.

Показано, что как ФР, так и плотность тока делятся на переходную — аperiодическую и периодическую части. Оказалось, что зависимость периодической части тока от времени носит такой же синусоидальный характер, как и зависимость поля от времени, но имеется фазовый сдвиг  $\Delta\varphi$ , который меняется от 0 до  $\pi/2$ , причем фазовому сдвигу  $\Delta\varphi = \pi/4$  соответствует  $\Omega\tau = 1$ . Экспериментальное измерение фазового сдвига тока относительно поля позволит определить время релаксации  $\tau$ .

Проведенный анализ функции распределения ионов по скоростям на различных этапах развития процесса показал:

1. При  $\omega \approx 1$  в области больших скоростей наблюдаются скачки, на которых ФР меняется на несколько порядков.

2. При низких частотах периодическая часть ФР является квазистационарной и ее поведение в области

больших скоростей не отличается от поведения соответствующих стационарных ФР, т. е. представляет собой достаточно гладкую функцию.

3. При высоких частотах ФР мало отличается от максвелловской, и в области больших скоростей ионов практически нет.

4. При достаточно большой напряженности поля ( $\epsilon > 1$ ) и частотах  $\omega \approx 1$  в переходной части ФР на первом периоде обнаружены аномальные импульсы.

Ряд результатов имеет общий характер и не зависит от модели взаимодействия. К ним относится, например, вывод об увеличении фазового сдвига, уменьшении амплитуды тока с ростом частоты и существование скачков на ФР при  $\omega \approx 1$ .

Предложен метод изучения сечения рассеяния, основанный на особенностях ФР при больших скоростях в периодическом электрическом поле.

Разработанный нами метод расчета матричных элементов вместе с развитым нестационарным моментным методом решения уравнения Больцмана позволяет получить аналогичные результаты для других сечений взаимодействия, что мы сделаем в следующей работе.

Работа поддержана грантами РФФИ № 10-08-00924 и № 12-08-00490.

## Список литературы

- [1] *Maneschijn A., Goedheer W.J.* // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 69. P. 2923–2930.
- [2] *Kypers A.D., Hopman H.J.* // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 63. P. 1894–1898.
- [3] *Chen F.F., Chang J.P.* Lecture Notes on principles of plasma processing. Springer, 2003. 208 p.
- [4] *Liberman M.A., Lichtenberg A.J.* Principles of Plasma Discharge and Material Processing. Wiley Interscience, Hoboken, NJ. 2005. 800 p.
- [5] *Buryakov I.A., Krylov E.V., Nazarov E.G., Rasulev U.Kh.* // Int. J. Mass Spec. Ion Proc. 1993. Vol. 128. P. 143–148.
- [6] *Li B., Robson R.E., White R.D.* // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 026405.
- [7] *Ender A.Y., Ender I.A., Gerasimenko A.B.* // The Open Plasma Phys. J. 2009. Vol. 2. P. 24–62.
- [8] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 8–17.
- [9] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Герасименко А.Б.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 18–28.
- [10] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб., 2003. 224 с.
- [11] *Robson R.E., Makabe T.* // Aus. J. Phys. 1994. Vol. 47. P. 305–314.
- [12] *Sugawara H., Tagashira H., Sakai Y.* // J. Phys. D. App. Phys. 1996. Vol. 29. P. 1168–1174.
- [13] *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* // Phys. Rev. 1954. Vol. 94. P. 511–525.
- [14] *Mason E.A., McDaniel E.W.* Transport Properties of Ions in Gases. N.Y.: Wiley, 1988. 489 p.
- [15] *Burnett D.* // Proc. London Math. Soc. 1935. Vol. 40. P. 382–435.
- [16] *Kihara T.* // Rev. Mod. Phys. 1953. Vol. 25. P. 844–852.