

01
Построение составного хаотического мультиаттрактора на основе асимметричных хаотических аттракторов

© В.Г. Прокопенко

Южный федеральный университет,
 344006 Ростов-на-Дону, Россия
 e-mail: vadipro@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 18 ноября 2011 г. В окончательной редакции 10 сентября 2012 г.)

Представлен способ построения хаотических мультиаттракторов, объединяющих нескольких копий исходного хаотического аттрактора, имеющего асимметричную форму.

Дискретное строение многих природных объектов, а также широкое применение методов системного анализа, иногда приводит к необходимости использования в создаваемых моделях так называемых хаотических мультиаттракторов [1–5] — некоторых множеств взаимодействующих нестационарных областей притяжения (локальных хаотических аттракторов), в среде которых полностью или частично происходит эволюция состояния исследуемой модели [6,7].

Однако в настоящее время известны способы построения хаотических мультиаттракторов, объединяющих аттракторы лишь немногих простейших модельных динамических систем, отличающихся тем, что их хаотические аттракторы имеют симметричную форму в фазовом пространстве системы [1–5,8–11]. Это отчасти объясняется тем, что к использованию хаотических мультиаттракторов обращаются преимущественно в тех случаях, когда основной интерес представляет изучение нестационарной составляющей динамики связей между структурными элементами исследуемой системы, а описание самих элементов допустимо в самых общих чертах [6,7,12–16]. Более существенным ограничением является фактическое отсутствие методов и подходов к построению мультиаттракторов, объединяющих хаотические аттракторы произвольных динамических систем.

Применение методов хаотической динамики в технической физике, как правило, требует детального учета особенностей структурных элементов исследуемых физических систем. То есть здесь мультиаттракторы должны строиться на базе хаотических аттракторов с наперед заданными свойствами. А отличительной чертой хаотических аттракторов, отвечающих реальным физическим объектам или явлениям, нередко является отсутствие какой бы то ни было симметрии в фазовом пространстве исследуемой системы [17–20].

В связи с этим представляет интерес разработка методов и подходов, позволяющих строить составные хаотические мультиаттракторы на основе асимметричных хаотических аттракторов произвольной формы.

Примером физически реализуемой динамической системы с полностью асимметричным хаотическим аттрактором является топологический аналог схемы Чуа с нелинейной емкостью [21]. Динамику этого генератора

описывают безразмерные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = z + \lambda y - x, \\ \frac{dy}{d\tau} = A \frac{x + \lambda(C-1)y}{\lambda k + \lambda x + (C-1)y}, \\ \frac{dz}{d\tau} = -Bx, \end{cases} \quad (1)$$

где k, A, B, C — положительные вещественные константы, $|\lambda| = 1$.

Рассмотрим, построение хаотического мультиаттрактора, состоящего из аттрактора системы (1), наблюдающегося в случае $A = 7.1, B = 5, C = 0.8, k = 1.4, \lambda = 1$ (при этом старший характеристический показатель Ляпунова равен приблизительно 0.12), и нескольких его копий. Для построения такого мультиаттрактора необходимо, во-первых, преобразовать исходные уравнения к такому виду, чтобы полученная динамическая система имела несколько хаотических аттракторов, и, во-вторых, создать условия для того, чтобы движение могло время от времени переходить с одного аттрактора на другой.

Проще всего получить несколько аттракторов, идентичных аттрактору исходной системы. Для этого достаточно заменить хотя бы одну независимую переменную в уравнениях движения специальной нелинейной функцией этой переменной, состоящей из последовательно расположенных линейных сегментов с единичным наклоном, разделенных разрывами первого рода или соеди-

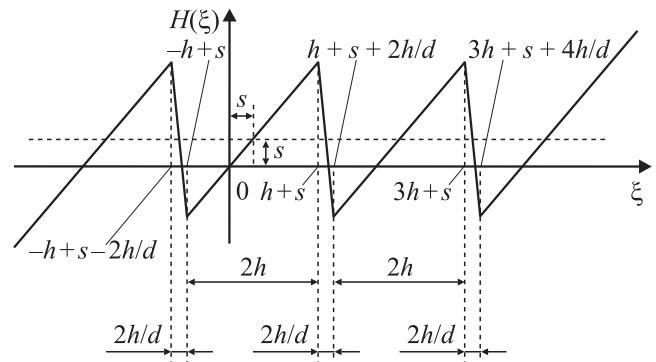


Рис. 1. „Редуплицирующая“ функция $H(\xi)$ (2) при $M = 2, N = 1$.

ненных дополнительными „промежуточными“ сегментами, например, более крутыми линейными сегментами с противоположным наклоном (рис. 1). В последнем случае такую функцию можно представить следующим уравнением:

$$H(\xi) = \xi + V(\xi), \quad (2)$$

где ξ — независимая переменная, заменяемая кусочно-линейной функцией $H(\xi)$,

$$V(\xi) = (d + 1) \left\{ P \left(\xi - s + h + \frac{h}{d} \right) + P \left(\xi - s - h - \frac{h}{d} \right) - \sum_{m=0}^M \left[P \left(\xi - s - (2m - 1) \left(h + \frac{h}{d} \right) \right) + \frac{h}{d} \right] - \sum_{n=0}^N \left[P \left(\xi - s + (2n - 1) \left(h + \frac{h}{d} \right) \right) - \frac{h}{d} \right] \right\}, \quad (3)$$

$P(\psi) = \frac{1}{2} (|\psi + \frac{h}{d}| - |\psi - \frac{h}{d}|)$, d, h, s — вещественные коэффициенты, M, N — целые неотрицательные числа. Коэффициент h задает протяженность сегментов с единичным наклоном по аргументу, коэффициент s — смещение их середины относительно точки пересечения с осью $O\xi$, коэффициент d задает наклон „соединительных сегментов“.

Заменяем в уравнениях (1) переменную x функцией $H_1(x)$ (с параметрами M_1, N_1, h_1, d_1, s_1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = z + \lambda y - H_1(x), \\ \frac{dy}{d\tau} = A \frac{H_1(x) + \lambda(C - 1)y}{\lambda k + \lambda H_1(x) + (C - 1)y}, \\ \frac{dz}{d\tau} = -BH_1(x). \end{cases} \quad (4)$$

Функция $H_1(x)$ разбивает фазовое пространство системы (4) на слои, параллельные плоскости $x = 0$. Сегментам функции $H_1(x)$ с единичным наклоном соответствуют слои толщиной $2h_1$, сегментам с наклоном d_1 — слой толщиной $2h_1/d_1$.

Внутри каждого слоя, соответствующего сегменту функции $H_1(x)$ с единичным наклоном, воспроизводится фрагмент фазового пространства, идентичный фазовому пространству исходной системы (1). Действительно, пока значение переменной x лежит в интервале $[-h_1 - s_1; h_1 - s_1]$, т.е. находится в пределах центрального, проходящего через начало координат, сегмента функции $H_1(x)$, уравнения (3) ничем не отличаются от уравнений (1), так как в этом случае $H_1(x) = x$. Если же значение x находится в пределах любого другого сегмента с единичным наклоном, то $H_1(x) = x - x_k$ — вследствие того, что k -й линейный сегмент с единичным наклоном смещен относительно центрального сегмента

по оси x на интервал $x_k = 2kh_1(1 + \frac{1}{d_1})$. В этом случае уравнения (4) имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = z + \lambda y - x + x_k, \\ \frac{dy}{d\tau} = A \frac{x - x_k + \lambda(C - 1)y}{\lambda k + \lambda(x - x_k) + (C - 1)y}, \\ \frac{dz}{d\tau} = -B(x - x_k). \end{cases} \quad (5)$$

Если сделать замену переменных $x_1 = x - x_k$, и учесть, что $\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}$, получим систему уравнений, записанную относительно переменных (x_1, y, z) , которая ничем не отличается от уравнений (1). Поэтому при движении на k -м сегменте с единичным наклоном воспроизводится исходный хаотический аттрактор, смещенный относительно аттрактора системы (1) на интервал x_k по оси x .

Функция (2) содержит $1 + M + N$ линейных сегментов с единичным наклоном. То есть замена в уравнениях движения независимой переменной на функцию (2) этой переменной приводит к образованию дополнительно $M + N$ аттракторов, являющихся копиями исходного аттрактора.

Чтобы обеспечить взаимодействие отдельных аттракторов и, таким образом, объединить их в единый мультиаттрактор, необходимо наличие возможности переходов фазовых траекторий между ними. Для этого нужно, чтобы траектории могли покидать аттрактор. Эту задачу можно решить путем такого изменения геометрии слоев (в общем случае — ячеек) фазового пространства, чтобы содержащийся в ячейке аттрактор имел пересечения с ее границами. Тогда, попав в область пересечения, фазовая траектория может покинуть аттрактор и перейти в соседнюю ячейку. Если она при этом окажется в области притяжения находящегося в ней аттрактора, то перейдет на этот аттрактор.

На рис. 2, *a, b* показана такая ситуация для системы (4) при $M_1 = 0, N_1 = 1, h_1 = 2.525, d_1 = 30, s_1 = -0.115$, т.е. в том случае, когда функция $H_1(x)$ содержит только два линейных сегмента (рис. 2, *a*) и соответственно имеет два хаотических аттрактора, пересекающихся с границами содержащих их ячеек фазового пространства (рис. 2, *b*). Для данной системы условия перехода траекторий на соседний аттрактор выполняются только в случае перехода из ячейки $A0$ в ячейку $A1$. При обратном переходе (из ячейки $A1$ в ячейку $A0$) траектория оказывается вне области притяжения аттрактора в ячейке $A0$, и система теряет устойчивость.

Эта зависимость характера перехода траекторий через границы ячеек от направления перехода обусловлена асимметрией аттрактора системы (1). Она существенно затрудняет построение составных мультиаттракторов на базе асимметричных хаотических аттракторов.

Однако ее влияние можно значительно уменьшить, обеспечив такое взаимное расположение соседних аттракторов, чтобы они находились „на пути“ траекторий при их переходе в соседнюю ячейку. Например, в

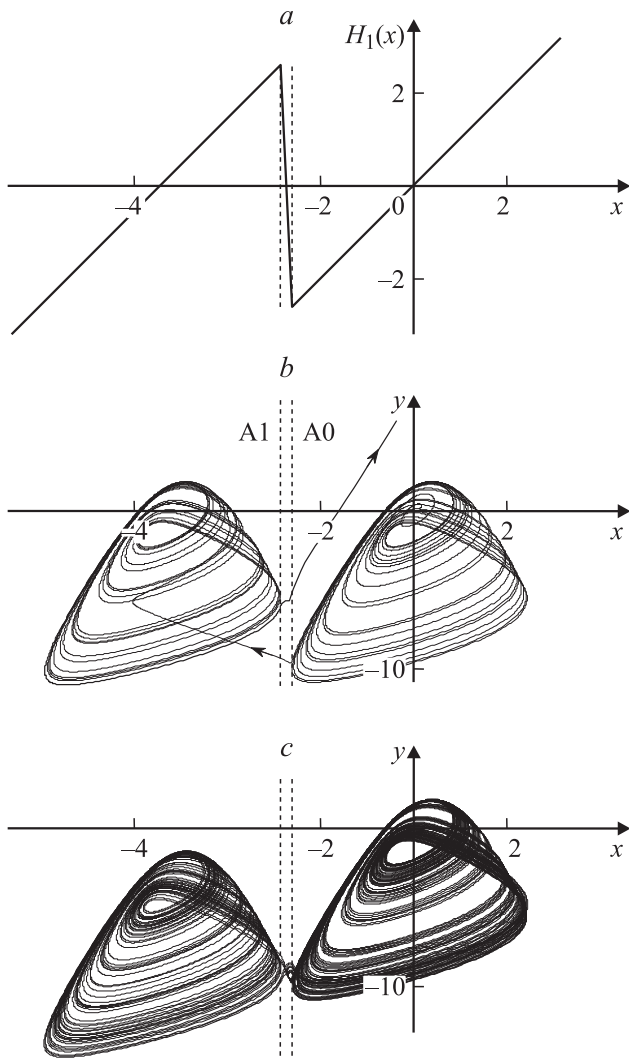


Рис. 2. Образование копии исходного хаотического аттрактора под действием „редуплицирующего“ оператора $H_1(x)$ (a, b) и объединение двух хаотических аттракторов в единый хаотический мультиаттрактор (c).

случае разрывной „редуплицирующей“ функции (2), (3) (при $d \rightarrow \infty$) этого можно добиться путем совмещения областей пересечения соседних аттракторов с границей ячеек. В этом случае, если размеры обоих сечений примерно одинаковы, фазовые траектории после перехода в соседнюю ячейку фазового пространства будут выходить либо непосредственно на соседний аттрактор, либо в его ближайшую окрестность, находящуюся внутри области притяжения этого аттрактора. (При наличии „промежуточных“ сегментов, очевидно, нужно дополнительно учитывать смещение фазовых траекторий при их движении внутри слоев фазового пространства, отвечающих этим сегментам).

Для реализации этого приема необходимо обеспечить смещение копий исходного аттрактора не только по координате „редупликации“ ξ (это достигается изменением константы h), но и по любой другой координате.

Так, в случае уравнений (4) для объединения исходного аттрактора и его копий в единый мультиаттрактор последние необходимо дополнительно сместить еще и по координате y .

Эту задачу можно решить заменой остальных независимых переменных (обозначим их χ) функциями вида

$$H_s(\chi, \xi) = \chi + \frac{g_\chi V(\xi)}{2h(1 + \frac{1}{d})}, \quad (6)$$

где функция $V(\xi)$ определена выражением (3), g_χ — константа, задающая величину смещения по координате χ .

Функция (6) обеспечивает параллельный перенос копий исходного аттрактора по координате χ в зависимости от значения переменной ξ . Например, если в уравнениях (4) заменить независимую переменную y функцией $H_s(y, x)$ с параметрами $g_y = 3, 3$, $h_1 = 2.525$, $d_1 = 30$, $s_1 = -0.115$, то локальные аттракторы займут такое взаимное положение, что области их пересечения с границами ячеек будут находиться непосредственно напротив друг друга. В этом случае фазовые траектории после перехода в соседнюю ячейку будут попадать в область притяжения соседнего аттрактора при переходе границ в обоих направлениях. В результате образуется мультиаттрактор, состоящий из $M + N + 1$ локальных аттракторов (рис. 2, c, 3).

При использовании этого подхода, кроме самой возможности построения композиционных мультиаттракто-

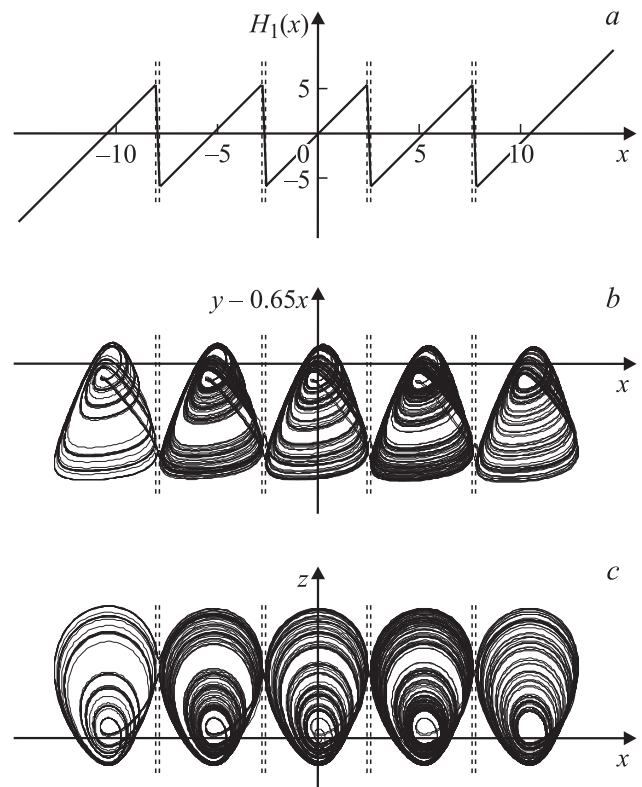


Рис. 3. Функция $H_1(x)$ (a) и проекции хаотического мультиаттрактора системы (4) на плоскости $(x, y - 0.65x)$ (b) и (z, x) (c) при $M_1 = 2$, $N_1 = 2$, $h_1 = 2.525$, $d_1 = 30$, $s_1 = -0.115$, $g_y = 3.3$.

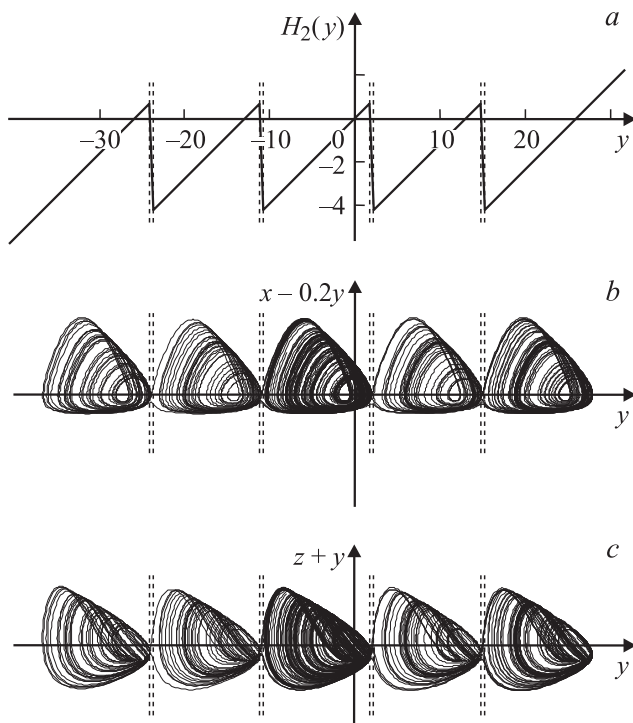


Рис. 4. Функция $H_2(y)$ (a) и проекции хаотического мультиаттрактора системы (7) на плоскости $(y, x - 0.2y)$ (b) и $(y, z + y)$ (c) при $M_2 = 2, N_2 = 2, h_2 = 6.27, d_2 = 30, s_2 = -4.47, g_x = 2.6, g_z = -13$.

ров на основе асимметричных хаотических аттракторов, появляется возможность получения модификаций мультиаттрактора в зависимости от ориентации границ фазовых ячеек относительно расположенных внутри них аттракторов.

Например, при замене переменной y функцией $H_2(y)$ и соответствующем смещении полученных копий исходного аттрактора по переменным x и z , т.е. замене этих переменных соответствующими функциями $H_s(x, y)$ и $H_s(z, y)$ с параметрами $g_x = 2, 6, g_z = -13, M_2 = 2, N_2 = 2, h_2 = 6.27, d_2 = 30, s_2 = -4.47$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = H_s(z, y) + \lambda H_2(y) - H_s(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = A \frac{H_s(x, y) + \lambda(C - 1)H_2(y)}{\lambda k + \lambda H_s(x, y) + (C - 1)H_2(y)}, \\ \frac{dz}{d\tau} = -BH_s(x, y). \end{cases} \quad (7)$$

можно получить еще одну модификацию составного мультиаттрактора на основе аттрактора уравнений (2), отличающуюся от аттрактора системы (4), иным взаимным положением локальных аттракторов (рис. 4).

Количество модификаций мультиаттрактора, которые можно получить с помощью данного подхода, не исчерпывается приведенными вариантами. Путем преобразования координат и замены функциями $H(\xi)$ и $H_s(\chi)$ новых переменных можно получить и другие варианты составного мультиаттрактора, отличающихся взаимным положением локальных аттракторов.

Таким образом, существует возможность построения композиционных мультиаттракторов, представляющих собой группу взаимодействующих локальных хаотических аттракторов, не только на базе динамических систем, имеющих симметричные разновидности хаотических аттракторов, но и систем с полностью асимметричными хаотическими аттракторами произвольной формы. При использовании рассмотренного подхода также появляется возможность варьировать взаимное положение локальных аттракторов, входящих в состав мультиаттрактора, соответственно изменяя его свойства, что дает дополнительные возможности как при исследовании свойств динамических систем, имеющих мультиаттракторы, так и для решения прикладных задач по управлению хаотическими колебаниями.

Список литературы

- [1] Прокопенко В.Г. // Доклады РАН. 2004. Т. 396. № 3. С. 317–323.
- [2] Прокопенко В.Г. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. № 1. С. 47–56.
- [3] Прокопенко В.Г. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. № 4. С. 106–119.
- [4] Прокопенко В.Г. Пат. РФ № 2403672. Приоритет 26.06.2007. Оpubл. 10.11.2010. БИ. 31.
- [5] Прокопенко В.Г. Пат. РФ № 2421677. Приоритет 11.03.2010. Оpubл. 20.06.2011. БИ. 17.
- [6] Jirsa V.K. // Neuroinformatics. 2004. Vol. 2. P. 1–22.
- [7] Loh M Neurodynamical modeling of arbitrary visuomotor tasks. Barcelona: Universitat Pompeu Fabra, 2007. 124 p.
- [8] Прокопенко В.Г. Пат. РФ № 2207707. Приоритет 11.05.2001. Оpubл. 27.06.2003. БИ. 18.
- [9] Прокопенко В.Г. Пат. РФ № 2207708. Приоритет 24.07.2001. Оpubл. 27.06.2003. БИ. 18.
- [10] Lu J, Chen G, Yu X, Leung H. // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2004. Vol. 51. N 12. P. 2476–2490.
- [11] Lu J, Chen G. // Int. J. Bifurcation Chaos. 2006. Vol. 16. N 4. P. 775–858.
- [12] Rabinovich M.I. // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. P. 1213–1265.
- [13] Zhou JX, Bruschi L, Huang S. // PLoS ONE. 2011. Vol. 6. N 3. 16 p.
- [14] Pascanu R, Jaeger H. // Neural Netw. 2011. Vol. 24. N 2. P. 199–207.
- [15] Gamez-Guzman L, Cruz-Hernandez C. // Revista Mexicana de Fisica. 2008. Vol. 54. N 4. P. 299–305.
- [16] Tang S, Chen L. // Bull Math. Biol. 2003. Vol. 65. N 3. P. 479–495.
- [17] Al-Naimee K, Marino F, Ciszak M, Abdalah S.F, Meucci R, Arecchi F.T. // Eur. Phys. J.D. 2010. Vol. 58. P. 187–189.
- [18] Ling-Yun Kong, Yang-Yu Fan // Proc. of the Control and Decision Conference (CCDC). Chinese, 2010. P. 2799–2803.
- [19] Перминов С.М., Добровольский В.А., Аникеев Г.И., Генкин М.Д. // ЖТФ. 1987. Т.57. Вып. 1. С.171–173.
- [20] Simoyi R.H, Wolf A, Swinney H.L. // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. N 4. P. 245–248.
- [21] Прокопенко В.Г. Пат. РФ № 2305891. Оpubл. 10.09.2007. БИ. 25.