

03

## Влияние термокапиллярного эффекта на динамику и устойчивость движения испаряющейся тонкой пленки

© В.Ю. Гордеева, А.В. Люшнин

Пермский государственный педагогический университет,  
614990 Пермь, Россия  
e-mail: andry@pspu.ac.ru

(Поступило в Редакцию 25 ноября 2011 г. В окончательной редакции 27 апреля 2012 г.)

Рассмотрена динамика процесса испарения тонкого слоя полярной жидкости (например, воды) со свободной поверхностью, расположенной на твердой подложке. На свободной границе жидкость–пар имеет место термокапиллярная неустойчивость. Поверхностная энергия линии контакта подложка–жидкость является немонотонной функцией и складывается из взаимодействия ван-дер-ваальсовой силы и силы двойного электрического слоя. Изучено влияние эффекта Марангони на скорость, профиль и устойчивость движения фронта испарения жидкости.

### Введение

Свободная энергия слоя жидкости складывается из суммы его объемной и поверхностной энергий  $G = G_v + G_\sigma$ . При уменьшении толщины слоя объемная энергия уменьшается и поверхностная энергия становится важным фактором, который может влиять на динамику движения слоя жидкости. Макроскопические тонкие жидкие пленки, порядка 10–100 Å, играют важную роль в таких областях природы, как биофизика, физика, химия, а также находят свое применение в различных технологических приложениях. В инженерной технологии эти пленки применяются в процессах создания нанотрубок, микропроцессоров и тонкой фильтрации [1–3].

Поскольку испаряющийся тонкий слой жидкости и окружающий газ разделены деформируемой межфазной поверхностью, в их слоях может появляться волновое движение; волны могут перемещаться, динамика волнового движения может изменяться, а при некоторых условиях могут возникнуть и квазипериодические или хаотические структуры. В таких пленках могут возникать разрывы, при которых появляются расширяющиеся отверстия пальцеобразной формы [4]. Пленка может разорваться, создавая отверстия в жидкости, в которых часть подложки может контактировать с окружающим газом. Появляются изменения в структуре течений, имеющих линии контакта газ–жидкость–твердое тело, приводящие к образованию пальцеобразных структур [5–7].

Существует несколько сценариев того, как происходит процесс испарения тонкой пленки жидкости. Первый сценарий реализуется, если на подложке находится не смачиваемая жидкость. Если жидкость не смачиваемая, то в процессе испарения при достижении некоторой критической толщины слоя происходит разрыв слоя на капли с сухими областями между ними. Второй сценарий осуществляется для смачиваемых неполярных жидкостей. В результате испарения толщина смачиваемой жидкости становится одинаковой по всей длине и монотонно уменьшается до ее полного испарения.

Третий сценарий испарения тонкого слоя жидкости, который изучается в настоящей работе, происходит, когда авторы рассматривают смачиваемую полярную жидкость, например воду. При испарении тонкого слоя воды в экспериментах установлено, что при некотором значении толщины первоначально плоская поверхность становится неустойчивой и появляются две характерные толщины тонкого слоя жидкости  $h_1$  и  $h_2$ , ( $h_2 > h_1$ ) [3,7,8]. В дальнейшем при испарении область с меньшей толщиной будет расти, а контактная линия профиля может становиться неустойчивой и приобретать пальцеобразную форму.

Характерной особенностью полярных жидкостей является присутствие как длиннодействующих ван-дер-ваальсовых, межмолекулярных сил, так и короткодействующих полярных сил, которые ассоциируются с двойным электрическим слоем. Благодаря такому взаимодействию свободная поверхностная энергия линии раздела подложка–жидкость  $g(h)$  является немонотонной функцией от ее толщины. В этом случае тонкий слой полярной жидкости при испарении может иметь два устойчивых значения толщины слоя  $h_1$  и  $h_2$ , а также одно неустойчивое значение толщины слоя, расположенное между ними. Такое состояние реализуется в виде нестабильного фронта движения, благодаря динамике которого и формируется пальцеобразная неустойчивость.

Когда неравномерно нагретая жидкость имеет свободную границу и находится в силовом поле, на ее движение существенно влияют зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярный эффект [9,10]. Это особенно проявляется в тонком слое жидкости, где термокапиллярная сила (эффект Марангони) может оказаться главным движущим фактором.

В последние годы появилось достаточно много публикаций, в которых теоретически рассматривались эффекты, происходящие в тонком слое жидкости при испарении [11–14]. Также имеются экспериментальные работы по испарению воды на слюдяной подложке [15,16]. Новизна работы заключается в учетывании эффекта

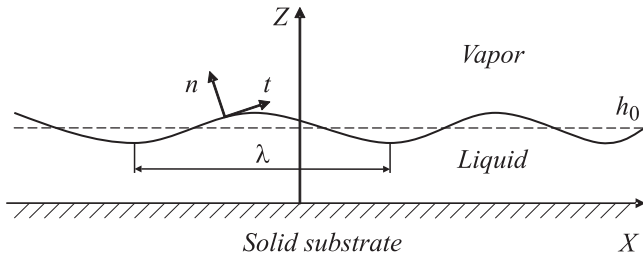


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи.

Марангони и изучения его влияния на динамику и скорость движения границы испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается движение тонкого горизонтального слоя полярной вязкой несжимаемой жидкости (например, воды), который заключен между твердой подложкой и паром соответствующей жидкости. Декартовы координаты определим следующим образом, ось  $x$  направлена вдоль слоя, а ось  $z$  перпендикулярно (рис. 1). Жидкость может испаряться в парообразную среду. Твердая граница имеет температуру  $T = T_0$ , а температуру пара обозначим через  $T_v$ , причем  $T_0 > T_v$ . Предполагается, что на свободной поверхности  $z = h(x, t)$  имеет место линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры  $\sigma = \sigma_v - \vartheta(T - T_v)$ . Здесь  $\vartheta$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения, а константа  $\sigma_v$  есть поверхностное натяжение при температуре  $T_v$ . Вектор скорости жидкости имеет две компоненты  $\mathbf{v} = (u, w)$ , где  $u$  и  $w$  — проекции на оси  $x$  и  $z$  соответственно. Ввиду малой толщины слоя гравитационными эффектами в дальнейшем будем пренебрегать. Уравнения движения и переноса тепла имеют следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u) &= -\partial_x(p + \phi) + \mu\nabla^2 u, \\ \rho(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w) &= -\partial_z(p + \phi) + \mu\nabla^2 w, \\ \rho c(\partial_t T + u\partial_x T + w\partial_z T) &= k_{th}\nabla^2 T, \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление,  $\phi$  — дополнительный потенциал энергии слоя, возникающий в результате межмолекулярного взаимодействия (подложка–жидкость, жидкость–пар),  $\mu$  — динамическая вязкость,  $c$  — теплоемкость жидкости и  $k_{th}$  есть коэффициент теплопроводности. Символом  $\partial_i$  обозначается производная по соответствующей координате, также введено обозначение  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ .

Будем использовать на границе раздела жидкость–подложка традиционные краевые условия непротекания жидкости  $z = 0$ :  $u = 0$ ,  $w = 0$ . На свободной границе ставятся следующие краевые условия  $z = h(x, t)$ :

$$\partial_t h + u\partial_x h = w,$$

$$\bar{T}\mathbf{n} = -\sigma K\mathbf{n} + \mathbf{t}\nabla_s \sigma - k_{th}\mathbf{n}\nabla_1 T = \alpha_{th}(T - T_v), \quad (2)$$

$$\mathbf{n} = \frac{(-\partial_x h, 1)}{[1 + (\partial_x h)^2]^{1/2}}, \quad \mathbf{t} = \frac{(1, \partial_x h)}{[1 + (\partial_x h)^2]^{1/2}},$$

$$K = \frac{\partial_x^2 h}{[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}}.$$

Здесь  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  — единичные векторы, направленные по нормали и тангенциально к поверхности соответственно. Вводятся обозначения:  $\bar{T}$  — тензор напряжения жидкости,  $\nabla_s$  — поверхностный градиент на границе жидкость–пар,  $\alpha_{th}$  — коэффициент теплопередачи, характеризующий скорость переноса тепла из жидкости в окружающий газ. Также введено обозначение  $\nabla_1 = \partial/\partial x + \partial/\partial z$ .

Далее будем определять характерный размер вдоль оси  $x$  волновым числом  $\lambda$ , а в качестве характерного масштаба вдоль оси  $z$  выберем толщину слоя  $h_0$ . Будем считать, что отношение  $\varepsilon = 2\pi h_0/\lambda \ll 1$ . Введем безразмерные независимые переменные:

$$Z = \frac{z}{h_0}, \quad X = \frac{\varepsilon x}{h_0}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad W = \frac{w}{\varepsilon U_0},$$

$$T = \frac{\varepsilon U_0 t}{h_0}, \quad (P, \Phi) = \frac{\varepsilon h_0}{\mu U_0} (p, \phi), \quad \Theta = \frac{T - T_v}{T_0 - T_v}. \quad (3)$$

Здесь  $U_0$  обозначается как характерная скорость данной задачи. В безразмерных переменных уравнения (1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{Re}(\partial_T U + U\partial_X U + W\partial_Z U) &= -\partial_X(P + \Phi) + \partial_Z^2 U + \varepsilon^2 \partial_X^2 U, \\ \varepsilon \text{Re}(\partial_T W + U\partial_X W + W\partial_Z W) &= -\partial_Z(P + \Phi) + \partial_Z^2 W + \varepsilon^2 (\partial_X^2 W + \varepsilon^2 \partial_X^2 W), \\ \varepsilon \text{RePr}(\partial_T \Theta + U\partial_X \Theta + W\partial_Z \Theta) &= \varepsilon^2 \partial_X^2 \Theta + \partial_Z^2 \Theta, \\ \partial_X U + \partial_Z W &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия на твердой подложке запишутся следующим образом:

$$Z = 0: \quad U = 0, \quad W = 0, \quad \Theta = 1. \quad (5)$$

А условия на свободной границе раздела жидкость–пар имеют вид

$$\begin{aligned} Z = H: \quad \partial_T H + U\partial_X H &= W, \\ (\partial_Z U + \varepsilon^2 \partial_X W)[1 - \varepsilon^2 (\partial_X H)^2] - 4\varepsilon^2 (\partial_X H)(\partial_X U) &= Q^{1/2} \partial_X \Sigma, \\ -\text{Pr} + \frac{2\varepsilon^2}{Q} \{ \partial_X U [\varepsilon^2 (\partial_X H)^2 - 1] & \\ - \partial_X H (\partial_Z U - \varepsilon^2 \partial_X W) \} &= \frac{Cr^{-1} \varepsilon^3 \partial_X^2 H}{Q^{3/2}}, \quad (6) \\ \partial_Z \Theta - \varepsilon^2 (\partial_X \Theta)(\partial_X H) + Bo \cdot \Theta [1 + \varepsilon^2 (\partial_X H)^2]^{1/2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\partial_x \Sigma = Ma \frac{d\Sigma}{d\Theta} [\partial_x \Theta + (\partial_z \Theta) \cdot (\partial_x H)],$$

$$Q = [1 + \varepsilon^2 (\partial_x H)^2].$$

Здесь  $H = h/h_0$  обозначает безразмерную толщину слоя, символом  $\Sigma = \varepsilon \sigma / \mu U_0$  обозначено безразмерное поверхностное натяжение. Также вводятся безразмерные числа Рэлея, Прандтля, Бонда, Марангони и капиллярного параметра:

$$Re = \frac{U_0 h_0}{\nu}, \quad Pr = \frac{\rho c \nu}{k_{th}}, \quad Bo = \frac{\alpha_{th} h_0}{k_{th}},$$

$$Ma = \frac{\Delta \sigma}{\mu U_0} \varepsilon, \quad Cr = \frac{U_0 \mu}{\sigma}. \quad (7)$$

Обозначение  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\Delta \sigma$  в безразмерном числе Марангони есть разность поверхностного натяжения при температурах  $T_0$  и  $T_v$ . Проинтегрируем четвертое уравнение (4) по оси  $Z$  от нуля до  $H(X, T)$ , используя граничные условия (5), (6), и получим уравнение

$$\partial_T H + \partial_x \left( \int_0^H U dZ \right) = 0, \quad (8)$$

которое описывает динамику поведения тонкого слоя жидкости. Представим значения вектора скорости и давления в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots,$$

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots, \quad (9)$$

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots$$

Будем считать, что все безразмерные параметры имеют первый порядок малости и величины  $\varepsilon Re$  и  $\varepsilon Re Pr$  стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для того, чтобы оставить в уравнении слагаемое, описывающее эффект поверхностного натяжения, который имеет порядок  $Cr^{-1} \varepsilon^3$  и может быть отброшен, вводим новое обозначение  $C = Cr \varepsilon^{-3}$ . Оставляя в разложении только члены первого порядка малости и опуская символ 0 в  $U_0, W_0$  и  $P_0$ , получаем уравнения и граничные условия задачи

$$\partial_z^2 U - \partial_x P - \partial_x \Phi = 0,$$

$$\partial_z P + \partial_z \Phi = 0,$$

$$\partial_z^2 \Theta = 0,$$

$$\partial_T H + \partial_x \left[ \int_0^H U dZ \right] = 0, \quad (10)$$

$$Z = 0: \quad U = 0, \quad \Theta = 1,$$

$$Z = H: \quad P + C^{-1} \partial_x^2 H = 0,$$

$$\partial_z U + Ma Bo \frac{\partial_x H}{(1 + Bo H)^2} = 0.$$

Равенство соотношения для давления  $\partial_z P = 0$  на свободной поверхности справедливо не только на свободной

поверхности, но и во всем слое. Подставляя выражение для давления в первое уравнение (10) и затем дважды проинтегрировав по  $Z$  с учетом граничных условий, получим выражение для скорости  $U$ . Подставляя это выражение в (8), получим в итоге дифференциальное уравнение относительно  $H(X, T)$ :

$$\partial_T H + \frac{1}{2} Ma Bo \partial_x \left[ \frac{H^2 \partial_x H}{(1 + Bo H)^2} \right] - \frac{1}{3} \partial_x [H^3 \partial_x (\Phi - C^{-1} \partial_x^2 H)] = 0. \quad (11)$$

Эволюционное уравнение (11), записанное в размерных переменных и в трехмерном виде  $h(x, y, t)$  с учетом испарения, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dT} T_v \alpha_{th} k_{th} \nabla \left[ \frac{h^2 \nabla h}{(k_{th} + \alpha_{th} h^2)} \right] - \nabla \left( \frac{h^3}{3\mu} \nabla [\phi - \sigma \nabla h] \right) = -\frac{J}{\rho}. \quad (12)$$

Здесь введено следующее обозначение:  $\nabla = \partial/\partial x + \partial/\partial y$ ,  $J$  — величина испарения с поверхности (число покинувших поверхность жидкость—пар частиц с единицы поверхности в единицу времени). Согласно работе [5], запишем дополнительный потенциал  $\phi$  в виде  $\phi = dg/dh$ , который будем интерпретировать как химический потенциал соответствующей поверхности. Свободная энергия межмолекулярного взаимодействия подложка—жидкость как функция толщины слоя немонотонна и имеет следующий вид [18]:

$$g(h) = \frac{S^{LW} d_0^2}{h^2} + S^P \exp \frac{d_0 - h}{l_0}, \quad (13)$$

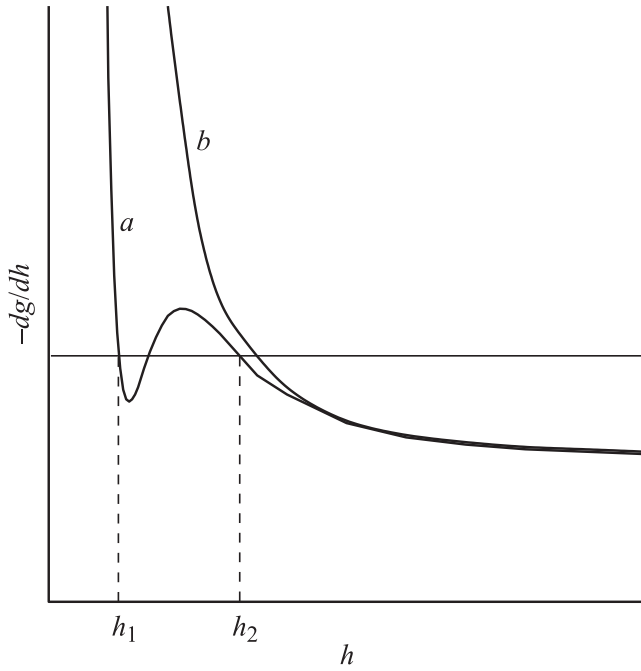
где  $S^{LW} d_0^2 = -A/12\pi$ ,  $A$  — постоянная Хамакера,  $d_0$  — радиус молекулярного взаимодействия и  $l_0$  — дебаевская длина. Значение параметра  $S^P$  определяется адсорбцией ионов из подложки в жидкость. На рис. 2 представлен химический потенциал неполярной и полярной жидкостей. Как видно из графика, химический потенциал для поверхности подложка—(полярная жидкость) является немонотонной функцией от ее толщины и в некотором диапазоне значений его имеется два характерных значения толщины слоя  $h_1$  и  $h_2$ . Химический потенциал единицы объема жидкости может быть записан в виде

$$\phi_l = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dg}{dh} - \sigma \nabla h \right). \quad (14)$$

Следуя далее работе [19], будем считать, что величина испарения  $J$  пропорциональна разности химических потенциалов жидкости и пара

$$J = \psi (\phi_l - \phi_v). \quad (15)$$

Здесь  $\psi$  — параметр, характеризующий интенсивность испарения (данный параметр может быть вычислен из



**Рис. 2.** Зависимость химического потенциала от толщины слоя  $h$  для полярной ( $a$ ) и неполярной ( $b$ ) жидкостей соответственно. Пунктирными линиями определены два устойчивых значения толщины слоя.

кинетической теории газа или получен экспериментальным путем). Подставляя уравнения (13)–(15) в (12), получаем эволюционное уравнение тонкого слоя испаряющейся жидкости

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = & -\frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dT} T_v \alpha_{th} k_{th} \nabla \left[ \frac{h^2 \nabla h}{(k_{th} + \alpha_{th} h^2)} \right] \\ & + \nabla \left[ \frac{h^3}{3\mu} \nabla \left[ \frac{dg(h)}{dh} - \sigma \nabla \nabla h \right] \right] \\ & - \frac{\psi}{\rho} \left[ \frac{dg(h)}{dh} - \sigma \nabla \nabla h - \rho \varphi_v \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Проведем процесс обезразмеривания в следующем виде:  $x \rightarrow \beta x$ ,  $t \rightarrow \xi t$ ,  $h \rightarrow \delta h$ ,  $T \rightarrow \tau T$ , где в качестве единиц размерности выбираются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \beta = \left( \frac{\delta\sigma}{S^{PN}} \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{3\mu\sigma}{\delta(S^{PN})^2}, \quad \delta = \left( \frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3}, \\ \tau = \frac{T - T_v}{T_v}, \quad S^{PN} = \frac{S^P}{l_0} \exp\left(\frac{d_0}{l_0}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) в безразмерной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t h = & -MB \nabla \left( \frac{h^2 \nabla h}{(1+Bh)^2} \right) \\ & + \nabla \left[ h^3 \nabla \left( \frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \nabla^2 h \right) \right] \\ & - \Omega \left( \frac{1}{h^3} - \exp(-\chi h) - \nabla^2 h - S \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В уравнении используются следующие безразмерные коэффициенты:

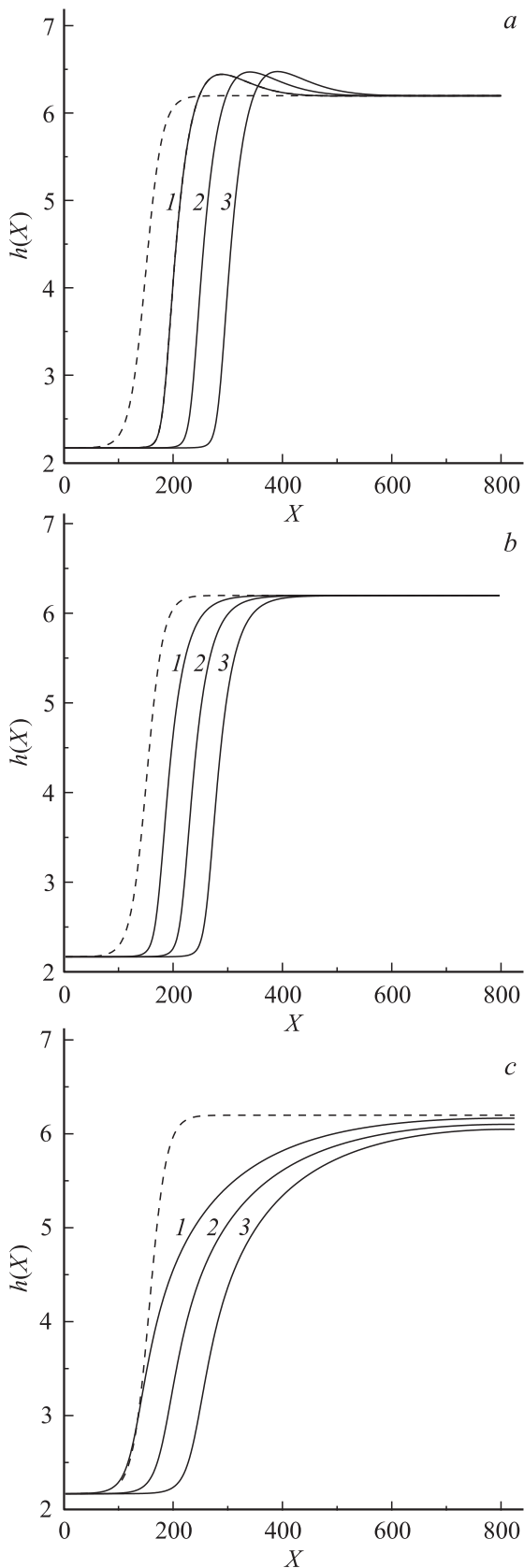
$$\begin{aligned} M = \frac{\vartheta \Theta_v}{2\sigma}; \quad B = \frac{\alpha_{th}}{k_{th}} \left( \frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3}, \\ \Omega = \frac{3\varepsilon v \sigma}{S^{PN}} \left( \frac{6\pi S^{PN}}{A} \right)^{2/3}, \quad S = \frac{\rho \mu_v}{S^{PN}}; \\ \chi = \frac{1}{l_0} \left( \frac{A}{6\pi S^{PN}} \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $M$  и  $B$  являются безразмерными числами Марангони и Био для данной задачи. Параметры  $\Omega$ ,  $S$ ,  $\chi$  характеризуют уровень испарения, химический потенциал пара и дебаевскую длину соответственно.

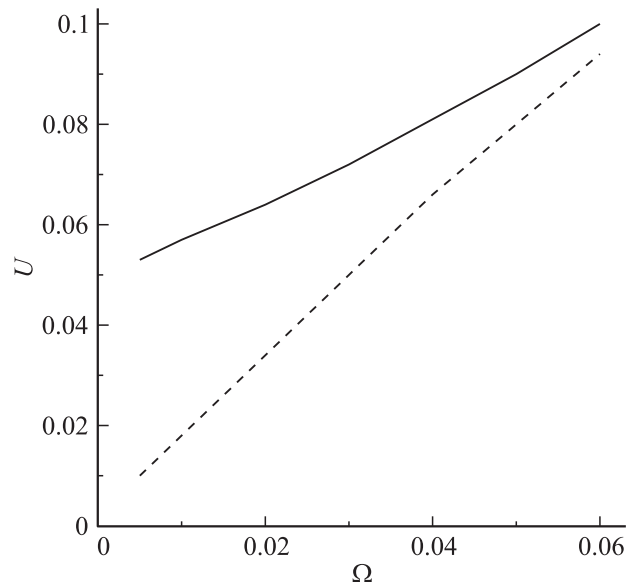
## 2. Распространение фронта жидкости

Уравнение (18) решалось численно с использованием пятиточечной конечно-разностной схемы методом Кранка–Нколсена, граничные условия предполагались равными  $h_x = h_{xxx} = 0$  на обоих концах отрезка, для которого проводились вычисления. В работе [20] было показано, что при значениях безразмерного параметра испарения  $\Omega = 0.03$  может существовать пальцеобразная неустойчивость, в дальнейшем с увеличением значения безразмерного параметра испарения фронт движения стабилизируется. Решение уравнения (18) описывает распространение тонкого слоя жидкости в диапазоне значений двух равновесных значений толщин слоя  $h_1$  и  $h_2$ . На рис. 3 показаны профили слоя жидкости при различных значениях числа Марангони. Из-за осевой симметрии задачи расчеты проводились лишь для половины области. При значении числа  $M = 0.1$  (рис. 3,  $a$ ) фронт тонкого слоя жидкости имеет вздутие, с ростом числа Марангони эта выпуклость исчезает и профиль становится монотонным (рис. 3,  $b$ ). С ростом термокапиллярного эффекта (рис. 3,  $c$ ) происходит изменение значения  $h_2$  в сторону уменьшения.

Численное решение уравнения (18), представленное на рис. 3,  $a$  и  $b$ , показывает динамику движения фронта тонкого слоя жидкости с постоянной скоростью, которая может быть вычислена непосредственно из компьютерных данных траектории движения профиля. На рис. 4 представлена зависимость скорости распространения



**Рис. 3.** Профили распространения фронта для  $\chi = 1.085$ ,  $\Omega = 0.033$ ,  $S = -0.003$ ,  $B = 0.001$  для 1 —  $M = 0.1$ , 2 —  $M = 10$  и 3 —  $M = 100$ . Штрихами обозначено начальное распределение.



**Рис. 4.** Зависимость скорости распространения  $U$  от параметра  $\Omega$  для  $M = 0.1$ ,  $B = 10^{-3}$  — штриховая линия и  $M = 25$ ,  $B = 10^{-3}$  — непрерывная линия. Остальные параметры аналогичны рис. 2.

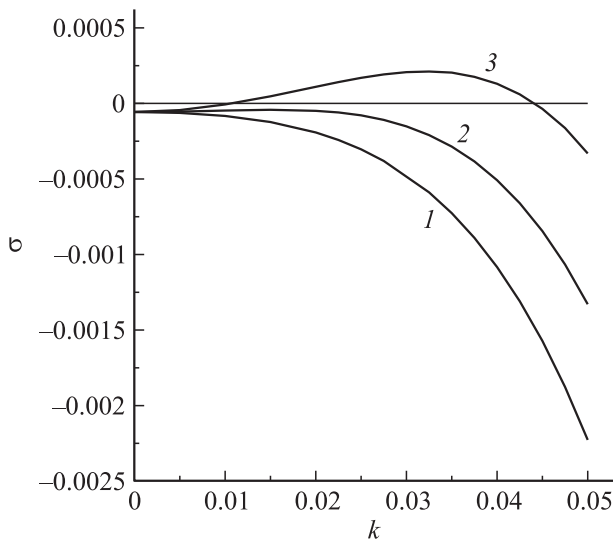
тонкого слоя жидкости от величины испарения для различных значений числа  $M$ . С увеличением значения безразмерного числа Марангони возрастает скорость движения фронта. При значениях термокапиллярного параметра  $M = 0.1$ , как и в работе [20], при  $\Omega \rightarrow 0$  скорость движения фронта также стремится к нулю. При значениях числа Марангони  $M = 25$  уменьшение испарения ведет к ненулевому значению скорости. Это объясняется тем, что термокапиллярный эффект сам может выступать в роли причины движения тонкого слоя жидкости.

### 3. Исследование неустойчивости движения испаряющегося фронта жидкости

Будем исследовать устойчивость движущегося фронта жидкости  $h = h_0$ , движущегося со скоростью  $U$ , относительно бесконечно малых возмущений  $h'$ , периодических по отношению к оси  $x$  (вектор скорости движения фронта совпадает с направлением оси  $x$ ):  $h = h_0 + h'$ . Подставляя данное значение толщины слоя в уравнение (18) и оставляя только линейные слагаемые относительно возмущений, получим линейную задачу устойчивости относительно  $h'$ . Представим возмущения в виде „нормальный моды“:

$$h' = h'_0 \exp(\sigma t + ikx), \tag{20}$$

где  $\sigma$  является декрементом возмущений и описывает поведение возмущения со временем ( $\sigma > 0$  ведет к росту возмущений, а отрицательное значение декремента соответствует затуханию возмущений),  $k$  есть волновое



**Рис. 5.** Дисперсионная зависимость  $\sigma(k)$  для различных значений числа Марангони: 1 —  $M = 0.1$ , 2 —  $M = 10$  и 3 —  $M = 25$ . Остальные параметры аналогичны рис. 2.

число вдоль оси  $x$ . Подставим (20) в линеаризованное уравнение для возмущений и получим характеристическое уравнение относительно декремента  $\sigma$ :

$$\sigma = \mathfrak{S}_0 - k^2 \mathfrak{S}_2 - k^4 h_0^3, \quad (21)$$

где значения  $\mathfrak{S}_0$  и  $\mathfrak{S}_2$  имеют следующий вид:

$$\mathfrak{S}_0 = \Omega \left[ \frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right],$$

$$\mathfrak{S}_2 = -MBh_0^2 + \frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \Omega. \quad (22)$$

График зависимостей значений декремента от волнового числа для различных величин  $M$  приведен на рис. 5. Длинноволновая мода ( $k = 0$ ) соответствует отрицательному значению декремента  $\sigma$  и является устойчивым состоянием. Для значений, обозначенных на рис. 5 кривыми 1 и 2, все возмущения относительно стационарного значения  $h_0$  являются затухающими. С увеличением значения безразмерного параметра Марангони, кривая 3 на рис. 5, в длинноволновом диапазоне появляется область неустойчивости.

В рамках исследования линейной устойчивости, полученной в результате численных расчетов формы стационарной волны  $h_0(x - Ut)$ , рассмотрим устойчивость бесконечно малых возмущений фронта, представленных в следующем виде:  $h' = u(x - Ut) \exp(\omega t +iky)$ , где  $\omega$  и  $k$  — декремент и волновое число для возмущений, а ось  $y$  направлена перпендикулярно распространению фронта тонкого слоя.

Процедура линеаризации приводит к задаче на собственные значения относительно бесконечно малых возмущений, а собственным числом данной задачи является декремент  $\omega$ . Дифференциальное уравнение для определения значения декремента запишется следующим образом:

$$\omega u = -L_0 u - k^2 L_2 u - k^4 h_0^3 u. \quad (23)$$

Линейные дифференциальные операторы  $L_0$  и  $L_2$  имеют вид

$$L_0 = \frac{d}{dx} \left[ f_{03} \frac{d^3}{dx^3} + f_{01} \frac{d}{dx} + f_{00} \right] + f_{000},$$

$$L_2 = f_{22} \frac{d^2}{dx^2} + f_{21} \frac{d}{dx} + f_{20}, \quad (24)$$

где

$$f_{03} = h_0^3,$$

$$f_{01} = \frac{3}{h_0} - \chi h_0^3 \exp(-\chi h_0) + \frac{MBh_0^2}{(1+Bh_0^2)^2} + \Omega,$$

$$f_{00} = U + h_{0x} \left[ -\frac{3}{h_0^2} - (3 - \chi h) \chi h_0^2 \exp(-\chi h_0) \right] - 3h_0^2 h_{0xxx},$$

$$f_{000} = \Omega \left[ \frac{3}{h_0^4} - \chi \exp(-\chi h_0) \right],$$

$$f_{22} = 6h_0^3, \quad f_{21} = 9h_0^2 h_{0x}, \quad f_{20} = -f_{01} + \frac{MBh_0^2}{(1+Bh_0^2)^2}.$$

Здесь  $h_{0x}$  и  $b_{0xxx}$  обозначают первую и третью производные стационарного решения соответственно. Задача на собственные значения (23), используя методику, приведенную в работе [21], решалась численно на интервале  $[-G; G]$ , диапазон интервала выбирался таким образом, чтобы на границах отрезка решение задачи совпадало с его стационарными решениями. Граничные условия для задачи (23) после процедуры дискретизации, записываются следующим образом:

$$x = -G: \quad u_{-1} = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2,$$

$$u_{-2} = u_2 + \beta_{11} u_1 + \beta_{10} u_0,$$

$$x = G: \quad u_{N+1} = \alpha_{21} u_{N-1} + \alpha_{20} u_N,$$

$$u_{N+2} = u_{N-2} + \beta_{21} u_{N-1} + \beta_{20} u_N, \quad (25)$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{2 + a_1 \Delta t}{2 - a_1 \Delta t}, \quad \alpha_{10} = \frac{b_1 (\Delta t)^2 - 2}{1 - a_1 \Delta t / 2},$$

$$\alpha_{21} = \frac{-2 + a_2 \Delta t}{2 + a_2 \Delta t}, \quad \alpha_{20} = \frac{2 - b_2 (\Delta t)^2}{1 + a_2 \Delta t / 2},$$

$$\beta_{11} = 2(-1 + \alpha_{11}) - 2a_1 \Delta t (1 + \alpha_{11}) + b_1 (\Delta t)^2 (1 - \alpha_{11}),$$

$$\beta_{10} = -4a_1 \Delta t + \alpha_{10} [2 + 2a_1 \Delta t - b_1 (\Delta t)^2],$$

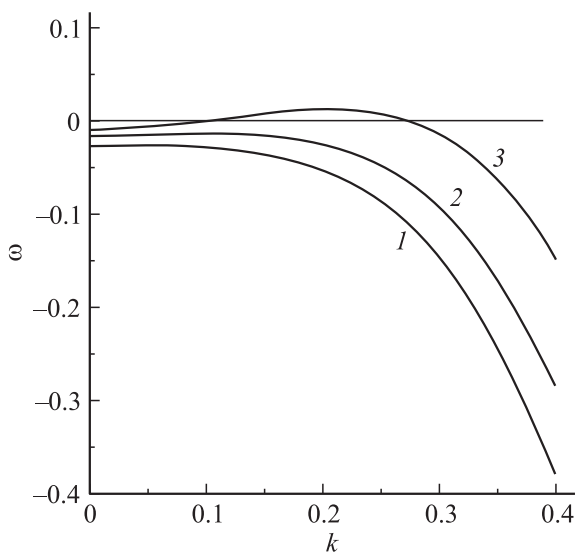
$$\beta_{21} = 2(-1 + \alpha_{21}) - 2a_2 \Delta t (1 + \alpha_{21}) + b_2 (\Delta t)^2 (1 - \alpha_{21}),$$

$$\beta_{20} = 4a_2 \Delta t + \alpha_{20} [2 - 2a_2 \Delta t - b_2 (\Delta t)^2],$$

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_2 = -2\text{Re}(\lambda_3),$$

$$b_1 = \lambda_1 \lambda_2, \quad b_2 = |\lambda_3|^2.$$

Здесь  $\lambda_i$  есть корни характеристического уравнения линейной задачи при  $k = 0$ . В результате численного решения уравнения (23) с использованием граничных условий (25) получаем дисперсионное соотношение  $\omega(k)$  и определяем область параметров, где может



**Рис. 6.** Дисперсионная зависимость  $\sigma(k)$  относительно продольных возмущений для числа Марангони, равного 1 — 1, 2 — 10, 3 — 25 соответственно. Параметр  $\Omega = 0.1$ .

существовать неустойчивость фронта движения испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости относительно продольных возмущений.

Рассмотрим полученные результаты. В случае, когда параметр испарения  $\Omega = 0.03$  и имеет место область неустойчивости относительно продольных возмущений при  $M = 0$  [20], термокапиллярный эффект приводит к увеличению области неустойчивости. С увеличением безразмерного параметра испарения область неустойчивости уменьшается. И наиболее интересным представляется случай, когда с увеличением числа Марангони первоначально устойчивое состояние становится неустойчивым, это соответствует значениям  $\Omega = 0.1$ . Дисперсионные соотношения для такого варианта приведены на рис. 6. Из приведенных графиков мы можем видеть, что увеличение безразмерного числа Марангони, описывающего зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры, может приводить к потере устойчивости движущегося фронта относительно продольных возмущений. Установлено, что с увеличением  $\Omega$  происходит сдвиг области неустойчивости в диапазон коротких волн. Также стоит отметить, что при таких значениях безразмерного параметра испарения  $\Omega$  с увеличением числа  $M$  происходит уменьшение значения  $\omega$  относительно длинноволновой моды ( $k = 0$ ). При дальнейшем росте числа  $\Omega$ , когда движение фронта жидкости устойчиво по отношению к любым модам возмущений, наличие эффекта Марангони влечет за собой уменьшение устойчивости.

## Заключение

Приведены профили движения фронта испаряющегося тонкого слоя полярной жидкости. Определена зависимость скорости движения фронта жидкости от параметра

испарения для различных чисел  $M$ . Исследовано влияние термокапиллярного эффекта на устойчивость движения тонкого слоя полярной жидкости. Установлено, что наличие эффекта Марангони может приводить к потере устойчивости движения тонкого слоя полярной жидкости с образованием пальцеобразной структуры поверхности.

Работа выполнена при поддержке гранта Пермского государственного педагогического университета (проект 031-F), Министерства образования Пермского края (грант С26/244) и Министерства образования и науки РФ (грант 1.3103.2011).

## Список литературы

- [1] Zeng H., Kristiansen K., Wang P., Bergli J., Israelachili J. // *Langmuir*. 2011. Vol. 27. N 11. P. 7163–7167.
- [2] Ajaev V.S., Klentzman J., Gambaryan-Roisman T., Stephan P. // *J. of Engineer. Mathematics*. 2011. Vol. 73. N 1. P. 31–38.
- [3] Kopf M.H., Gurevich S.V., Friedrich R. // *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 83. P. 016212–016221.
- [4] Habibi M., Moller P., Fall A., Bonn D. // *Soft Matter*. 2012. Vol. 8. P. 4682–4686.
- [5] Samid-Merzel N., Lipson S.G., Tannhauser D.S. // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. N 3. P. 2906–2913.
- [6] Saprykin S., Trevelyan P.J., Koopmans R.J., Kalladasis S. // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 75. P. 026 306–026 323.
- [7] Craster R.V., Matar O.K. // *Rev. Mod. Phys.* 2009. Vol. 81. N 3. P. 1131–1198.
- [8] Leizeron I., Lipson S.G., Lyushnin A.V. // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. P. 051 601–051 606.
- [9] Мышкис А.Д. Гидродинамика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
- [10] Копбосынов Б.К., Пухначев В.В. // *Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. УНЦ АН СССР*. 1983. С. 116–125.
- [11] Thiele U. // *The Europ. Phys. J.* 2011. Vol. 197. N 1. P. 213–220.
- [12] Ajaev V.S., Gambaryan-Roisman T., Stephan P. // *J. of Colloid and Int. Science*. 2010. V. 342. N 2. P. 550–558.
- [13] Pauliac-Vaujour E., Stannard A., Martin C.P., Blunt V.O., Notinger I., Moriarty P.J. // *Phys. Rev. Letter*. 2008. Vol. 100. N 17. P. 176 102–176 106.
- [14] Tiwari N., Davis J.M. // *J. of Colloid and Int. Science*. 2011. Vol. 355. N 1. P. 243–251.
- [15] Cai Y., Newby Bi-min Z. // *Langmuir*. 2009. Vol. 25. N 13. P. 7638–7645.
- [16] Kopf M.H., Harder H., Reiter Jurgen, Santer S. // *Langmuir*. 2011. Vol. 27. N 20. P. 12 354–12 360.
- [17] Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. // *Rev. Mod. Phys.* 1997. Vol. 69. N 3. P. 931–980.
- [18] Sharma A., Jameel A.T. // *J. Colloid Interface Sci.* 1993. Vol. 161. P. 190–208.
- [19] Sultan E., Boudaoud A., Ben Amar M. // *J. of Engineer. Mathem.* 2004. Vol. 50. N 2. P. 209–222.
- [20] Lyushnin A.V., Golovin A.A., Pismen L.M. // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. P. 021 602–021 608.
- [21] Golovin A., Rubinstein B.Y., Pismen L.M. // *Langmuir*. 2001. Vol. 17. P. 3930–3936.