

01;03

## К вопросу о течении неньютоновской жидкости

© В.Г. Приданов, В.И. Хоничев

Новосибирский государственный педагогический университет,  
630055 Новосибирск, Россия  
e-mail: valerij.pridanoff@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 27 сентября 2011 г. В окончательной редакции 2 марта 2012 г.)

Целью данной работы является расчет течений неньютоновской жидкости в плоском канале. При некоторых предположениях относительно зависимости вязкости от градиента скорости получено точное решение, определяющее распределение скорости жидкости в поперечном сечении канала. Показано, что оно весьма существенно отличается от параболического профиля ньютоновской жидкости. Указывается, что при течении неньютоновской жидкости ее особенности не исчезают никогда, лишь область неньютоновского течения сужается, локализуясь в окрестности максимума скорости.

### Введение

Неньютоновской жидкостью называют жидкость, при течении которой эффективная вязкость  $\eta$  зависит от градиента скорости (скорости сдвига) [1,2].

В литературе [2] для расчета течений таких жидкостей предлагается усложнить тензор вязких напряжений  $\sigma'_{i,k}$ , который для ньютоновской несжимаемой жидкости имеет вид [3]

$$\sigma'_{i,k} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

а уравнение Навье–Стокса для стационарного течения

$$\rho u_k = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $u_k$  — проекция скорости,  $p$  — давление,  $\eta$  — коэффициент вязкости.

Усложнение вида  $\sigma'_{i,k}$  приводит к тому, что уравнения, описывающие динамику течения неньютоновской жидкости, существенно отличаются от (1).

В настоящей работе рассматривается течение крови, являющейся, согласно довольно подробным экспериментальным данным [4], неньютоновской жидкостью. Ставится вопрос: можно ли на основе классического уравнения Навье–Стокса рассматривать течение такой жидкости? Позволяют ли рассчитанные профили скорости получить зависимость эффективной вязкости от

скорости сдвига, удовлетворительно согласующуюся с экспериментальными данными в области неньютоновского течения?

Для ответа на эти вопросы рассматривается простейший пример — стационарное течение крови в плоском канале (рис. 1).

### Обсуждение

1. Физическая причина появления зависимости эффективной вязкости от скорости сдвига — неоднородная структура жидкости, но не только. Согласно [4], кровь — это неньютоновская жидкость (плазма), в которой взвешены гибкие эритроциты. Эритроциты представляют собой двояко вогнутые диски с диаметром  $\approx 8 \mu\text{m}$ , толщиной  $2-3 \mu\text{m}$ . Представим, что эритроциты — это жесткие частицы, число которых в единице объема равно  $n$ . Размер эритроцитов велик по сравнению с молекулами плазмы (на 90% плазма состоит из воды, диаметр молекул которой  $\sim 3 \text{ \AA}$ ). В этом случае эффективная вязкость такой суспензии дается формулой [5]

$$\eta = \eta_p(1 + \gamma n \varphi). \quad (2)$$

Здесь  $\eta_p$  — вязкость плазмы,  $\varphi$  — объем эритроцита,  $\gamma$  — коэффициент, учитывающий форму частицы. Для сферической частицы  $\gamma = 2.5$  [6]. Таким образом, физический смысл величины  $n\varphi$  — это собственный объем эритроцитов в единице объема суспензии, т.е. объемная концентрация  $C$ . Из соотношения (2) видно, что рассматриваемая суспензия ведет себя как ньютоновская жидкость с вязкостью, большей вязкости плазмы.

Неньютоновское поведение крови вызвано сложной динамикой изменения формы эритроцитов в зависимости от градиента скорости (скорости сдвига). Во-первых, при малых скоростях сдвига ( $\leq 1 \text{ s}^{-1}$ ) эритроциты образуют сложные агрегаты, состоящие из большого числа частиц, так называемые монетарные столбики [4]. По мере повышения скорости сдвига длина столбиков уменьшается вплоть до их полного распада. Во-вторых,

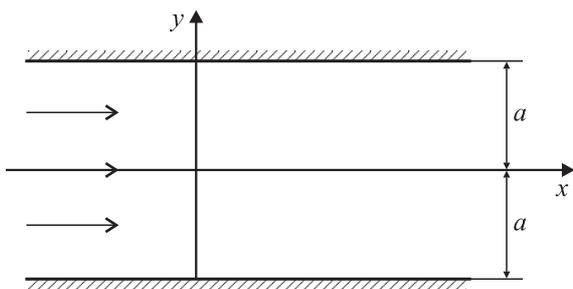
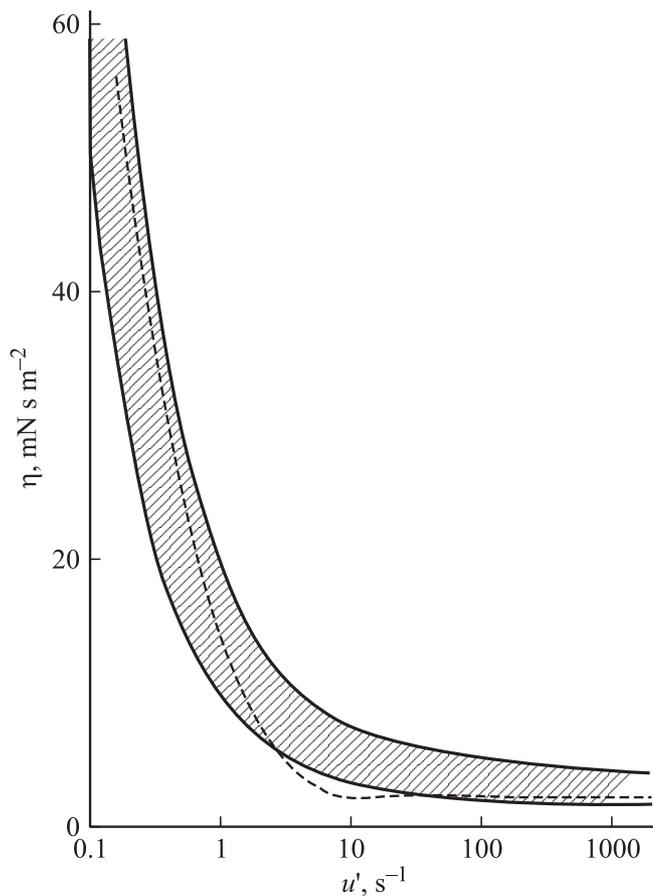


Рис. 1. Схема течения жидкости в канале;  $a$  — расстояние от горизонтальной плоскости симметрии до стенок канала.



**Рис. 2.** Зависимость вязкости неньютоновской жидкости от скорости сдвига. Заштрихованная область — данные из [4]. Штриховая линия — расчет по формуле (3).

от скорости сдвига зависят деформация и скорость вращательного движения единичных эритроцитов. Все это приводит к тому, что появляется зависимость объемной концентрации  $C$  и коэффициента  $\gamma$  от скорости сдвига, а согласно (2), появляется зависимость от скорости сдвига и вязкости  $\eta$ .

При течении крови в плоском канале под действием постоянного градиента давления  $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$  единственная отличная от нуля проекция скорости  $u$  на ось  $x$  является функцией поперечной координаты  $y$ , а тензор вязких напряжений оказывается равным  $\eta \frac{du}{dy} = \eta u'$ . В силу граничных условий прилипания  $u(y = \pm) = 0$  профиль скорости  $u(y)$  должен иметь в какой-то точке  $y = y_0$  максимум ( $u'(y_0) = 0$ ). Если коэффициент вязкости  $\eta$  является постоянной величиной (течение ньютоновской жидкости), то профиль скорости должен быть симметричным относительно центра канала  $y = 0$  в силу отсутствия выделенного направления вдоль поперечной координаты (оба направления  $y > 0$  и  $y < 0$  равноправны) и, следовательно,  $u(y) = u(-y)$ . Этот вывод подтверждается точным решением уравнения Навье–Стокса для рассматриваемого течения [7].

В случае течения неньютоновской жидкости коэффициент вязкости  $\eta$  зависит, согласно [4], только от абсолютного значения градиента скорости:  $\eta = \eta(|u'|)$ . Такая зависимость также не создает выделенного направления вдоль координаты  $y$ . Поэтому максимум скорости течения также должен находиться на оси канала  $y_0 = 0$  и  $u(y) = u(-y)$ .

Диаграмма зависимости эффективной вязкости  $\eta$  от скорости сдвига  $u'$  (рис. 2) показывает, что неньютоновское поведение вязкости крови наиболее интенсивно проявляется в области сравнительно малых скоростей сдвига ( $u' \approx 1$ ). При больших скоростях сдвига эта зависимость исчезающе мала, а течение представляет практически ньютоновское течение с постоянной вязкостью. Из этой же диаграммы видно, что зависимость  $\eta = \eta(u')$  весьма сложна, так что проведение аналитического исследования поставленной задачи затруднительно.

Поэтому аппроксимируем экспериментальные данные следующей упрощенной зависимостью:

$$\eta = \frac{\alpha}{u' + \beta}, \quad \text{если } u' < 0;$$

$$\eta = \frac{\alpha}{-u' + \beta}, \quad \text{если } u' > 0;$$

$$\eta = \eta_1 = \text{const}, \quad \text{если } |u'| > |u'_{\max}|, \quad (3)$$

где  $|u'_{\max}|$  — скорость сдвига, выше которой вязкость постоянна, а течение переходит в течение обычной ньютоновской жидкости с вязкостью  $\eta_1$ . Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  подбираются эмпирически так, чтобы кривая  $\eta(u')$  лежала в полосе допустимых значений на диаграмме. Таким способом были получены следующие значения:

$$\eta_1 = 2 \text{ mN s/m}^2, \quad \alpha = 17.73 \text{ mN/m}^2, \quad \beta = 0.158 \text{ s}^{-1}.$$

Значения  $\eta$ , вычисленные по формулам (3) с этими постоянными, показаны на рис. 2 пунктиром. Видно, что они практически все лежат в полосе допустимых значений, за исключением малой окрестности  $u'_{\max}$ .

2. Рассмотрим уравнение Навье–Стокса (1) для течения несжимаемой жидкости в плоском канале, если градиент давления постоянен вдоль канала, а  $\eta$  задается соотношениями (3). Имеем

$$-\frac{\Delta p}{l} = \frac{d}{dy} \left( \eta(u') \frac{du}{dy} \right). \quad (4)$$

Здесь  $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ ,  $l$  — длина канала. Граничные условия  $u(-a) = u(a) = 0$ .

В области ньютоновского течения ( $\eta = \text{const}$ ) имеет место параболический профиль скорости [7]. Как уже отмечалось выше, такой областью является область  $|u'| > |u'_{\max}|$ . Есть еще и другая область ньютоновского течения. Согласно (3), если  $|u'| \ll \beta$ , то  $\eta \approx \eta_0 = \text{const}$ . Эта область лежит в окрестности точки  $y = 0$  максимума скорости.

Решения уравнения (4) имеют следующий вид:

$$u_1(y) = -\beta y + \frac{\beta a l}{\Delta p} \ln\left(\alpha - C_1 + \frac{\Delta p}{l} y\right) + C_2 \text{ для } y < 0,$$

$$u_2(y) = u_1(-y) \text{ для } y > 0. \quad (5)$$

Удовлетворяя граничным условиям и требованиям максимума скорости в точке  $y = 0$ , получаем

$$u_1 = -\beta a(1 + \xi) + \frac{\beta a}{\chi} \ln\left(\frac{1 + \chi \xi}{1 - \chi}\right),$$

$$u_2(\xi) = u_1(-\xi). \quad (6)$$

Здесь введены обозначения

$$\xi = \frac{y}{a}, \quad \chi = \frac{\Delta p a}{a l}. \quad (7)$$

Так как течение симметрично относительно точки  $\xi = 0$ , то в дальнейшем будем рассматривать только область  $-1 \leq \xi \leq 0$ , где  $u' = u'_1 > 0$ .

Очевидно, что наибольшая скорость сдвига возникает на стенке канала  $\xi = -1$ . Подставив в (3) численные данные, находим  $u'_{\max} = 8.71$ . Следовательно, если во всей области  $-1 \leq \xi \leq 0$   $u' < 8.71$ , то течение будет полностью неньютоновским. Это условие определяет критический параметр  $\chi_k$  неньютоновского течения  $\chi_k = 0.982$ . Физически это означает следующее. Если градиент давления достаточно мал, так что  $\chi < \chi_k$ , течение по всему поперечному сечению канала будет неньютоновским. При этом распределение скоростей описывается соотношением (6). Если же  $\chi > \chi_k$ , профили скорости усложняются.

3. Рассмотрим течения, в которых  $\chi > \chi_k$ , т.е. течения под воздействием большого градиента давления. В этом случае максимальная скорость сдвига, определяющая границы неньютоновского течения, достигается в некоторой точке  $\xi_1$ , лежащей внутри интервала  $-1 < \xi < 0$ . Условие  $u'_{\max} = 8.71$  приводит к выражению

$$\chi \xi_1 = -0.982, \quad (8)$$

которое определяет  $\xi_1$ .

Согласно (3), это означает, что область неньютоновского течения ограничена координатой  $\xi_1$ , а область  $-1 \leq \xi \leq \xi_1$  является областью, в которой вязкость постоянна и равна  $\eta_1$ , т.е. это область ньютоновского течения. Назовем такое течение смешанным.

Рассчитаем профиль скорости смешанного течения, обозначив  $\tilde{u}_1$  — скорость ньютоновского течения в области  $-1 \leq \xi \leq \xi_1$ .

Решение уравнения (4) с учетом граничных условий  $u'_1(0) = 0$ ,  $\tilde{u}_1(-1) = 0$  выглядит следующим образом:

$$u_1 = -\beta a \xi + \frac{\beta a}{\chi} \ln[\alpha(1 + \alpha \xi)] = C_2,$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{\Delta p a^2}{2 l \eta_1} (1 - \xi^2) + C_1 a(1 + \xi). \quad (9)$$

Обе функции должны быть сшиты при  $\xi = \xi_1$ . Условия сшивки

$$u_1(\xi_1) = \tilde{u}_1(\xi_1); \quad u'_1(\xi_1) = \tilde{u}'_1(\xi_1). \quad (10)$$

Последнее условие в (10) вызвано равенством значений  $\eta$  в точке  $\xi_1$ .

Эти условия позволяют определить постоянные  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 a = -\beta a + \frac{\beta a}{1 + \chi \xi_1} + \frac{\Delta p a^2}{l \eta_1} \xi_1,$$

$$C_2 = -\beta a - \frac{\beta a}{\chi} \ln[\alpha(1 + \chi \xi_1)] + \beta a \frac{1 + \xi_1}{1 + \chi \xi_1} + \frac{\Delta p a^2}{l \eta_1} \left\{ \xi_1(1 + \xi_1) + \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2) \right\}.$$

Окончательный результат в случае  $\chi > \chi_k$  выгладит следующим образом:

$$u_1 = -\beta a(1 + \xi) + \frac{\beta a}{\chi} \ln \frac{1 + \chi \xi}{1 + \chi \xi_1} + \frac{1}{2} \beta a \chi \frac{\eta_0}{\eta_1} (1 + \xi_1)^2 + \beta a \frac{1 + \xi_1}{1 + \chi \xi_1};$$

$$\eta_0 = \eta(u'_1 = 0) = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \xi_1 \leq \xi \leq 0, \quad (11)$$

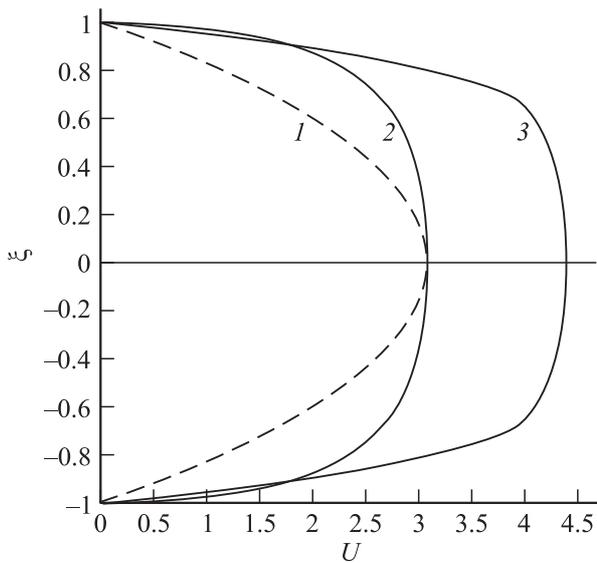
$$\tilde{u}_1 = \beta a \chi \frac{\eta_0}{\eta_1} (1 + \xi) \times \left\{ \frac{1}{2}(1 - \xi) + \xi_1 - \frac{\xi_1}{1 + \chi \xi_1} \frac{\eta_1}{\eta_0} \right\},$$

$$-1 \leq \xi \leq \xi_1$$

При  $\xi_1 = -1$   $u_1$  переходит в  $u_1(\xi)$  из соотношений (6), а  $\tilde{u}_1 \equiv 0$ , так как в этом случае  $\xi = -1$ .

## Заключение

На основе уравнения Навье–Стокса с классическим тензором вязких напряжений проведено исследование течения неньютоновской жидкости в плоском канале. В качестве таковой была избрана кровь с  $\frac{\partial \eta}{\partial u'} < 0$  (псевдопластик), для которой имеются подробные экспериментальные данные. Полученные профили скорости течения такой жидкости представлены на рис. 3. Видно, что они весьма существенно отличаются от параболических профилей ньютоновской жидкости [7]. В частности, на рис. 3 при  $\chi = \chi_k$  приведен профиль скорости неньютоновского течения (2). Здесь же (1) приведен профиль скорости, который имела бы ньютоновская жидкость с такой же максимальной скоростью. Профиль скорости 3 описывает смешанное течение с  $\chi = 1.5$ . Расчеты показывают, что даже при больших градиентах давления ( $\chi \gg \chi_k$ ) остается область неньютоновского течения вблизи  $\xi = 0$ , т.е. там, где  $u' = 0$ . Иначе говоря, при течении неньютоновской жидкости „неньютоновость“



**Рис. 3.** Сопоставление различных типов течений: 1 — течение ньютоновской жидкости с максимальной скоростью, равной скорости неньютоновской жидкости с  $\chi = \chi_k$ , 2 — течение неньютоновской жидкости с  $\chi = \chi_k$ , 3 — смешанное течение с  $\chi = 1.5$ .

не исчезает никогда, лишь область неньютоновского течения сужается, локализуясь в окрестности  $\xi = 0$ .

Полученные решения позволяют ответить на вопрос: адекватно ли при наблюдаемой эффективной вязкости уравнения Навье–Стокса описывают течение неньютоновской жидкости с  $\frac{\partial \eta}{\partial u'} < 0$ . Для этого надо получить экспериментально распределение скорости течения в поперечном направлении, т. е. профиль скорости.

При проведении численных оценок по полученным соотношениям следует иметь в виду, что они справедливы при выполнении условия

$$d < 2a, \quad (12)$$

где  $d$  — диаметр эритроцита,  $2a$  — ширина канала. Условие (12) может не выполняться для каналов очень малой ширины.

Полагая, что соотношения, полученные для течения крови в плоском канале, применимы (хотя бы качественно) для оценок свойств течения крови по сосудам, сделаем такие оценки для крупных сосудов. Согласно [4], падение среднего давления по всей аорте у собак равно  $\Delta p \approx 4 \text{ mm Hg} \approx 500 \text{ Pa}$ . Характерная длина  $l$  аорты  $\approx 10 \text{ cm}$ . Таким образом,  $\Delta p/l \approx 50 \text{ Pa/cm}$ . Подставляя это значение в (7), получаем  $\chi \approx 10^3$ . Это значение существенно превышает  $\chi_k \approx 1$ , поэтому течение крови в аорте является смешанным. Из соотношения (8) получаем:  $\xi_1 \approx 10^{-3}$ . Таким образом, в крупных сосудах „неньютоновость“ проявляется лишь вблизи осей, охватывая небольшую часть поперечного сечения этих сосудов. В более мелких сосудах (но удовлетворяющих условию (12)) область „неньютоновости“ может охватывать значительно большую часть поперечного сечения.

## Список литературы

- [1] *Wilkinson W.L.* Non-Newtonian fluids. New York–London: Pergamon Press, 1960. (Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. Пер. с англ. / Под ред. А.В.Лькова. М.: Мир, 1964. 216 с.)
- [2] *Astarita G., Marrucci G.* Principles of non-Newtonian fluid mechanics. Maidenhead–Berkshire, 1974. (Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 309 с.)
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 6. М.: Физмат, 1988. 733 с.
- [4] *Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A.* The mechanics of the circulation: Oxford Univ. Press, 1978. (Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 624 с.)
- [5] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
- [6] *Einstein A.* // Ann. Phys. 1906. Vol. 19. 206 p.; 1911. Vol. 34. 591 p.
- [7] *Schlichting H.* Boundary Layer Theory. New York: McCraw–Hill, 1955. (Шлихтин Г. Теория пограничного слоя. Пер. с англ. М.: Наука, 1969. 712 с.)