

01
Моделирование электрофизических характеристик биоткани с учетом крупномасштабных неоднородностей

© К.Г. Куликов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: kulikov_kg@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 10 октября 2011 г.)

Построена электродинамическая модель отражения плоской волны от слоя, моделирующего биологическую структуру с медленно меняющейся толщиной с учетом шероховатостей при условии, что характерные размеры неровностей на поверхности значительно превышают длину волны. Модель позволяет варьировать величину неровностей шероховатой поверхности, электрофизические параметры исследуемого биологического образца, геометрические характеристики и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами моделируемой биоткани.

Введение

Настоящая работа является продолжением цикла работ по применению методов теории дифракции к проблеме светорассеяния на биологических объектах различной степени сложности и организации. Развиваются результаты, полученные ранее в работах [1–5], применительно к более сложным биологическим структурам и поверхностям.

Отметим, что исследования распространения света в случайно-неоднородных средах в основном базируются на классических методах теории переноса. Однако применение теории переноса излучения не всегда оказывается эффективным для исследования распространения света в случайно-неоднородных средах, в частности, в биологических средах.

Известно, что большинство биологических поверхностей представляют собой не плоскую, а достаточно рыхлую случайно-шероховатую среду, где размеры шероховатостей больше длины волны освещающего их излучения. При этом шероховатость поверхностей оказывает влияние на характеристики распространения и рассеяния волн. При падении на шероховатую поверхность волна не только отражается в зеркальном направлении, но и рассеивается во всех других направлениях. Очевидно, что пространственные параметры светового пучка в этом случае при его взаимодействии с шероховатой границей будут претерпевать определенные изменения по сравнению с ситуацией падения излучения на гладкую поверхность. Однако классическая теория переноса не дает ответа на вопрос, как именно могут меняться пространственные параметры луча при пересечении им неровной поверхности раздела сред [6]. Таким образом, неучет в теории переноса шероховатых границ требует привлечения классических методов теории дифракции электромагнитных волн на случайно-шероховатых поверхностях. В связи с этим представляется весьма актуальным исследовать оптические характеристики моделируемой биологической структуры с учетом шероховатостей (когда характерные размеры неровностей

на поверхности значительно превышают длину волны) классическими методами теории дифракции.

Следует отметить ряд работ, где исследовалось рассеяние света на шероховатой поверхности [6–9]. Так, например, в работе [6] исследовано рассеяние света на шероховатой поверхности со случайными гауссовыми флуктуациями шероховатостей. Был рассмотрен случай грубых шероховатостей, когда параметры — среднее отклонение и радиус корреляции — значительно превосходят длину волны. В работе [7] также рассматривался вопрос о рассеянии света на анизотропной шероховатой поверхности. В [8] изучалось рассеяние света от шероховатой цилиндрической поверхности. В работе [9] исследовалось (теоретически и численно) рассеяние света на шероховатой диэлектрической поверхности.

В настоящей работе построена электродинамическая модель, которая позволяет при расчетах варьировать электрофизические параметры исследуемой биологической структуры с учетом шероховатостей (реальная и мнимая части показателя преломления эпидермиса, верхнего слоя дермы, крови) и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами крови при воздействии лазерного излучения для случая *in vivo*.

Задача состояла из 3 последовательных этапов. На 1-м этапе необходимо было решить задачу рассеяния на шероховатой границе, найти коэффициент отражения плоской волны от плавно нерегулярного слоя, моделирующего заданную биологическую среду с учетом шероховатости границы при условии, что размеры шероховатостей больше длины волны освещающего их излучения. На 2-м этапе — решить задачу об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением. Задача решалась путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном опорном сечении [1]. На 3-м этапе — решить задачу определения зависимости интенсивности излучения от коэффициента преломления для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы, и исследовать влияние шероховатостей

на электрофизические характеристики моделируемого биологического образца. При этом моделируемая структура состояла из 3 областей с различными показателями преломления (эпидермис, верхний слой дермы, сосуд крови), освещаемых лазерным пучком.

Рассеяние плоской волны на шероховатой поверхности при условии, что характерные размеры неровностей на поверхности превышают длину волны падающего излучения

Поверхности реальных тел, в частности, в биологии всегда в той или иной степени не являются идеально гладкими. Поэтому отражение и преломление волн на этих поверхностях сопровождаются явлениями, которые отсутствуют в случае идеально гладких границ раздела.

Строгих методов решения в случае шероховатой поверхности не существует. Задачу можно решить лишь приближенно при определенных ограничениях, налагаемых на размеры и форму неровностей. При этом применяют следующие методы расчета рассеянного поля: метод малых возмущений и метод Кирхгофа (метод касательной плоскости). В настоящей работе для расчета рассеянного поля примем метод Кирхгофа.

Для решения поставленной задачи воспользуемся приближением Кирхгофа. Для корректного применения метода Кирхгофа сделаем допущение о плавности неровностей. Тогда в каждой ее точке волновое поле можно представить в виде суммы падающего поля E_{inc} и отраженного поля E_{ref} .

Запишем в кирхгофовом приближении выражения для поля, рассеянного некоторой плавной неровной поверхностью $z = H(x, y)$. Выделим некоторый участок S этой поверхности, линейные размеры которого велики по сравнению со средним размером неровностей, а последний, в свою очередь, много больше длины волны. Будем предполагать, что ни для падающей волны, ни для рассеянной нет затенения каких-либо элементов поверхности.

Пусть на шероховатую поверхность падает под углом плоская s - или p -монохроматическая волна, которая имеет единичную амплитуду следующего вида:

$$E_{inc}(r) = e^{-ik_1 r}.$$

Наблюдение будем производить во фраунгоферовой зоне участка S и в направлении волнового вектора \mathbf{k} . В этой зоне элементарные волны от всех элементов рассеивающей области могут рассматриваться как плоские.

Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} будут выражаться через некоторую скалярную функцию, например E , которая будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\Delta E + k^2 E = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями следующего вида [10–12]:

$$E_{ref}|_{x=H(x,y)} = (1 + V)E_{inc}|_{z=H(x,y)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_{ref}}{\partial n}|_{z=H(x,y)} = (1 - V) \frac{\partial E_{inc}}{\partial n}|_{z=H(x,y)}, \tag{3}$$

где $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, V — коэффициент отражения, который зависит от физических параметров среды, n — единичный вектор внешней нормали. При этом необходимо учитывать, что формулы для коэффициента отражения в случае s -поляризации или p -поляризации будут различаться.

Отметим, что при использовании метода Кирхгофа решается не краевая задача, каковой является задача дифракции, а более простая и принципиально отличная от нее — задача с заданными разрывом поля и его нормальной производной на поверхности. Таким образом, в отличие от метода возмущений, рассмотренного в работе [4], где можно строго указать границы применимости полученных результатов для широкого класса частных случаев и вычислить следующие члены разложения по известным малым параметрам. При использовании метода Кирхгофа полученные результаты нельзя рассматривать как разложение точного решения в ряд по какому-либо малому параметру, например, по отношению длины волны к характерным линейным размерам тела, на котором происходит дифракция.

Как известно, значения E внутри области связаны со значениями E и $\frac{\partial E}{\partial n}$ на ограничивающей эту область поверхности формулой Грина

$$E(r) = \oint_S \left[E(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - \frac{\partial E(r')}{\partial n} G(r, r') \right] dS, \tag{4}$$

где $G(r, r')$ — функция Грина, которая имеет вид

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = |r - r'|.$$

Тогда с учетом (4) имеем [10,11]

$$E(r) = E_{inc}(r) + \oint_S \left[E_{ref}(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - \frac{\partial E_{ref}(r')}{\partial n} G(r, r') \right] dS, \tag{5}$$

$$\oint_S \left[E_{inc}(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - \frac{\partial E_{inc}(r')}{\partial n} G(r, r') \right] dS = 0. \tag{6}$$

Выражение (6) означает, что все источники поля находятся внутри поверхности.

Вычитая (6) из (5), приходим к следующей формуле:

$$E(r) = E_{inc}(r) + \oint_S \left[(E_{inc}(r') - E_{ref}(r')) \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - \left[\frac{\partial E_{inc}(r')}{\partial n} - \frac{\partial E_{ref}(r')}{\partial n} \right] G(r, r') \right] dS. \tag{7}$$

Подставим в выражение (7) значения поля и его производной по поверхности, тогда получим

$$E(r) = E_{\text{inc}}(r) + \oint_S V \left[E_{\text{inc}}(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - \frac{\partial E_{\text{inc}}(r')}{\partial n} G(r, r') \right] dS. \quad (8)$$

В дальнейшем будем рассматривать только рассеянное поле, которое будет определяться следующим образом:

$$E_{\text{scat}}(r) = \oint_S V \left[E_{\text{inc}}(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} - \frac{\partial E_{\text{inc}}(r')}{\partial n} G(r, r') \right] dS. \quad (9)$$

Подставим в (9) приближенное выражение для производной по n от e^{ikR}/R и соответствующее приближенное выражение для e^{ikR}/R , которые будут определяться следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &\approx \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} i(\mathbf{n}, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}, \\ \frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial n} &\approx \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial e^{-i(\mathbf{k}_1, \mathbf{r})}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} i(\mathbf{n}, \mathbf{k}_1) e^{-i(\mathbf{k}_1, \mathbf{r})}, \\ \frac{e^{ikR}}{R} &\approx \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (10)$$

тогда получим

$$E_{\text{scat}}(r) = i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \mathbf{q} \oint_S V [\mathbf{n} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}] dS, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \quad dS = \frac{dx dy}{\alpha}, \quad \mathbf{n} = \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial x}, \alpha \frac{\partial H}{\partial y}, -\alpha \right), \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n} dS &= \left[\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, -1 \right] dx dy, \\ (\mathbf{q}, \mathbf{r}) &= q_x x + q_y y + q_z H(x, y), \\ \frac{\partial e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}}{\partial x} &= i \left[q_x + q_z \frac{\partial H}{\partial x} \right] e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}, \\ \frac{\partial e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}}{\partial y} &= i \left[q_y + q_z \frac{\partial H}{\partial y} \right] e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}, \\ \mathbf{n} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})} dS &= \left[\frac{\partial e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}}{\partial x} - q_x e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}, \frac{\partial e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}}{\partial y} - q_y e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})}, -q_z e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})} \right] \frac{dx dy}{q_z}. \end{aligned} \quad (13) \quad (14) \quad (15)$$

Подставим в (11) выражение (15), тогда с учетом (12)–(14) получаем

$$E_{\text{scat}}(r) = i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \times \oint_{S_0} V \left[\frac{-q^2}{q_z} + \frac{1}{iq_z} q_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{iq_z} q_y \frac{\partial}{\partial y} \right] e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})} dx dy, \quad (16)$$

где $q_x = -k(\sin \theta_s \cos \varphi_s - \sin \theta_i)$, $q_y = -k \sin \theta_s \sin \varphi_s$, $q_z = -k(\cos \theta_i + \cos \theta_s)$, θ_s — угол рассеяния, θ_i — угол падения, φ_s — азимутальный угол. Заметим, в формуле (16) перешли от интегрирования по поверхности S к интегрированию по ее проекции S_0 на плоскость $z = 0$.

Перепишем выражение (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{\text{scat}}(x, y) &= -i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{q^2}{q_z} \left[\oint_{S_0} V [e^{i(q_x x + q_y y + q_z H(x, y))}] dx dy \right] \\ &+ i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left[\oint_{S_0} V \left[\frac{1}{iq_z} q_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{iq_z} q_y \frac{\partial}{\partial y} \right] \times e^{i(q_x x + q_y y + q_z H(x, y))} dx dy \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что вторая часть формулы (17) дает краевой эффект.

Отражение плоской волны от слоя с медленно меняющейся толщиной с учетом шероховатости, когда характерные размеры неровностей на поверхности значительно превышают длину волны

После того как нашли в кирхгофовом приближении выражения для поля, рассеянного некоторой плавной неровной поверхностью $z = H(x, y)$, когда характерные размеры неровностей на поверхности значительно превышают длину волны, рассмотрим задачу об отражении плоской волны от слоя с медленно меняющейся толщиной с учетом шероховатости.

Рассмотрим следующую оптическую систему. Система состоит из 3 областей с различными показателями преломления. С целью достижения наибольшего соответствия структуре реального объекта исследования представим границы раздела слоев модельной среды в виде некоторых поверхностей $z_i = H_i(x, y)$, $i = 1, 2$, причём вид этих поверхностей будет определен ниже.

Пусть на слой падает под углом θ плоская s - или p -поляризованная волна. Требуется найти отраженное поле. Электромагнитное поле (\mathbf{E}, \mathbf{H}) в среде со слоем будет удовлетворять в этом случае уравнению вида

$$\Delta E + k^2 n_j^2 E = 0, \quad \Delta H + k^2 n_j^2 H = 0, \quad (18)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, n_j — комплексный показатель преломления в j -м слое ($j = 1, 4$), $n_j = n_j^0 + i\chi_j$.

Введем в рассмотрение сжатые координаты

$$\xi_1 = \epsilon x, \quad \xi_2 = \epsilon y, \quad \xi_3 = \epsilon z. \quad (19)$$

Будем считать, что толщины слоев H_1, H_2 являются медленно меняющимися функциями переменных x и y . Обозначим отношение характерной толщины слоя к характерному продольному масштабу L через ϵ , тогда получим

$$H_i(x, y) = h_i(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\epsilon x, \xi_2=\epsilon y}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (20)$$

Для определенности рассмотрим случай p -поляризации. Условия непрерывности касательных компонент E и H на границах раздела сред приводят к следующим граничным условиям:

$$E_1|_{\xi_3=0} = E_2|_{\xi_3=0}, \quad E_j|_{\xi_3=\epsilon h_i(\xi_1, \xi_2)} = E_{j+1}|_{\xi_3=\epsilon h_i(\xi_1, \xi_2)}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \frac{\partial E_1}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0} = \frac{1}{n_2^2} \frac{\partial E_2}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_j \Big|_{\xi_3=\epsilon h_i(\xi_1, \xi_2)} \\ & = \frac{1}{n_3^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_{j+1} \Big|_{\xi_3=\epsilon h_i(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $j = \overline{2, 3}, i = \overline{1, 2}$.

Будем искать отраженное поле в виде волн с медленно меняющимися амплитудами и быстро осциллирующими фазами, тогда с учетом (19) получим

$$\begin{aligned} E_1 = & \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{inc}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) \\ & + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) A(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} E_2 = & \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{2\text{tr}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ & + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} E_3 = & \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ & + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + E_{\text{scat}}(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \quad (26)$$

где $E_{\text{scat}}(\xi_1, \xi_2)$ в общем виде определено выражением (17)

$$E_4 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (27)$$

Где $\tau_{1\text{inc}}, \tau_{1\text{ref}}, \tau_{2\text{elap}}, \tau_{3\text{ref}}, \tau_{3\text{elap}}, \tau_{4\text{ref}}, \tau_{4\text{elap}}$ определены в работе [2]. Амплитуды A, B^\pm, C^\pm, D ищем в виде рядов

по степеням малого параметра ϵ_x, ϵ_y , при этом выражения для амплитуд определяются аналогично методу, описанному в работе [2].

Подстановка (24)–(27) в (21)–(23) порождает рекуррентную систему уравнений. Из этой системы для отраженного поля находится коэффициент отражения A с учетом шероховатости на границе раздела моделируемой среды, когда характерные размеры неровностей на поверхности значительно превышают длину волны, падающего излучения.

Кратко рассмотрим задачу об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением. Задача решалась путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном опорном сечении, тогда в главном приближении будем иметь [2]

$$E_{\text{ref}} \approx \frac{A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\alpha}, \quad (28)$$

где

$$\xi_1'' \sim = \xi_1'' \left(\frac{k_x^1}{kn_1} - \frac{k_{13}k_{1x}k_{1y}}{k_{1z}kn_1} \right),$$

$$\xi_2'' \sim = \xi_2'' \left(\frac{k_y^1}{kn_1} - \frac{k_{23}k_{1x}k_{1y}}{k_{1z}kn_1} \right), \quad k_x^1, k_y^1, k_{1z}, k_{13}, k_{23},$$

$$\alpha = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}\alpha_{12} + \alpha_{13}^2)(\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{22}^2 + \alpha_{13}\alpha_{23})$$

$$+ (\alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}\alpha_{13}) + (\alpha_{21}^2 + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{23}^2)$$

определено в [2]. Аналогично получается отраженное поле для H .

Определение интенсивности излучения

Интенсивность излучения определяется следующим образом:

$$I = |E_{(\text{ref})\perp}|^2 + |E_{(\text{ref})\parallel}|^2, \quad (29)$$

$$E_{(\text{ref})\perp} = \cos(\theta)E_{(\text{ref})z} + \sin(\theta)E_{(\text{ref})x},$$

$$E_{(\text{ref})\parallel} = \sin(\theta)E_{(\text{ref})z} - \cos(\theta)E_{(\text{ref})x},$$

где $E_{(\text{ref})x}, E_{(\text{ref})z}$ даются следующими выражениями:

$$\frac{\partial E_{(\text{ref})z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{(\text{ref})y}}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu_j H_{(\text{ref})x},$$

$$\frac{\partial E_{(\text{ref})x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{(\text{ref})z}}{\partial x} = -i\omega\mu_0\mu_j H_{(\text{ref})y}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial E_{(\text{ref})y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{(\text{ref})x}}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu_j H_{(\text{ref})z}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial H_{(\text{ref})z}}{\partial y} - \frac{\partial H_{(\text{ref})y}}{\partial z} = i\omega\epsilon_0\epsilon_j E_{(\text{ref})x},$$

$$\frac{\partial H_{(\text{ref})x}}{\partial z} - \frac{\partial H_{(\text{ref})z}}{\partial x} = i\omega\epsilon_0\epsilon_j E_{(\text{ref})y}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial H_{(\text{ref})y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{(\text{ref})x}}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_{(\text{ref})z}. \quad (33)$$

Выражения (30)–(33) соответствуют системе уравнений Максвелла в декартовой системе координат, при этом $E_{(\text{ref})}$ определяется выражением (28).

Таким образом, на данном этапе получили формулы, позволяющие определить явную зависимость интенсивности лазерного излучения от коэффициента преломления и поглощения для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы. Дальнейшее исследование и анализ приведенных зависимостей будем проводить численными методами.

Численные расчеты с модельной средой и выводы

Отметим, что многие биологические ткани обладают оптической неоднородностью, в частности дерма [13–20], тогда в этом случае поверхность верхней дермы моделируемой биологической структуры возможно описывать следующей двумерной диапазоно-ограниченной функцией Вейерштрасса [21]:

$$H_2(x, y) = \sigma \sqrt{\left[\frac{2(1 - q_2^{2(D_2-3)})}{M_2(1 - q_2^{2(D_2-3)N})} \right]} \sum_{n=0}^{N-1} q_2^{(D_2-3)n} \times \sum_{m=1}^M \sin \left\{ K_2 q_2^n \left[x \cos \frac{2\pi m}{M_2} + y \sin \frac{2\pi m}{M_2} \right] + \varphi_{nm} \right\}. \quad (34)$$

При этом остальные границы раздела слоев модельной среды с целью достижения наибольшего соответствия структуре реального объекта исследования представим в виде волнистой поверхности $z_1 = H_1(x, y)$, где $H_1(x, y) = c_1 \sin(a_1 x + b_1 y)$, a_1, b_1, c_1 — некоторые произвольно задаваемые константы, причем $a_1 \ll 1$, $b_1 \ll 1$, $c_1 \ll 1$.

В формуле (34) $q_2 > 1$ — параметр пространственно-частотного масштабирования, D_2 — фрактальная размерность, $2 < D_2 < 3$, K_2 — основное пространственное волновое число N_2 , и M_2 — число гармоник, φ_{nm} — произвольная фаза, которая распределена равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$, σ — среднеквадратичное отклонение.

Функция $H_2(x, y)$ самоподобная и имеет производные. Поверхность на ее основе имеет много масштабов, а шероховатость может изменяться в зависимости от рассматриваемого масштаба. Для численного описания шероховатой поверхности принято использовать такие параметры, как интервал корреляции, среднеквадратичное отклонение и коэффициент пространственной автокорреляции. В работе [22] рассмотрен вопрос о возможности использования этих статистических параметров для оценки влияния фрактальной размерности и других параметров на шероховатость поверхности. Для этого исследуются численно зависимость среднего

интервала корреляции от D при разных значениях q и зависимость среднего интервала корреляции от q при разных значениях D . Показано, что величина неровностей фрактальной поверхности в основном будет управляться величиной D . Отметим, что фрактальная поверхность предполагает наличие неровностей всех масштабов относительно длины рассеиваемой волны. Особенности рассеяния волн фрактальной поверхностью обусловлены ее недифференцируемостью, таким образом, фрактальный фронт, являясь недифференцируемым, не имеет нормали. Однако хорды, которые соединяют значения характерных высот неровностей на определенных расстояниях, имеют конечный среднеквадратичный наклон. В этом случае вводят гипотезу фрактальной хаотической поверхности: она равна длине, на которой наклоны поверхности близки к единице [23]. Таким образом, на сегодня приняты 2 модели рассеяния. 1-я модель — это модель с фрактальными высотами, 2-я модель — это модель с фрактальными наклонами неровностей. В рамках 2-й модели замечаем, что она однократно дифференцируема и имеет наклон, который изменяется непрерывно от точки к точке. Это позволяет рассматривать данную модель в рамках геометрической оптики.

Подставим в (17) выражение (34), тогда получим

$$E_{\text{scat}}(x, y) = -i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{q^2}{q_z} \times \oint_{S_0} V \exp \left[q_x x + q_y y + q_z c \sum_{n=0}^{N-1} q_2^{(D_2-3)n} \right] \times \exp \left[\sum_{m=1}^M \sin K_2 q_2^n \left[x \cos \frac{2\pi m}{M_2} + y \sin \frac{2\pi m}{M_2} \right] + \varphi_{nm} \right] dx dy = -i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{q^2}{q_z} \times \oint_{S_0} V \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^M \exp \left[q_x x + q_y y + q_z c q_2^{(D_2-3)n} \right] \times \exp \left[\sin K_2 q_2^n \left[x \cos \frac{2\pi m}{M_2} + y \sin \frac{2\pi m}{M_2} \right] + \varphi_{nm} \right] dx dy, \quad (35)$$

$$c = \sigma \sqrt{\left[\frac{2(1 - q_2^{2(D_2-3)})}{M_2(1 - q_2^{2(D_2-3)N})} \right]}.$$

Используем представление функции Бесселя первого рода u -го порядка в виде степенного ряда [23]

$$e^{ikz \sin \phi} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} J_u(z) e^{iu\phi}. \quad (36)$$

Следуя работе [23], подставим выражение (36) в (35), тогда получим

$$E_{\text{scat}}(x, y) = -i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{q^2}{q_z} \oint_{S_0} V \times \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^M \sum_{u=-\infty}^{\infty} J_{u_{nm}} \left(q_z c q_2^{(D_2-3)n} \right) \times \exp \left[q_x x + q_y y + iu \left\{ K_2 q_2^n \left[x \cos \left(\frac{2\pi m}{M_2} \right) + y \sin \left(\frac{2\pi m}{M_2} \right) + \varphi_{nm} \right] \right\} \right]. \quad (37)$$

Перепишем соотношение (37) в следующем виде:

$$E_{\text{scat}}(x, y) = -i \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \frac{q^2}{q_z} \oint_{S_0} V \times \sum_{u_{M,N-1}=-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^M J_{u_{nm}} \left(q_z c q_2^{(D_2-3)n} \right) \times \exp \left[iK_2 \left[\sum_{n=0}^{N-1} q_2^n \sum_{m=1}^M u_{nm} x \cos \left(\frac{2\pi m}{M_2} \right) \right] + q_x x \right] \times \exp \left[iK_2 \left[\sum_{n=0}^{N-1} q_2^n \sum_{m=1}^M u_{nm} y \sin \left[\frac{2\pi m}{M_2} \right] \right] + q_y y \right] \times \exp \left[i \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^M u_{nm} \varphi_{nm} \right]. \quad (38)$$

Если будем рассматривать рассеяние от конечной площадки размером $L_x \times L_y$ при $-L_x \leq x \leq L_x$, $-L_y \leq y \leq L_y$, тогда с учетом (38) по аналогии с [23] получим следующее выражение для рассеянного поля:

$$E_{\text{scat}}(x, y) = -i \frac{e^{-ikr}}{\pi r} \frac{q^2}{q_z} \times \sum_{u_{M,N-1}=-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^M J_{u_{nm}} \left(q_z c q_2^{(D_2-3)n} \right) \times \exp \left[i \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^M u_{nm} \varphi_{nm} \right] \frac{\sin(L_x \vartheta_x)}{\vartheta_x} \frac{\sin(L_y \vartheta_y)}{\vartheta_y} + \Psi_k,$$

где Ψ_k дает краевой эффект,

$$\vartheta_x = q_x + K_2 \left[\sum_{n=0}^{N-1} q_2^n \sum_{m=1}^M u_{nm} x \cos \left[\frac{2\pi m}{M_2} \right] \right],$$

$$\vartheta_y = q_y + K_2 \left[\sum_{n=0}^{N-1} q_2^n \sum_{m=1}^M u_{nm} y \sin \left[\frac{2\pi m}{M_2} \right] \right].$$

Рассмотрим моделируемую оптическую систему. Система состоит из 3 областей с различными показателями преломления (эпидермис, верхний слой дермы, сосуд крови). Она имеет следующие параметры: коэффициент преломления слоев

$$n_2^0 = 1.33, \quad n_3^0 = 1.35, \quad n_4^0 = 1.35,$$

и характерную толщину слоев

$$d_1 = 65 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad d_2 = 565 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$n_1^0 = 1, \quad \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 10^{-5},$$

$$a_1 = -0.0987, \quad b_1 = 0.09920, \quad c_1 = 0.07749,$$

длина волны $\lambda = 0.63 \mu\text{м}$ (центр линии гелий-неонового лазера), $q_2 = 1.01$, $K_2 = 6$, $N_2 = 2$, $M_2 = 3$, $D_2 = 2.9$, $\sigma = 1$, т.е. функция $H_2(x, y)$ нормирована на величину $\sigma = 1$. Заметим, что значения параметров a_1 , b_1 , c_1 подобраны таким образом, чтобы форма поверхности наиболее соответствовала форме границы раздела соответствующего слоя в структуре нормальной кожи человека. В численных расчетах краевой эффект не учитывался.

На рис. 1, а показана зависимость интенсивности рассеянного поля от фрактальной размерности D .

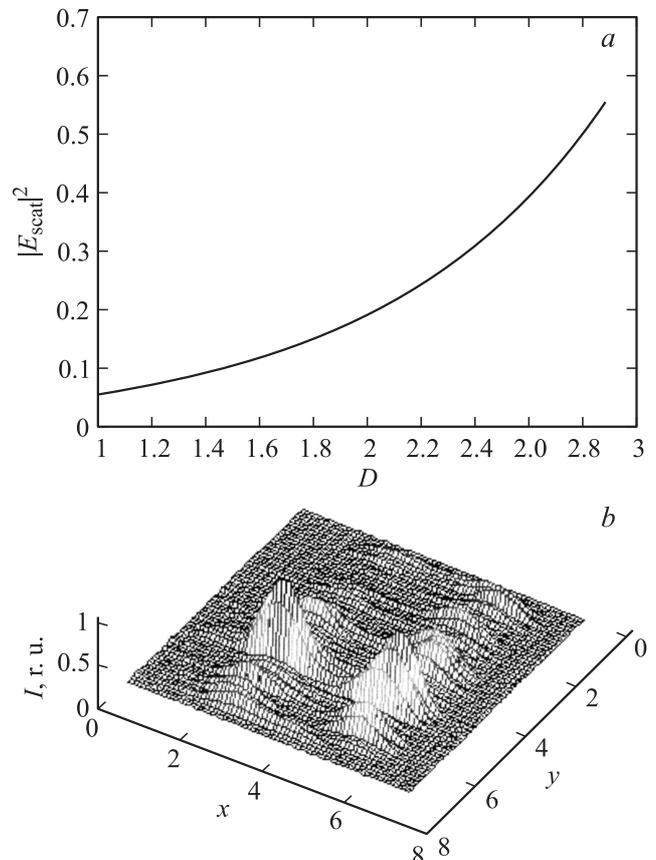


Рис. 1. а — зависимость квадрата модуля рассеянного поля от фрактальной размерности D . б — интенсивность излучения при конкретных значениях параметров и при $\theta = 0$, $\varphi = 0$.

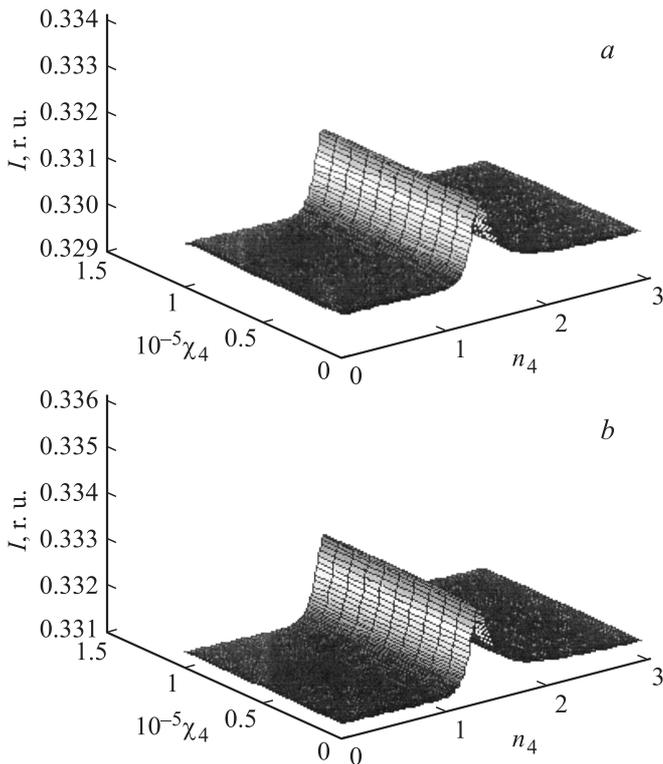


Рис. 2. *a* — зависимость интенсивности лазерного излучения от коэффициентов преломления n_4 и поглощения χ_4 для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы при коэффициенте поглощения эпидермиса и дермы равном $\chi = 10^{-4}$. *b* — то же, что и на рис. *a*, но при $\chi = 10^{-5}$.

Из приведенного графика видно, что интенсивность рассеяния увеличивается при усложнении рельефа поверхности (фрактальной размерности D). Данное явление можно объяснить увеличивающимся вкладом вторичного рассеяния на мелких неровностях по сравнению с менее шероховатой поверхностью.

На рис. 1, *b* представлена интенсивность излучения при конкретных значениях электрофизических параметров и q_2 , K_2 , D_2 , N_2 , M_2 , a_1 , b_1 , c_1 для многослойной поглощающей и рассеивающей свет сред, моделирующей кожу человека. Из рис. 1, *b* видно, что гауссов пучок расщепляется, см. работу [2].

Зависимости интенсивности лазерного излучения от коэффициента преломления и поглощения для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы при различных коэффициентах поглощения эпидермиса и дермы, представлены на рис. 2, *a* и *b*.

Следует отметить, что построенная модель достаточно чувствительна к изменению электрофизических параметров моделируемой биологической структуры, в частности, к коэффициенту поглощения. Построенная модель позволяет вырывать величину неровностей шероховатой поверхности, электрофизические параметры исследуемого биологического образца, геометрические характеристики и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами моделируемой

биоткани. Таким образом, при помощи данной математической модели возможно измерение спектральных различий нормальной и патологической тканей для случая *in vivo* с учетом крупномасштабных неоднородностей с целью разработки спектрального автографа для определения патологических измерений в исследуемых биологических образцах, связанных с изменением электрофизических свойств эпидермиса, верхней дермы и крови.

Аналогичные зависимости могут быть рассчитаны для лазеров с другими параметрами и использованы для обработки экспериментальных кривых поглощения исследуемых биологических структур с учетом крупномасштабных неоднородностей.

Приведенные зависимости могут быть использованы для предсказаний изменений оптических свойств крови в капиллярном русле, обусловленных в ней различными биофизическими, биохимическими и физиологическими процессами, а также могут быть рассчитаны для лазеров с другими параметрами, а также полученные количественные оценки могут быть применены для обработки и интерпретации экспериментальных данных.

В дальнейшем предполагается расширить модель, рассмотрев задачу рассеяния на крупномасштабных неоднородностях с учетом многократного рассеяния, с целью более адекватного описания отражения от шероховатой границы раздела, моделируемых биологических структур различной морфологии.

Список литературы

- [1] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2002. Т. 92. № 2. С. 228–236.
- [2] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2004. Т. 96. Вып. 3. С. 522–534.
- [3] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 96–103.
- [4] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 82–88.
- [5] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 3. С. 110–114.
- [6] Рогаткин Д.А. // Опт. и спектр. 2004. Т. 97. Вып. 3. С. 484–493.
- [7] Li Hai-Xia, Cheng Chuan-Fu. // Chin. Phys. Lett. 2011. Vol. 28. N 8.
- [8] Fan Y.Y., Huynh V.M. // Appl. Optics. 1993. Vol. 32. N 19. P. 3452–3458.
- [9] Sanchez-Gil J.A., Nieto-Vesperinas M. // J. Opt. Soc. Am. A. 1991. Vol. 8. N 8. P. 1270–1286.
- [10] Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
- [11] Рытов С.М., Кравицов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978. 463 с.
- [12] Beckmann P. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. NY., 1963.
- [13] Симоненко Г.В., Тучин В.В., Акодина Н.А. // Оптич. журн. 2000. Т. 67. № 6. С. 70–73.
- [14] Huang X.R., Knighton R.W. // J. Biomed. Opt. 2002. Vol. 7. P. 199–204.
- [15] Kienle A., Forster F.K., Diebold R., Ilibst R. // Phys. Med. Biol. 2003. Vol. 48. P. 7–14.
- [16] Moritani M., Hayashi N., Utsuo A., Kawai H. // Polym. J. 1971. Vol. 2. P. 74–87.

- [17] *Sankaran V., Walsh J.T.* // Proc. SPIE. 2000. Vol. 4001. P. 54–62.
- [18] *Чернуха А.М.* Кожа (строение, функция, общая патология, терапия) / Под ред. А.М. Чернуха, Е.П. Фролова. М.: Медицина, 1982.
- [19] *Pierard G.E., Lapiere C.M.* // Amer. J. Dermatopathology. 1987. Vol. 9. P. 219–224.
- [20] *Nickell S., Hermann M., Essenpreis M.* // Phys. Med. Biol. 2000. Vol. 45. P. 2873–2886.
- [21] *Лактюнькин А.В.* // Нелинейный мир. 2007. Т. 5. № 5. С. 286–287.
- [22] *Лактюнькин А.В.* // Автореф. канд. дис. М., 2009.
- [23] *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и в радиолокации. М., 2002. 664 с.