

01;04

## Нелинейная теория ионно-звуковых волн в запыленной электрон-позитрон-ионной плазме

© А.Е. Дубинов, Д.Ю. Колотков, М.А. Сазонкин

Саровский физико-технический институт — филиал Научно-исследовательского ядерного университета „Московский инженерно-физический институт“,  
607186 Саров,  
Нижегородская область, Россия  
e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 15 июня 2011 г.)

Развита теория ионно-звуковых волн в запыленной электрон-позитрон-ионной плазме. В рамках линейного приближения показано, что периодические волны существуют в ограниченной области параметров. Получено выражение для скорости звука и изучена зависимость скорости от пространственного заряда пылинок. В рамках нелинейной теории получено общее точное решение, которое затем анализировалось по методу псевдопотенциала Бернулли. Найдены частные решения в виде нелинейных периодических волн, периодических волн большой амплитуды (сверхнелинейных волн) и уединенных волн сжатия и разрежения (солитонов).

### Введение

Последние несколько лет характеризуются увеличением числа теоретических работ, исследующих модели нелинейных волн в плазме сложного состава, которая содержит 3, 4, 5 и более видов частиц, от самых легких (нейтрино, электроны, позитроны) до самых тяжелых (ионы фуллеренов, заряженные пылинки). Одна из такого рода плазмы — запыленная электрон-позитрон-ионная плазма (далее — ерід-плазма) — также пользуется сейчас повышенным вниманием. Причиной тому является предположение о ее возможном существовании, например, во внутренних областях аккреционных дисков вблизи нейтронных звезд и магнетаров. Получить ерід-плазму в лабораторных условиях при современном уровне развития техники также возможно.

Развитию теории ерід-плазмы посвящены, например, работы [1–7]. В работе [1] рассмотрены вистлеры, в [2] — электромагнитные поверхностные волны, а в [3] — ионно-акустические поверхностные волны в замагниченной ерід-плазме. Частные случаи ерід-магнитоплазмы в отсутствие ионов описаны в работах [4,5]: в [4] рассмотрено хаотическое поведение при низкочастотном электростатическом возмущении плазмы, а в [5] — пыле-акустические волны. Плоские и неплоские пыле-акустические волны в незамагниченной ерід-плазме изучались также в работе [6].

Наиболее близка к настоящей работе — статья [7]. В ней построена теория ионно-акустических солитонов и двойных слоев в незамагниченной бесстолкновительной ерід-плазме, в которой электронная и позитронная компоненты считались безынерционными и распределенными по Больцману, причем каждый сорт — со своей постоянной температурой. Ионная компонента считалась холодной, а пылевая — неподвижной и с постоянным зарядом пылинок.

Цель настоящей работы — распространить результаты работы [7] на случай более общих термодинамических законов сжатия-разрежения — политроп — для подвижных компонент плазмы. Настоящая работа продолжает также работы [8–16] по развитию нелинейной теории электростатических волн в ер-, еід- и ері-плазмах.

### Теоретическая модель

Рассмотрим однородную квазинейтральную ерід-плазму, заполняющую бесконечное пространство и состоящую из ионов, электронов и позитронов, а также содержащую макроскопические пылинки. Считаем, что плазма находится в стационарном состоянии, столкновения между компонентами отсутствуют, а магнитное поле равно нулю. Будем рассматривать нерелятивистское волновое движение в такой плазме.

Обозначим заряд иона —  $q_i = e > 0$ ,  $q_e = -e < 0$  — заряд электрона,  $q_p = e > 0$  — заряд позитрона и  $q_d$  — заряд пылинок. Условие квазинейтральности для невозмущенной ерід-плазмы будет иметь вид

$$en_{0i} - en_{0e} + en_{0p} + q_d n_d = 0,$$

где индексом „0“ обозначены невозмущенные концентрации компонент плазмы. Заряд пылинок будем считать постоянным в процессе распространения волны. Последнее предположение сильно упрощает модель, однако уже в рамках такой простой модели можно описать многие существенные особенности, возникающие при распространении волн.

Пылинки заряжаются, как правило, за счет оседания на них заряженных частиц. Если плазма состоит только из ионов и электронов, то суммарный заряд пылинок становится отрицательным, так как электроны обладают большей подвижностью, чем ионы. Однако когда в

плазме имеются еще и позитроны, возможны режимы, в которых заряд пылинок может быть положительным, т.е. когда число осевших на пылинки позитронов и ионов больше числа осевших электронов. Введем параметры, описывающие пространственный заряд пылевой фракции в ерид-плазме  $\alpha = q_d n_d / e n_{0i}$  и концентрацию позитронов  $\delta = n_{0p} / n_{0i}$ . Для описания всех возможных случаев в дальнейшем будем рассматривать отрицательный и положительный заряды пылинок, что соответствует разным знакам параметра  $\alpha$ . Тогда равновесная концентрация электронов выражается через эти параметры следующим образом:  $n_{0e} = n_{0i}(1 + \delta + \alpha)$ .

Уравнения, описывающие одномерную динамику ионной компоненты плазмы, имеют следующий вид: уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_i m_i} \frac{\partial P_i}{\partial x}, \quad (2)$$

уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi(e n_i + e n_p - e n_e + \alpha e n_{0i}). \quad (3)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо также записать уравнения состояния, связывающие давления компонент с их концентрацией. Рассмотрим случай, когда фазы сжатия и разрежения в волне являются политропными процессами и уравнения состояния имеют вид

$$P_l = k_B T_l n_{0l} \left( \frac{n_l}{n_{0l}} \right)^{\gamma_l}, \quad (4)$$

где  $l = i, e, p$ ,  $\gamma_l$  — показатели политроп,  $T_l$  — значения температур компонент плазмы.

При изучении ионно-звуковых волн тяжелые пылинки можно считать неподвижными, а электроны и позитроны в силу их малой массы по сравнению с ионами безынерционными. Записав уравнение движения в виде (2) с учетом уравнений состояния (4) и  $m_{e,p} \rightarrow 0$  для электронов и позитронов, получаем так называемые барометрические формулы

$$\begin{aligned} n_e &= n_{0e} \left( 1 + \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e} \frac{e\phi}{k_B T_e} \right)^{1/(\gamma_e - 1)} \\ &= n_{0i}(1 + \delta + \alpha) \left( 1 + \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e} \frac{e\phi}{k_B T_e} \right)^{1/(\gamma_e - 1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} n_p &= n_{0p} \left( 1 - \frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p} \frac{e\phi}{k_B T_p} \right)^{1/(\gamma_p - 1)} \\ &= \delta n_{0i} \left( 1 - \frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p} \frac{e\phi}{k_B T_p} \right)^{1/(\gamma_p - 1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

## Линейная теория

Будем предполагать, что на ерид-плазму накладывается небольшое волновое возмущение. Тогда все переменные, входящие в систему уравнений (1)–(4), можно записать в виде

$$f = f_0 + \tilde{f} \exp[j(\kappa x - \omega t)], \quad (7)$$

где  $\kappa$  — проекция волнового вектора на ось  $Ox$ ,  $\omega$  — частота (при этом величины со знаком „ $\sim$ “ над ними являются амплитудами малого возмущения), а  $j^2 = -1$ .

Подставляя возмущение (7) в уравнения динамики ионов и после стандартной процедуры линеаризации, получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega(\kappa) = \omega_i \sqrt{\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \frac{1}{\lambda_{Dp}^2} + \frac{1}{\lambda_{De}^2}} + \lambda_{Di}^2 \kappa^2}, \quad (8)$$

где  $\omega_i^2 = 4\pi n_{0i} e^2 / m_i$  — квадрат плазменной частоты ионного газа,

$$\lambda_{Dp}^2 = \frac{\gamma_p k_B T_p}{4\pi n_{0p} e^2} = \frac{\gamma_p k_B T_p}{4\pi n_{0i} e^2 \delta}$$

— квадрат длины Дебая позитронов,

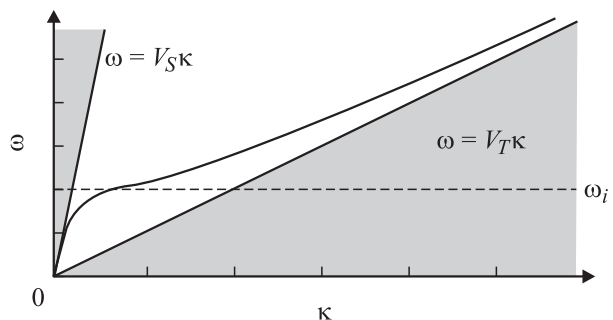
$$\lambda_{De}^2 = \frac{\gamma_e k_B T_e}{4\pi n_{0e} e^2} = \frac{\gamma_e k_B T_e}{4\pi n_{0i} e^2 (1 + \delta + \alpha)}$$

— квадрат длины Дебая электронов,

$$\lambda_{Di}^2 = \frac{\gamma_i k_B T_i}{4\pi n_{0i} e^2}$$

— квадрат длины Дебая ионов.

График дисперсионной зависимости по формуле (8) представлен на рис. 1. Вид этой кривой традиционен для ионно-звуковых волн в различных моделях плазмы как при положительном, так и при отрицательном заряде пылинок. Дисперсионная кривая полностью лежит в неокрашенной (на рис. 1) области, ограниченной снизу прямой  $\omega = V_{Ti} \kappa$  ( $V_{Ti}$  — тепловая скорость ионного газа, определяемая из формулы  $V_{Ti}^2 = k_B T_i \gamma_i / m_i$ ), к которой



**Рис. 1.** График дисперсионной зависимости по формуле (8). Области фазовых скоростей, где возможны уединенные волны, закрашены.

она приближается асимптотически. Сверху дисперсионная кривая ограничивается касательной к графику в начале координат. Угол наклона этой касательной определяет линейную скорость ионно-звуковых волн

$$V_s = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=0} = \omega_i \sqrt{\lambda_{Di}^2 + \frac{\lambda_{Dp}^2 \lambda_{De}^2}{\lambda_{Dp}^2 + \lambda_{De}^2}}$$

$$= V_{Ti} \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{\gamma_e}{\gamma_p} \frac{T_i}{T_e} (1 + \delta + \alpha) + \frac{\gamma_e}{\gamma_p} \frac{T_i}{T_p} \delta}} \quad (9)$$

Фактически незакрашенная область на рис. 1, имеющая вид сектора, ограничивает возможный диапазон фазовых скоростей гармонической ионно-звуковой волны малой амплитуды  $V_{Ti} < V < V_s$ . При этом именно в закрашенных областях параметров, т.е. вне указанного интервала, следует искать нелинейные волны типа солитон.

Нижняя граница интервала — тепловая скорость ионов  $V_{Ti}$  — не зависит от наличия пылевой фракции в плазме, а определяется только температурой ионов и их массой. Верхняя граница — скорость ионного звука  $V_s$  — зависит от концентрации позитронов, концентрации пылинок и их заряда. На рис. 2 представлена зависимость скорости звука от модуля пространственного заряда пылинок. Видно, что при отрицательном заряде пылинок (кривая 1) скорость звука монотонно возрастает от скорости звука ерід-плазмы ( $V_{S(e-p-i)}$ ) до максимальной скорости, которая достигается при оседании всех электронов на пылинки ( $V_{S(d-p-i)}$ ). Для положительного заряда (кривая 2) скорость звука падает с ростом пространственного заряда пылинок. Зависимость от знака заряда пылинок представлена на рис. 3. При возрастании значения отрицательного заряда пылинок скорость ионного звука растет, а при увеличении значения положительного скорость уменьшается.

Наличие пылинок вносит еще одну существенную особенность, которая возникает, например, когда все электроны оседают на пылинки. В этом случае ионно-звуковые волны переходят в ленгмюровские волны по-

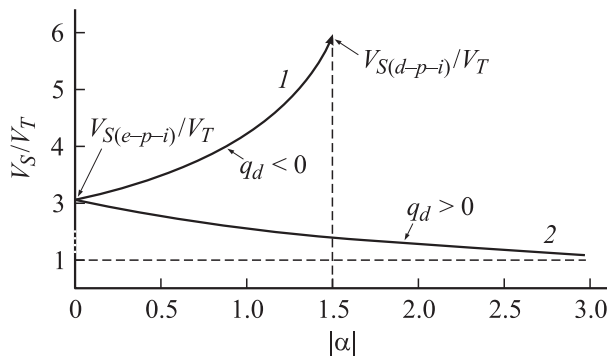


Рис. 2. Зависимость скорости звука от относительного пространственного заряда пылинок: 1 — отрицательного, 2 — положительного.

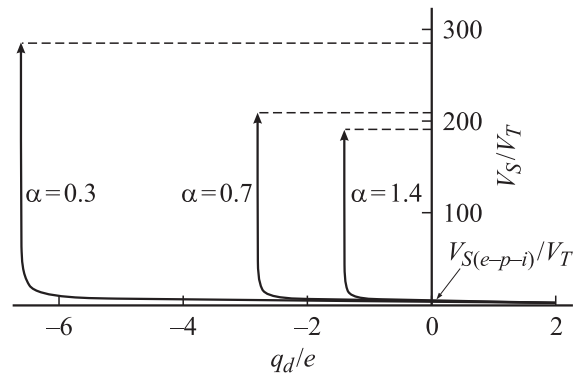


Рис. 3. Зависимости скорости ионно-звуковых волн от относительного заряда пылинок.

ложительного заряда на нейтрализующем фоне отрицательного заряда пылинок.

### Нелинейная теория

Далее будем рассматривать стационарную ионно-звуковую волну большой амплитуды. Для анализа сильно нелинейных волн воспользуемся методом псевдопотенциала Бернулли.

Пусть стационарная волна распространяется в положительном направлении оси  $x$  с некоторой фазовой скоростью  $V$ . Сделаем в системе (1)–(4) следующую замену переменных:

$$\xi = x - Vt, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}. \quad (10)$$

Такая замена означает переход из лабораторной системы отсчета в новую систему, связанную с движением волны. При этом решение будет иметь вид стационарной волны, профиль которой определяется только одной переменной  $\xi$ .

При переходе в новую систему в уравнениях (1)–(4) необходимо также преобразовать скорость компонент в соответствии с правилом Галилея

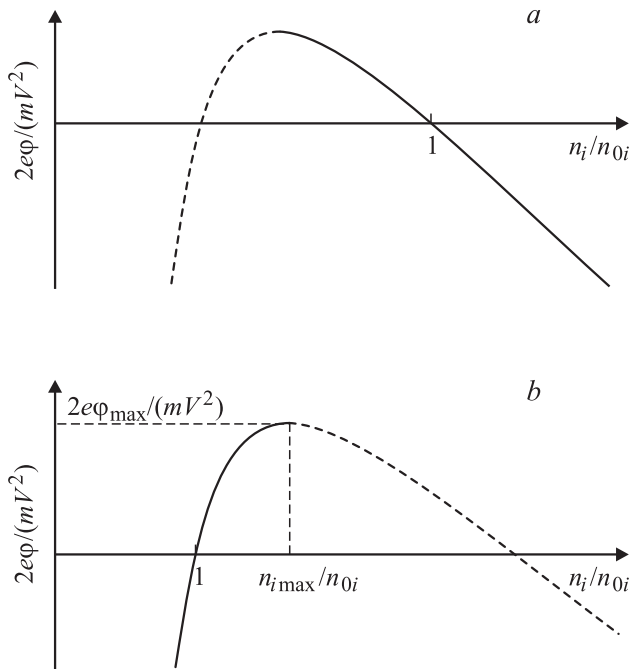
$$u_i = v_i - V, \quad (11)$$

где  $v_i$  — скорость ионов в лабораторной системе отсчета, в которой невозмущенная ерід-плазма покоится, а  $u_i$  — скорость ионов в системе отсчета, связанной с волной, в которой невозмущенная плазма движется со скоростью  $-V$ . Поскольку в случае стационарной волны скорость компонент меньше скорости волны, то  $u_i < 0$ . После замены переменных исходные уравнения (1)–(4) принимают вид

$$\frac{d(n_i u_i)}{d\xi} = 0, \quad (12)$$

$$u_i \frac{du_i}{d\xi} = -\frac{e}{m} \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{k_B T_i \gamma_i}{m n_{0i}^{\gamma_i - 1}} n_i^{\gamma_i - 2} \frac{dn_i}{d\xi}, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = 4\pi e (n_e - n_i - n_p - \alpha n_{0i}). \quad (14)$$



**Рис. 4.** Зависимости  $\varphi(n_i)$ , построенные по формуле (15);  $a - V = V_{Ti}/2$ ;  $b - V = 3V_{Ti}$ .

Интегрируем уравнение непрерывности (12) и уравнение движения (13) при

$$\lim_{u_i \rightarrow -V} n_i = n_{0i}, \quad \lim_{u_i \rightarrow -V} \varphi = 0.$$

$$\varphi = -\frac{mV^2}{2e} \left[ \left( \frac{n_{0i}}{n_i} \right)^2 - 1 \right] - \frac{k_B T_i \gamma_i}{e(\gamma_i - 1)} \left[ \left( \frac{n_i}{n_{0i}} \right)^{\gamma_i - 1} - 1 \right]. \quad (15)$$

График нормированной зависимости  $\varphi(n_i)$  (15) имеет вид кривой с максимумом (рис. 4), одна из ветвей которого проходит через точку  $n_i/n_{0i} = 1$ , соответствующую квазинейтральности невозмущенной ерід-плазмы. При  $V < V_{Ti}$  через эту точку проходит правая ветвь (рис. 4, *a*), а при  $V > V_{Ti}$  — левая (рис. 4, *b*). Остальные пересечения с осью абсцисс лишены физического смысла, и на графике соответствующие ветви изображены штриховыми кривыми.

Для существования периодической волны необходимо наличие возвращающей силы, стремящейся уменьшить первоначальное возмущение. Случай рис. 4, *b* соответствует тому, что при увеличении концентрации ионов потенциал становится положительным и, следовательно, возрастает действующая на ионы электрическая сила, направленная в сторону положения равновесия, т.е. возникает возвращающая сила. Аналогичную картину видим и при уменьшении концентрации ионов относительно  $n_{0i}$ . В случае рис. 4, *a* электростатическая сила, наоборот, усиливает первоначальное возмущение. Следовательно, в этом случае периодические колебания возникнуть не могут. В итоге при анализе графиков на

рис. 4 приходим к выводу о невозможности существования периодической волны с фазовой скоростью  $V < V_{Ti}$ .

Далее нам понадобится производная от функции  $\varphi(n_i)$  по  $n_i$

$$\frac{d\varphi}{dn_i} = f(n_i) = \frac{mV^2}{en_{0i}} \left( \frac{n_{0i}}{n_i} \right)^3 - \frac{k_B T_i \gamma_i}{en_{0i}} \left( \frac{n_i}{n_{0i}} \right)^{\gamma_i - 2}. \quad (16)$$

Найдем точку экстремума функции  $\varphi(n_i)$ . Для этого решим уравнение

$$f(n_i) = 0. \quad (17)$$

Для обоих случаев, представленных на рис. 4, точка экстремума является максимумом. Далее нас будет интересовать только случай, когда существуют колебания (рис. 4, *b*) и при котором максимум функции соответствует максимуму концентрации ионов

$$n_{i \max} = n_{0i} \left( \frac{V}{V_{Ti}} \right)^{2/(\gamma_i + 1)}. \quad (18)$$

Эта величина определяет максимально возможную амплитуду волны при данной скорости  $V$ .

Видно, что аналитически разрешить (15) относительно концентрации ионов  $n_i$  при произвольном показателе политропы  $\gamma_i$  не представляется возможным. И поэтому для решения этой задачи использовать широко известный метод псевдопотенциала Сагдеева не представляется возможным. Поэтому применим новый метод — метод псевдопотенциала Бернулли [17].

Метод псевдопотенциала Бернулли, так же как и метод псевдопотенциала Сагдеева, основывается на том, что система уравнений, описывающих динамику волны, сводится к уравнению, описывающему колебания некоторой псевдочастицы в потенциальной яме.

Для этого обратимся к уравнению Пуассона (14). Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции

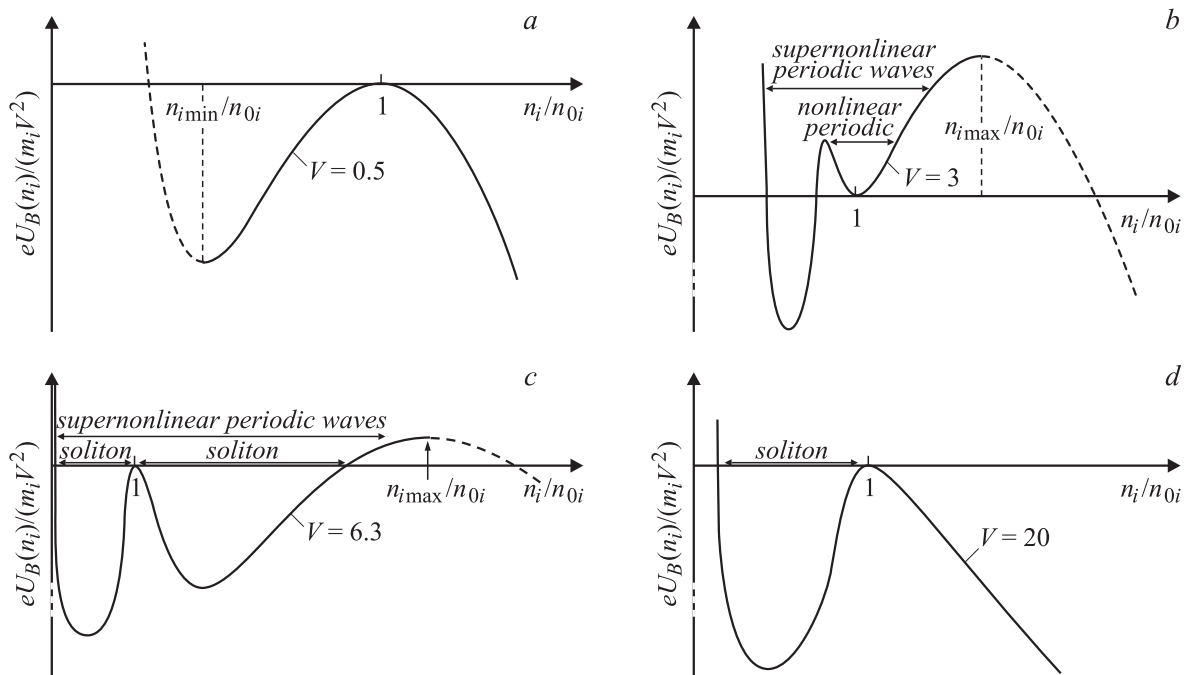
$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = f(n_i) \frac{d^2n_i}{d\xi^2} + \frac{df(n_i)}{dn_i} \left( \frac{dn_i}{d\xi} \right)^2, \quad (19)$$

а также соотношениями (5) и (6), сведем (14) к автономному дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно  $n_i(\xi)$ :

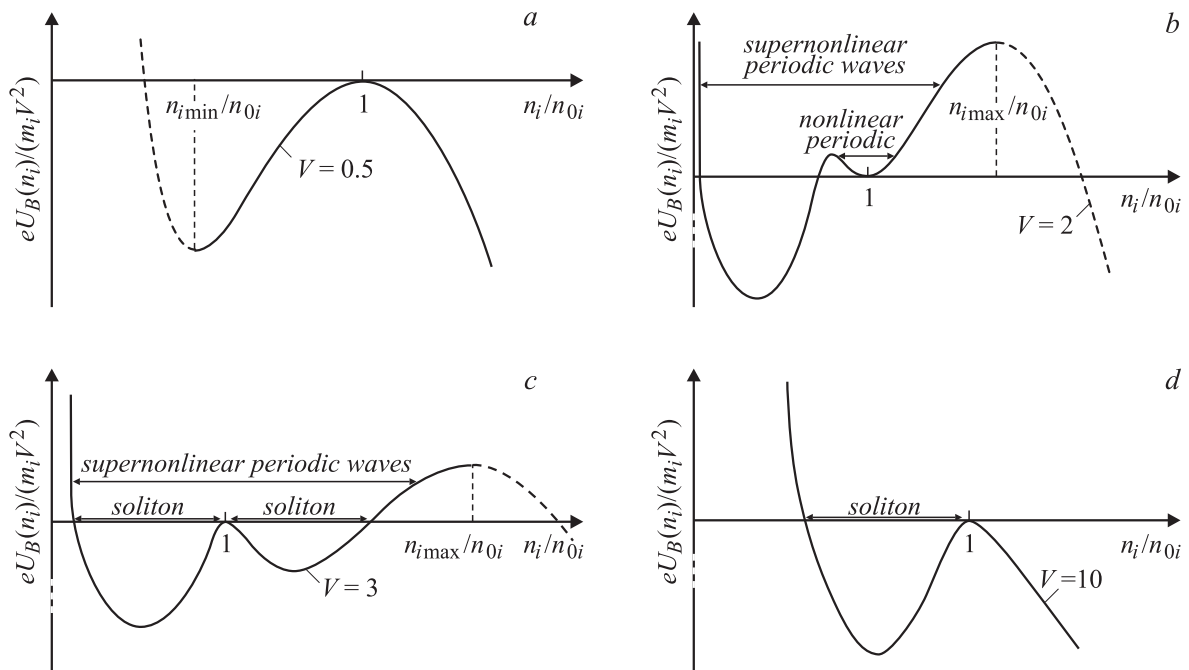
$$f(n_i) \frac{d^2n_i}{d\xi^2} + \frac{df(n_i)}{dn_i} \left( \frac{dn_i}{d\xi} \right)^2 = -4\pi e \rho(n_i), \quad (20)$$

где

$$\rho(n_i) = n_i + \delta n_{0i} \left( 1 - \frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p} \frac{e\varphi}{k_B T_p} \right)^{1/(\gamma_p - 1)} - n_{0i} (1 + \delta + \alpha) \left( 1 + \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e} \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right)^{1/(\gamma_e - 1)} + \alpha n_{0i}. \quad (21)$$



**Рис. 5.** Графики псевдопотенциала при отрицательном заряде пылинок при  $\gamma_e = 1.5$ ,  $\gamma_p = 1.5$ ,  $\gamma_i = 1.5$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $T_{0i}/T_{0e} = 0.06$ ,  $T_{0p}/T_{0e} = 1.01$ .  $V/V_T$ : a — 0.5; b — 3; c — 6.3; d — 20.



**Рис. 6.** Графики псевдопотенциала при положительном заряде пылинок при  $\gamma_e = 1.5$ ,  $\gamma_p = 1.5$ ,  $\gamma_i = 1.5$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $T_{0i}/T_{0e} = 0.06$ ,  $T_{0p}/T_{0e} = 1.01$ .  $V/V_T$ : a — 0.5; b — 2, c — 3, d — 10.

Стандартным образом (см. [13–15,17]) из (20) можно получить функцию псевдопотенциала

$$U_B(n_i) = \int_1^{n_i} f(n_i)\rho(n_i)dn_i. \quad (22)$$

Графики псевдопотенциала при различных значениях скорости волны  $V$  приведены на рис. 5 и 6. Рисунок 5 построен для отрицательного заряда пылинок, а рис. 6 для положительного заряда пылинок. Проанализируем эти графики.

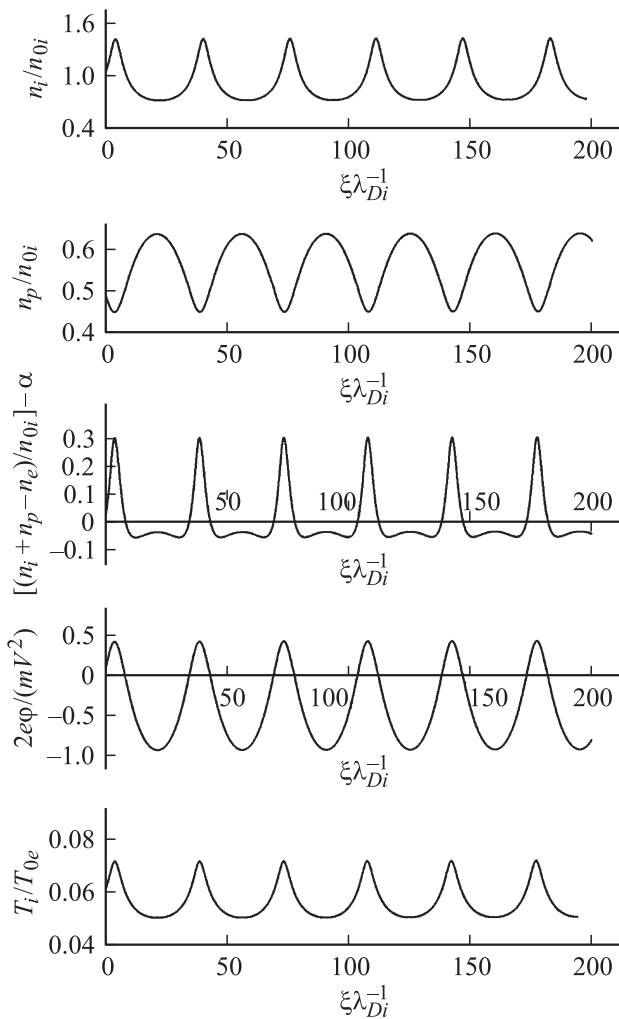


Рис. 7. Партитура периодических ионно-звуковых волн.

На рис. 5, *a* и 6, *a*, построенных при  $V < V_{Ti}$ , видно, что ни уединенные, ни периодические волны в этой области параметров существовать не могут, так как на графике нет потенциальных ям, в которых движение псевдопотенциала финитно. Это согласуется как с выводами линейной теории, так и с выводами, полученными при анализе функции (15).

На рис. 5, *b* и 6, *b* графики построены для случая  $V_{Ti} < V$ . Кривые для скоростей  $V_{Ti} < V < V_S$  (на рис. 5, *b* —  $V = 3V_{Ti}$  на рис. 6, *b* —  $V = 2V_{Ti}$ ) соответствуют незакрашенному сектору на рис. 1, в котором лежит дисперсионная кривая. Здесь видим потенциальную яму вблизи положения равновесия  $n_i/n_{0i} = 1$ . Колебания псевдочастицы в такой яме соответствуют периодической волне. При этом правый склон отвечает за фазу сжатия ионной компоненты плазмы в волне, а левый — за фазу разрежения. Стенки ямы не одинаковы по форме, что говорит об асимметричном характере движения псевдочастицы в ней. Вблизи положения равновесия яма имеет практически параболический вид, и, следовательно, колебания с малой амплитудой будут слабо

отличаться от гармонических. Партитура гармонических нелинейных волн (т.е. синхронизированная система профилей физических величин в волне) представлена на рис. 7. Колебания же максимально большого размаха отвечает движение псевдочастицы по сепаратрисе на фазовом портрете, которая опирается на локальный максимум, находящийся слева от точки равновесия. Такое движение могло бы соответствовать уединенной волне, выходящей из этого максимума. Однако по физическим соображениям решение в виде движения по сепаратрисе должно быть обращено, так как для уединенной волны должно выполняться  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} n_i = n_{0i}$ . В левой части графика рис. 5, *b* и 6, *b* имеется еще одна локальная яма, для которой также существует колебательное решение. Но колебания, соответствующие дну этой ямы и до ее максимума, невозможны в силу нарушения условия квазинейтральности невозмущенной ерід-плазмы. Однако возможны колебания, когда энергия изменяется в пределах от локального максимума в потенциальной яме до значения  $U_B(n_i = n_{i \max})$ . Партитура волны, отвеча-

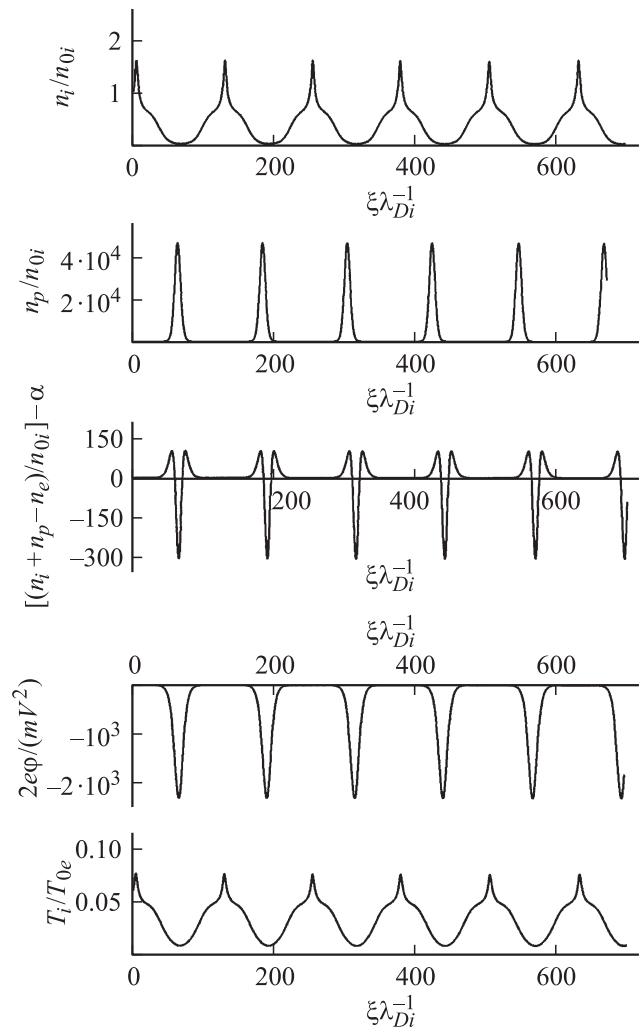


Рис. 8. Партитура периодических сверхлинейных ионно-звуковых волн.



ющая этим колебаниям, представлена на рис. 8. Эти периодические волны не могут быть малыми, и поэтому они никак не обнаруживают себя на дисперсионной зависимости на рис. 1, построенной для малых гармонических волн. Согласно разд. 8.2 из работы [18], подобные периодические волны, которые представляются на фазовом портрете замкнутыми траекториями, охватывающими сепаратрисные петли, называются сверхлинейными волнами. С физической точки зрения сверхлинейная волна в ерід-плазме представляет собой гибридную волну, в которой совмещены звуковые колебания ионной фракции с их плазменными колебаниями относительно неподвижного отрицательного пылевого фона (поэтому и появляются две ямы на профиле псевдопотенциала).

При  $V > V_S$  существуют две формы графика псевдопотенциала: кривые при  $V = 6.3V_{Ti}$  на рис. 5, *c* и при

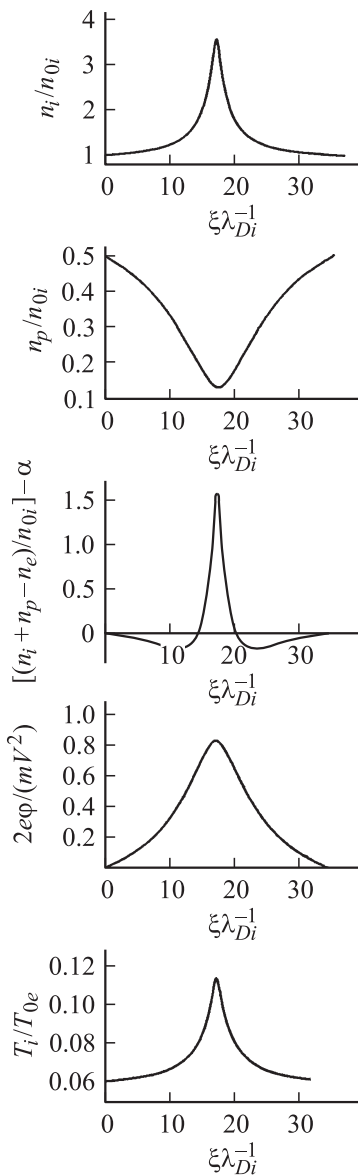


Рис. 9. Партитура ионно-звуковых солитонов сжатия.

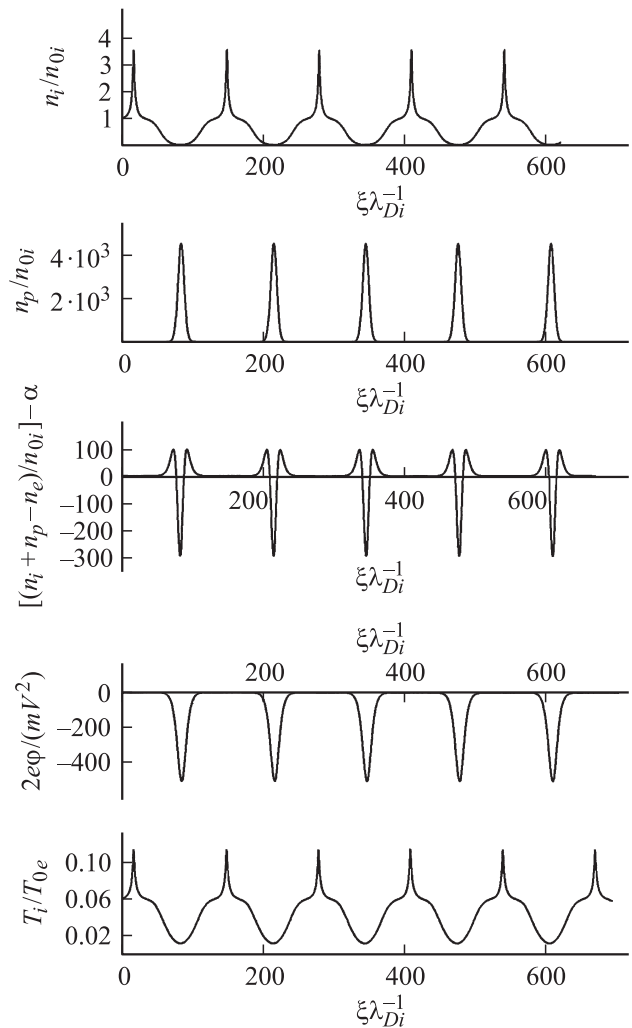


Рис. 10. Партитура периодических сверхлинейных ионно-звуковых волн.

$V = 3V_{Ti}$  на рис. 6, *c* отвечают не очень большому превышению  $V$  над  $V_S$ , а кривые при  $V = 20V_{Ti}$  на рис. 5, *d* и при  $V = 10V_{Ti}$  на рис. 6, *d* отвечает существенно большим скоростям волны.

В первом случае справа от точки равновесия имеется потенциальная яма, колебания псевдочастицы в которой, очевидно, должны быть отброшены. Однако здесь существует и решение в виде уединенной волны сжатия (ионно-звукового солитона), опирающегося на максимум и идущего в сторону роста  $n_i$ . Это решение удовлетворяет условию  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} n_i = n_{0i}$  и, следовательно, физически реализуемо. Партитура этих волн представлена на рис. 9. Кроме того, здесь возможна и сверхлинейная волна, партитура которой показана на рис. 10.

Кривые при  $V_{Ti} = 20V_{Ti}$  на рис. 5, *c* и при  $V = 10V_{Ti}$  на рис. 6, *c* не имеют потенциальной ямы справа от точки равновесия, поэтому замкнутую фазовую траекторию по сепаратрисе для них нарисовать невозможно. Условие

$$U_B(n = n_{\max}) = 0 \tag{23}$$

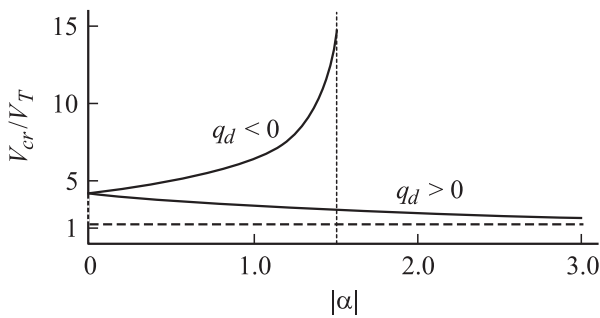


Рис. 11. Зависимости критической скорости уединенных волн сжатия от относительного пространственного заряда пылинок.

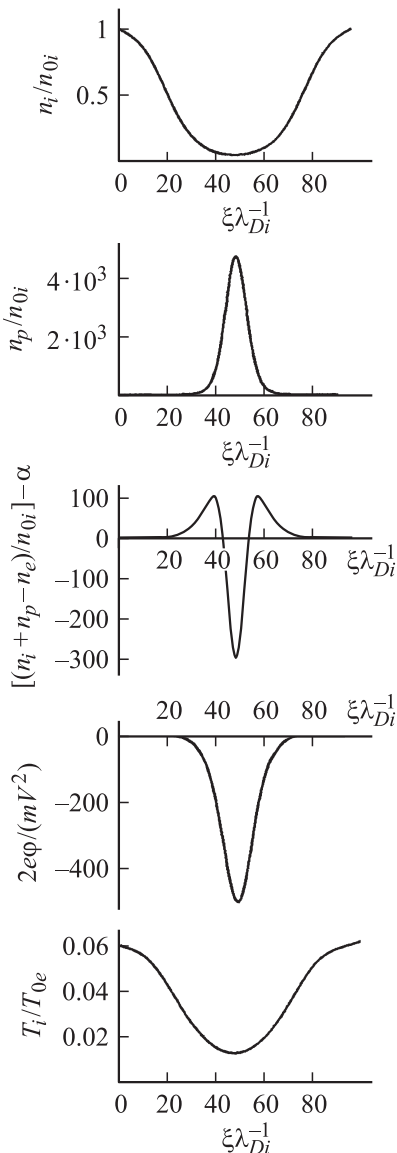


Рис. 12. Партитура ионно-звуковых солитонов разрежения.

разграничивает эти два случая и может быть использовано для нахождения максимальной скорости ионно-звукового солитона  $V_{\max}$ . На рис. 11 представлен график

зависимости критической скорости от модуля пространственного заряда пылинок.

Заметим, что на обоих рисунках имеются потенциальные ямы слева от точки равновесия  $n_i/n_{oi} = 1$ , соответствующие солитонам разрежения. Партитура таких волн представлена на рис. 12. Мы уже объясняли выше, что периодические колебания в таких ямах должны быть отброшены из-за невыполнения условия сохранения числа ионов. Оказалось, что солитоны разрежения не имеют верхней границы по скорости.

В итоге анализ псевдопотенциала Бернулли дал всего пять типов физически реализуемых решений: дозвуковая периодическая волна и дозвуковая периодическая волна большой амплитуды (сверхнелинейная волна), сверхзвуковая периодическая волна большой амплитуды (сверхнелинейная волна) и сверхзвуковые уединенные волны (солитоны) разрежения и сжатия.

## Заключение

В работе представлены линейные и нелинейные теории ионно-звуковых волн в плазме, состоящей из ионов, электронов, позитронов и пылинок. В рамках линейных теорий выведены и проанализированы дисперсионные уравнения указанных волн и определены характерные фазовые скорости. В рамках нелинейных теорий получены точные решения в виде периодических и уединенных (солитонов) волн и определены их предельные амплитуды.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-02-90418-Укр\_a и фонда „Династия“.

## Список литературы

- [1] Shukla P.K., Jammalamadaka S., Stenflo L. // *Astron. & Astrophys.* 1997. Vol. 317. N 1. P. L21.
- [2] Cho S.-H., Lee H.J., Kim Y.-S. // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61. N 4. P. 4357.
- [3] Shin D.-S., Jung Y.-D. // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 349. N 6. P. 500.
- [4] Mirza A.M., Khan K. // *Phys. Scripta.* 2002. Vol. 66. N 5. P. 376.
- [5] Shukla P.K., Marklund M. // *Phys. Scripta.* 2004. Vol. T113. P. 36.
- [6] Jehan N., Masood W., Mirza A.M. // *Phys. Scripta.* 2009. Vol. 80. N 3. P. 035 506.
- [7] Ghosh S., Bharuthram R. // *Astrophys. Space Sci.* 2008. Vol. 314. N 1–3. P. 121.
- [8] Dubinov A.E., Dubinova L.D., Gordienko V.A. // *Phys. Plasmas.* 2006. Vol. 13. N 8. P. 082 111.
- [9] Гордиенко В.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. // *Физика плазмы.* 2006. Т. 33. № 11. С. 987.
- [10] Гордиенко В.А., Дубинов А.Е. // *Теплофизика высоких температур.* 2007. Т. 47. № 6. С. 814.
- [11] Гордиенко В.А., Дубинов А.Е. // *ЖФТ.* 2008. Т. 78. Вып. 1. С. 47.



- [12] Дубинов А.Е., Сазонкин М.А. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 9. С. 29.
- [13] Дубинов А.Е., Сазонкин М.А. // Физика плазмы. 2009. Т. 35. № 1. С. 18.
- [14] Дубинов А.Е., Сазонкин М.А. // ЖЭТФ. 2010. Т. 138. № 5(11). С. 979.
- [15] Дубинов А.Е., Колотков Д.Ю., Сазонкин М.А. // Физика плазмы. 2011. Т. 37. № 1. С. 68.
- [16] Дубинов А.Е., Сайков С.К., Цацкин А.В. // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. № 6. С. 1199.
- [17] Dubinov A.E., Sazonkin M.A. Handbook of Solitons: Research, Technology and Applications / Ed. by S.P. Lang, H. Salim. Bedore. Hauppauge NY: Nova Publishing, 2009. P. 779.
- [18] Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000.