

# Аналитическое решение системы магнитогидродинамических уравнений в квазиодномерном приближении для режимов с монотонным изменением скорости течения по длине канала

© Е.Г. Шейкин

Санкт-Петербургский государственный университет,  
198904 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: egsh@pochta.ru

(Поступило в Редакцию 15 сентября 2010 г. В окончательной редакции 29 ноября 2010 г.)

Получено аналитическое решение системы магнитогидродинамических (МГД) уравнений в квазиодномерном приближении для режимов течения с монотонным изменением скорости по длине МГД канала. Рассмотрена задача оптимального выбора параметров МГД генератора при заданном отношении площадей выходного и входного сечений МГД канала с использованием полученного аналитического решения.

## Введение

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется изучению магнитогидродинамического (МГД) воздействия на поток с целью управления характеристиками высокоскоростных летательных аппаратов [1–23]. Много работ посвящено изучению МГД воздействия на поток в тракте прямоточного воздушно-реактивного двигателя. В частности, рассматривается схема двигателя с МГД байпасом, в которой МГД генератор, расположенный перед входом в камеру сгорания, преобразует часть энтальпии потока в электроэнергию, которая возвращается в поток в канале МГД ускорителя, расположенного за камерой сгорания [1,5–9,13,14,19,21]. При анализе таких сложных газодинамических систем, включающих в себя МГД системы, для описания течений в МГД каналах часто используется квазиодномерное приближение [1,5–8,13,14,19,21]. При этом для расчета параметров МГД течения используются как численное решение системы МГД уравнений [6,8,9,14,21], так и известные аналитические решения. Так, в работах [1,5,7,19] параметры МГД течения рассчитывались с использованием аналитического решения, полученного в работе [24] для фарадеевского МГД канала и обобщенного в работе [5] для расчета параметров как фарадеевского, так и холловского МГД каналов.

Отметим, что использование данного аналитического решения позволило сформулировать требования к параметрам МГД систем, при которых использование МГД байпаса позволяет повысить удельный импульс прямоточного воздушно-реактивного двигателя [1,5,7]. К недостаткам аналитического решения системы МГД уравнений, полученного в [24], следует отнести то, что параметр, определяющий режим МГД течения, не связан явным образом с профилем МГД канала, а вводится как коэффициент пропорциональности между градиентом давления и силой Лоренца, действующей на поток. Это обстоятельство затрудняет применение данного аналитического решения для анализа сложных газодинамических систем,

включающих в себя МГД системы, при наличии геометрических ограничений, накладываемых на профиль МГД канала. Целью данной работы является получение аналитического решения системы МГД уравнений в более общей форме, учитывающей ограничения на геометрию МГД канала, в частности, на отношение площадей выходного и входного сечений канала.

## Решение системы МГД уравнений в квазиодномерном приближении для произвольного закона изменения профиля канала

Рассмотрим течение невязкого нетеплопроводного газа. Квазиодномерная модель МГД течения в безындукционном приближении описывается следующей системой уравнений [25]:

$$\begin{aligned} \rho v F &= \text{const}, \\ \rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} &= (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x, \\ \rho v \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \\ p &= \rho R T, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость потока,  $F$  — площадь поперечного сечения МГД канала,  $p$  — давление.  $T$  — температура,  $R$  — газовая постоянная,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $x$  — текущая координата,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении. В данном случае рассматривается приближение с постоянной теплоемкостью  $c_p$ . Решение, учитывающее изменение теплоемкости потока в МГД канале, будет получено в последнем параграфе статьи.

Будем рассматривать приближение фарадеевского МГД канала с секционированными электродами, для

которого [25]:

$$\begin{aligned}(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x &= -(1-k)\sigma B^2 v, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= -k(1-k)\sigma B^2 v^2,\end{aligned}$$

где  $k = E/vB$  — коэффициент нагрузки ( $0 < k < 1$  отвечает МГД генератору,  $k > 1$  отвечает МГД ускорителю),  $\sigma$  — удельная проводимость потока. Обобщение результатов, полученных для фарадеевского МГД канала, на случай холловского МГД канала будет сделано в последнем параграфе статьи.

Для упрощения системы уравнений (1) введем новую переменную  $Z$  следующим соотношением:  $Z = \frac{p}{\rho v}$ . Производную  $dZ/dx$  представим в следующем виде:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{\rho v} \frac{dp}{dx} + p \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho v} \right) = \frac{1}{\rho v} \frac{dp}{dx} + \frac{p}{G} \frac{dF}{dx},$$

где параметр  $G$  обозначает массовый расход газа через МГД канал ( $\rho v F = G$ ). Используя полученное соотношение, выразим производную  $dp/dx$  через  $dZ/dx$  и подставим ее во второе уравнение системы (1). С учетом того что для фарадеевского МГД канала  $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}/(kv)$ , получим:

$$\rho v \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dZ}{dx} - \frac{p}{G} \frac{dF}{dx} \right) = -\frac{q_g}{kv}, \quad (2)$$

где  $q_g = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ . Учитывая, что  $p = \rho v Z$ , приведем уравнение (2) к следующему виду:

$$\rho v \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dZ}{dx} - \frac{Z}{F} \frac{dF}{dx} \right) = -\frac{q_g}{kv}. \quad (3)$$

Третье уравнение системы уравнений (1) может быть записано следующим образом:

$$\rho v \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} v Z \right) = -q_g. \quad (4)$$

При получении уравнения (4) было учтено, что

$$c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} v Z,$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. В результате с использованием новой переменной  $Z$ , система МГД уравнений (1) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{G}{F} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dZ}{dx} - \frac{Z}{F} \frac{dF}{dx} \right) &= -\frac{q_g}{kv}, \\ \frac{G}{F} \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} v Z \right) &= -q_g.\end{aligned} \quad (5)$$

Выразив  $q_g$  из первого уравнения системы (5) и подставив затем во второе уравнение системы (5), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} v Z \right) = kv \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dZ}{dx} - \frac{Z}{F} \frac{dF}{dx} \right). \quad (6)$$

После несложных преобразований уравнение (6) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}(1-k)v \frac{dv}{dx} + \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} - k \right) v \frac{dZ}{dx} + \frac{\gamma}{\gamma-1} Z \frac{dv}{dx} \\ + kvZ \frac{d \ln(F)}{dx} = 0.\end{aligned} \quad (7)$$

Ограничимся рассмотрением течений с монотонно изменяющейся скоростью по длине МГД канала. В этом случае скорость  $v$  можно использовать в качестве независимой переменной и рассматривать  $Z$  и  $F$  как функции переменной  $v$ . В результате из уравнения (7) получаем следующее уравнение относительно функции  $Z(v)$ :

$$\frac{dZ(v)}{dv} + Z(v) \frac{\gamma + (\gamma-1)kv\psi(v)}{(\gamma - (\gamma-1)k)v} = \frac{(\gamma-1)(k-1)}{\gamma - (\gamma-1)k}, \quad (8)$$

где  $\psi(v) = d \ln(F(v))/dv$ . Таким образом, с помощью введения новой переменной  $Z = \frac{p}{\rho v}$  систему уравнений (1) удалось свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции  $Z(v)$ . Решение уравнения (8) с граничным условием  $Z(v_0) = Z_0$  может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}Z(v) &= Z_0 \exp(-\Phi(v_0, v)) \\ &+ \frac{(\gamma-1)(k-1)}{\gamma - (\gamma-1)k} \int_{v_0}^v \exp(-\Phi(v', v)) dv',\end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Phi(v_a, v_b) = \int_{v_a}^{v_b} \frac{\gamma + (\gamma-1)kv''\psi(v'')}{(\gamma - (\gamma-1)k)v''} dv''.$$

С учетом определенной ранее зависимости  $\psi(v)$  выражение для функции  $\Phi$  может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi(v_a, v_b) &= \frac{\gamma}{\gamma - (\gamma-1)k} \ln \left( \frac{v_b}{v_a} \right) \\ &+ \frac{(\gamma-1)k}{\gamma - (\gamma-1)k} \ln \left( \frac{F(v_b)}{F(v_a)} \right).\end{aligned} \quad (10)$$

Полученное решение (9), (10) с использованием уравнения состояния  $p = \rho RT$  и закона сохранения массы  $\rho v F = G = \text{const}$  позволяет определить параметры, характеризующие МГД течение в следующей форме:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{v}{v_0} \frac{Z(v)}{Z_0}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{v_0}{v} \frac{F_0}{F(v)}, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{F_0}{F(v)} \frac{Z(v)}{Z_0}, \quad (11)$$

где нижний индекс 0 отвечает значению параметра на входе в МГД канал.

Число Маха в рассматриваемом приближении с постоянной теплоемкостью может быть определено с использованием соотношения

$$\frac{M}{M_0} = \sqrt{\frac{v}{v_0} \frac{Z_0}{Z(v)}}.$$

Мощность  $W_g$ , вырабатываемую МГД генератором, определим, используя закон сохранения энергии, следующим образом,  $W_g = G(v_0^2/2 + c_p T_0 - v^2/2 - c_p T)$ . Отметим, что при данном определении положительные значения  $W_g$  отвечают режиму МГД генератора, а отрицательные — режиму МГД ускорителя. Введем коэффициент преобразования энергии следующим соотношением:

$$\eta_g = \frac{W_g}{G(v_0^2/2 + c_p T_0)} = 1 - \frac{v^2/2 + c_p T}{v_0^2/2 + c_p T_0}.$$

Используя (11), нетрудно привести выражение для коэффициента преобразования энергии в МГД канале к следующему виду:

$$\eta_g(v) = 1 - \frac{2\gamma Z(v)/v + \gamma - 1}{2/M_0^2 + \gamma - 1} \left(\frac{v}{v_0}\right)^2. \quad (12)$$

Таким образом, полученное решение (9), (10) и выражения (11), (12) позволяют определить параметры МГД течения и энергетические характеристики МГД генератора при произвольно заданной зависимости площади поперечного сечения МГД канала  $F(v)$ .

### Решение системы МГД уравнений в квазиодномерном приближении для частных случаев задания профиля МГД канала

Проанализировав полученное решение (9), (10), нетрудно заметить, что для некоторых случаев зависимости площади поперечного сечения МГД канала от скорости интеграл в уравнении (9) берется в явном виде и решение выражается через элементарные функции. В частности, это справедливо в том случае, когда  $F$  является степенной функцией скорости:  $F(v)/F_0 = (v/v_0)^\xi$ . Подставив это выражение в уравнения (9), (10), получим выражение для функции  $Z$  в следующем виде:

$$Z(v) = (Z_0 + v_0 C) \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-D} - v C, \quad (13)$$

где

$$C = \frac{(\gamma - 1)(1 - k)}{2\gamma + (\xi - 1)(\gamma - 1)k},$$

$$D = \frac{\gamma + (\gamma - 1)k\xi}{\gamma - (\gamma - 1)k}.$$

Для частного режима МГД течения с постоянным сечением МГД канала ( $\xi = 0$ ), коэффициенты  $C$  и  $D$  в уравнении (13) принимают следующие значения:

$$C = \frac{(\gamma - 1)(1 - k)}{2\gamma - (\gamma - 1)k},$$

$$D = \frac{\gamma}{\gamma - (\gamma - 1)k}.$$

Нетрудно заметить, что функция  $Z$  будет выражаться через элементарные функции и в том случае, когда зависимость площади поперечного сечения МГД канала задается с помощью следующего ряда:

$$f(v) = 1 + \sum_{j=1}^N a_j \left(\frac{v}{v_0}\right)^j - 1,$$

$$F(v)/F_0 = (f(v))^{1/A}, \quad (14)$$

где

$$A = \frac{(\gamma - 1)k}{\gamma - (\gamma - 1)k},$$

$N \geq 1$ . Подставив выражение (14) в уравнения (9), (10), после несложных математических преобразований получаем выражение для функции  $Z$  в следующем виде:

$$Z(v) = [Z_0 - v_0 Q \theta(v_0)] \frac{(v/v_0)^{-\beta}}{f(v)} + v \frac{Q \theta(v)}{f(v)}, \quad (15)$$

где

$$\beta = \frac{\gamma}{\gamma - (\gamma - 1)k}, \quad Q = \frac{(\gamma - 1)(k - 1)}{\gamma - (\gamma - 1)k},$$

$$\theta(v) = \frac{1}{\beta + 1} \left( 1 - \sum_{j=1}^N a_j \left( 1 - \frac{\beta + 1}{\beta + j + 1} \left(\frac{v}{v_0}\right)^j \right) \right).$$

В данной работе ограничимся анализом решения полученного для МГД канала с профилем сечения, задаваемым выражением:  $F(v)/F_0 = (v/v_0)^\xi$ . Будем рассматривать торможение сверхзвукового потока в постоянном или расширяющемся МГД канале. Очевидно,

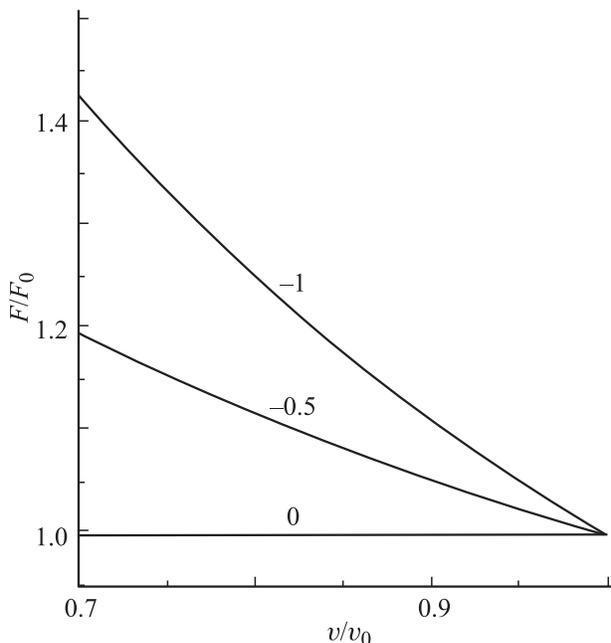
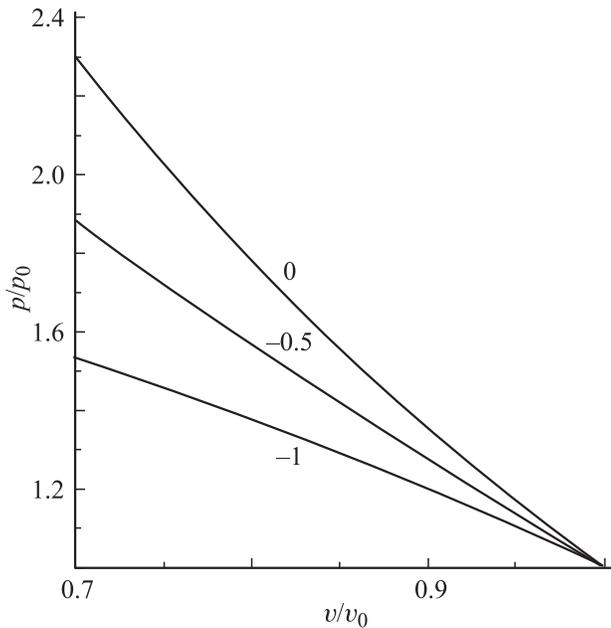
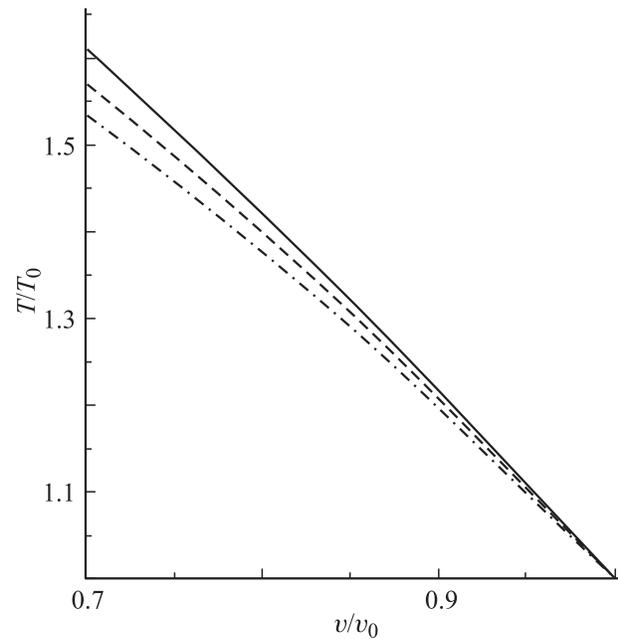


Рис. 1. Зависимость  $F(v)/F_0$  от относительной скорости потока для разных значений параметра  $\xi$ , указанных у кривых, при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ .



**Рис. 2.** Зависимость  $p/p_0$  от относительной скорости потока для разных значений параметра  $\xi$ , указанных у кривых, при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ .



**Рис. 3.** Зависимость  $T/T_0$  от относительной скорости потока для разных значений параметра  $\xi$  при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ . Сплошная кривая —  $\xi = 0$ , пунктир —  $-0.5$ , штрихпунктир —  $-1$ .

что этот режим отвечает значениям параметра  $\xi \leq 0$ . Зависимости площади поперечного сечения МГД канала от относительной скорости потока представлены на рис. 1 для трех значений параметра  $\xi$ . Из рис. 1 видно, что уменьшение параметра  $\xi$ , при заданной степени торможения потока  $v/v_0$ , отвечает увеличению площади поперечного сечения МГД канала.

На рис. 2, 3 показаны зависимости давления и температуры от относительной скорости потока в МГД канале при разных значениях параметра  $\xi$ . Согласно приведенным результатам, МГД торможение потока в рассмотренных режимах сопровождается повышением давления и температуры. Уменьшение параметра  $\xi$  приводит к уменьшению давления и температуры в МГД канале при заданной степени торможения потока  $v/v_0$ .

Для того чтобы определить профиль МГД канала  $F(x)$  и пространственное распределение параметров в МГД канале, отвечающие полученному решению, используем второе уравнение системы уравнений (5), представив его в следующем виде:

$$\frac{G}{F(v)} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} v Z(v) \right) \frac{dv}{dx} = -q_g. \quad (16)$$

Очевидно, что уравнение (16) позволяет определить зависимость  $x(v)$ , если в него подставить решение для функции  $Z(v)$  в форме (9). Более простую форму записи для  $x(v)$  получим, выразив  $Z(v)$  через функцию  $\eta_g(v)$ , определенную уравнением (12). В этом случае после несложных математических преобразований

уравнений (16) приводится к следующему виду:

$$\frac{v_0^2}{2} \left( 1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_0^2} \right) \frac{d\eta_g}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{k(1-k)\sigma(v)B^2v^2F(v)}{G}. \quad (17)$$

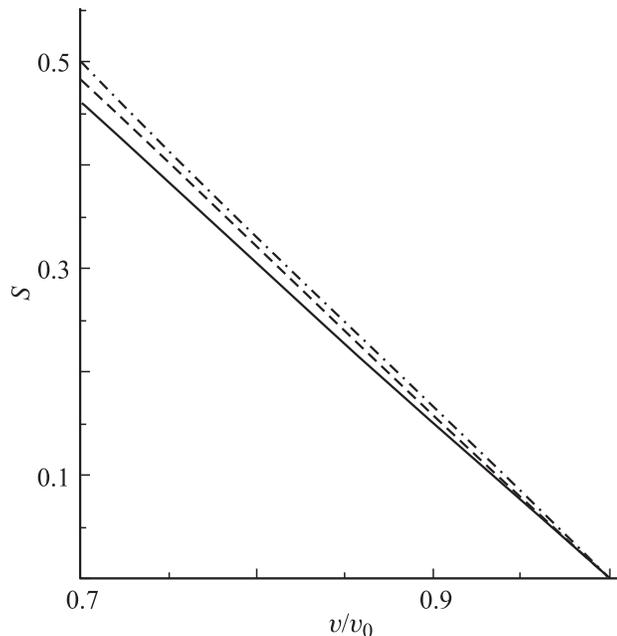
Здесь использовано выражение  $q_g = k(1-k)\sigma B^2v^2$ , справедливое для фарадеевского МГД канала. Проводимость в общем случае может зависеть от параметров течения, что, в нашем приближении, отвечает зависимости от скорости потока, которая явным образом обозначена в уравнении (17). Величина магнитной индукции предполагается постоянной. В этом случае решение уравнения (17) с граничным условием  $x(v_0) = 0$  может быть представлено в виде:

$$x = \frac{Gv_0^2(2 + (\gamma-1)M_0^2)}{2k(1-k)B^2(\gamma-1)M_0^2} \int_{v_0}^v \frac{d\eta_g/dv'}{\sigma(v')v'^2F(v')} dv'. \quad (18)$$

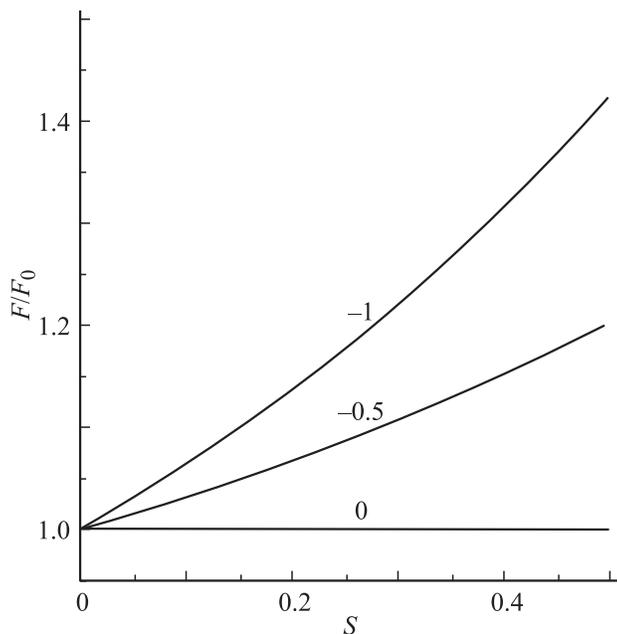
Для представления результатов расчета будем использовать безразмерный параметр МГД взаимодействия  $S$ , определяемый соотношением:  $S = \sigma_0 B^2 x / \rho_0 v_0$ . Несложные математические преобразования позволяют привести уравнение (18) к следующему виду:

$$S = \frac{v_0^2(2 + (\gamma-1)M_0^2)}{2k(1-k)(\gamma-1)M_0^2} \int_{v_0}^v \frac{d\eta_g/dv'}{(\sigma(v')/\sigma_0)v'^2(F(v')/F_0)} dv'. \quad (19)$$

Уравнение (19) определяет параметр МГД взаимодействия  $S$  как функцию скорости МГД течения при произвольных зависимостях  $F(v)$  и  $\sigma(v)$ . Если проводимость потока задается как функция параметров течения,



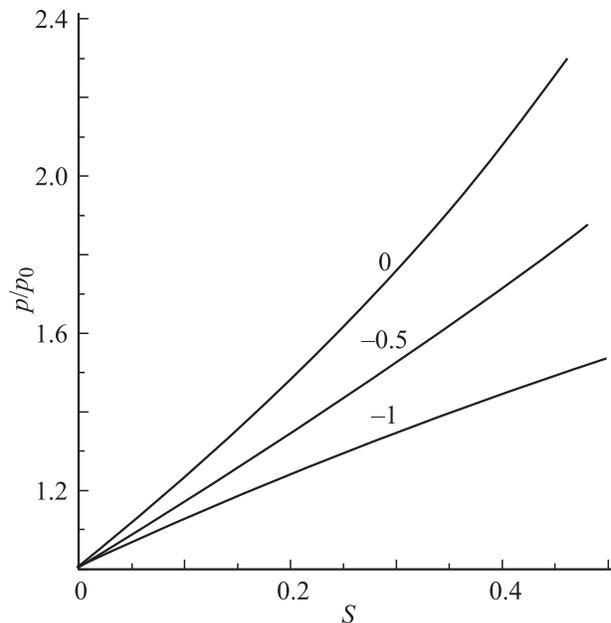
**Рис. 4.** Зависимость параметра МГД взаимодействия от относительной скорости потока для разных значений параметра  $\xi$  при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ . Сплошная кривая —  $\xi = 0$ , пунктир — 0.5, штрихпунктир — 1.



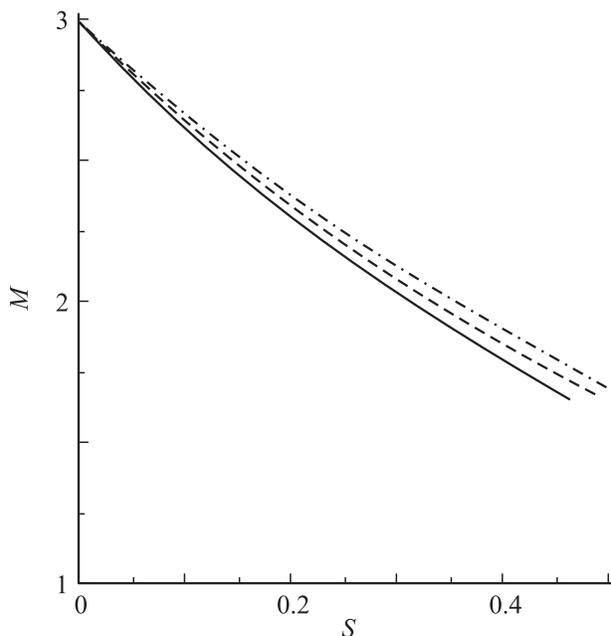
**Рис. 5.** Зависимость  $F/F_0$  от параметра МГД взаимодействия для разных значений параметра  $\xi$ , указанных у кривых, при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ .

например температуры и давления, то использование уравнений (9)–(11) позволяет элементарным образом учесть эту зависимость при расчете параметра МГД взаимодействия по формуле (19).

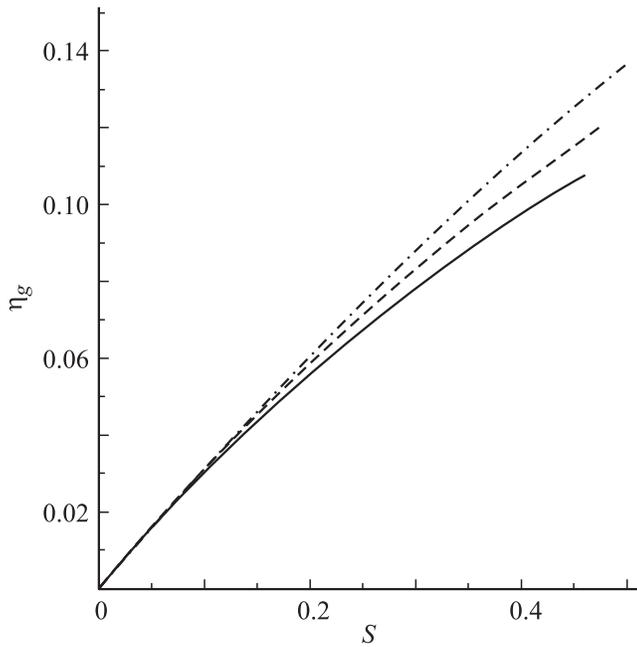
На рис. 4 представлена зависимость параметра МГД взаимодействия  $S$  от относительной скорости МГД течения при трех значениях параметра  $\xi$ . Результаты расчетов получены для постоянной проводимости:  $\sigma(v) = \sigma_0$ . Из рис. 4 следует, что уменьшение параметра  $\xi$  приводит к тому, что заданное торможение потока в канале



**Рис. 6.** Зависимость  $p/p_0$  от параметра МГД взаимодействия для разных значений параметра  $\xi$ , указанных у кривых, при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ .



**Рис. 7.** Зависимость числа Маха от параметра МГД взаимодействия для разных значений параметра  $\xi$  при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ . Сплошная кривая —  $\xi = 0$ , пунктир — 0.5, штрихпунктир — 1.



**Рис. 8.** Зависимость коэффициента преобразования энергии от параметра МГД взаимодействия для разных значений параметра  $\xi$  при  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $k = 0.5$ . Сплошная кривая —  $\xi = 0$ , пунктир —  $0.5$ , штрихпунктир —  $1$ .

достигается при больших значениях параметра МГД взаимодействия. Зависимости площади поперечного сечения МГД канала от параметра МГД взаимодействия показаны на рис. 5 для трех значений параметра  $\xi$ . На рис. 6, 7 демонстрируются зависимости давления и числа Маха от параметра  $S$  при разных значениях параметра  $\xi$ . Согласно результатам, представленным на рис. 6, уменьшение параметра  $\xi$  при фиксированном значении параметра МГД взаимодействия приводит к уменьшению давления.

Число Маха, согласно рис. 7, монотонно уменьшается с увеличением параметра МГД взаимодействия. Уменьшение параметра  $\xi$  при фиксированном значении параметра МГД взаимодействия приводит к увеличению числа Маха. На рис. 8 показаны зависимости коэффициента преобразования энергии от параметра МГД взаимодействия. Согласно рис. 8, уменьшение параметра  $\xi$  позволяет добиться больших значений  $\eta_g$  при заданном значении параметра МГД взаимодействия.

Продemonстрируем возможности использования полученного решения для нахождения оптимальной конфигурации МГД генератора, рассмотрев модельную задачу в следующей постановке. Определим параметры МГД генератора, который обеспечивает заданный коэффициент преобразования энергии  $\eta_0$ , при минимальном значении параметра МГД взаимодействия  $S$ . Степень раскрытия МГД канала  $F_1/F_0$  считается заданной величиной, здесь  $F_1$  — площадь выходного поперечного сечения МГД канала. Скорость потока на выходе МГД канала обозначим как  $v_1$ , при этом очевидно, что  $F(v_1) = F_1$ .

Используя соотношение  $F_1/F_0 = (v_1/v_0)^\xi$ , выразим параметр  $\xi$  через относительную скорость потока на выходе МГД канала и степень раскрытия МГД канала:  $\xi = \ln(F_1/F_0)/\ln(v_1/v_0)$ . Подставим определенный таким образом параметр  $\xi$  в уравнения (12), (13). Так как нас интересует электроэнергия, вырабатываемая на полной длине МГД генератора, то в данных уравнениях в качестве аргумента  $v$  также подставляем скорость потока на выходе МГД канала  $v_1$ . В результате получаем следующее уравнение для определения параметров МГД генератора, при которых обеспечивается коэффициент преобразования энергии равный  $\eta_0$ :

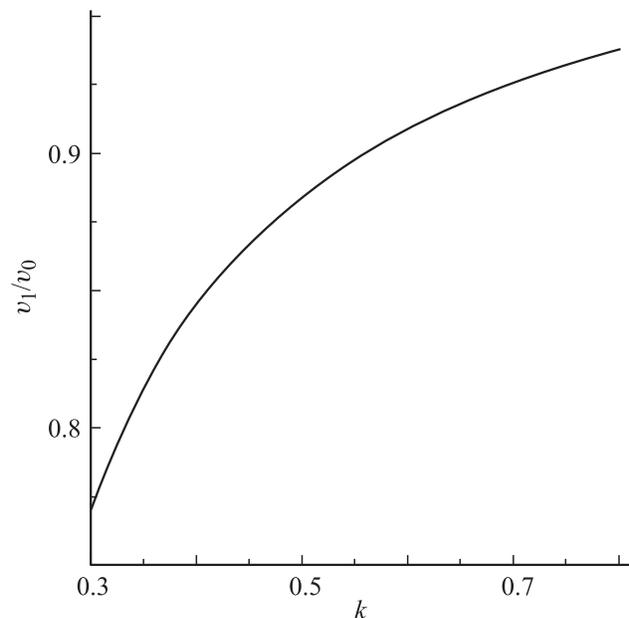
$$1 - \frac{(v_1/v_0)^2}{2/M_0^2 + \gamma - 1} \left[ 2\gamma \left( \left( \frac{1}{\gamma M_0^2} + \Psi \right) \times \left( \frac{v_1}{v_0} \right)^{-P} - \Psi \right) + \gamma - 1 \right] - \eta_0 = 0, \quad (20)$$

где

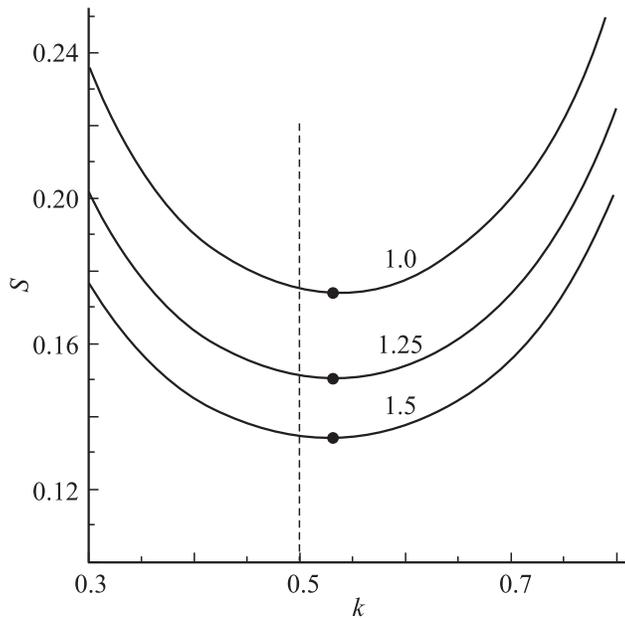
$$\Psi = \frac{(\gamma - 1)(1 - k)}{2\gamma + (\gamma - 1)k \left( \frac{\ln(F_1/F_0)}{\ln(v_1/v_0)} - 1 \right)}, \quad P = \frac{1}{\Psi} \frac{(\gamma - 1)(1 - k)}{(\gamma - (\gamma - 1)k)}.$$

Нетрудно заметить, что при заданных параметрах  $M_0$ ,  $\gamma$ ,  $F_1/F_0$  и  $\eta_0$  уравнение (20) определяет зависимость между коэффициентом нагрузки  $k$  и относительной скоростью потока на выходе МГД канала  $v_1/v_0$ .

На рис. 9 приведена зависимость относительной скорости  $v_1/v_0$  от коэффициента нагрузки, полученная из решения уравнения (20) для МГД канала постоянного сечения. Согласно полученным результатам, уменьшение коэффициента нагрузки при фиксированном значении коэффициента преобразования энергии  $\eta_0$  сопровождается уменьшением скорости потока на выходе

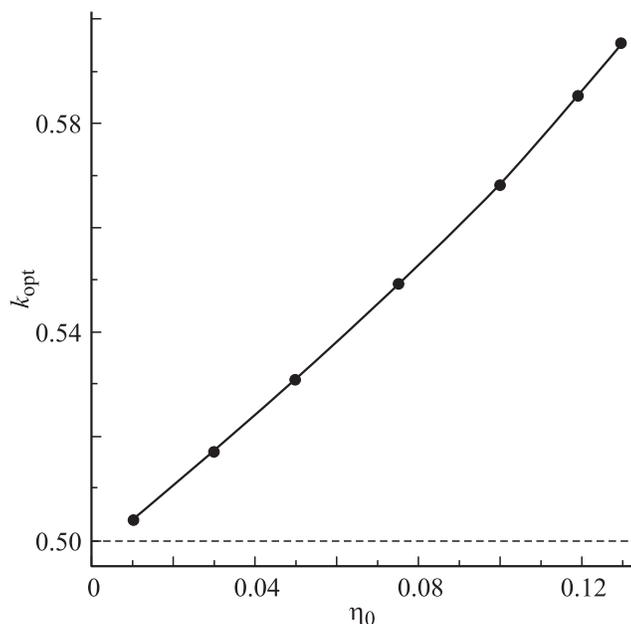


**Рис. 9.** Относительная скорость на выходе МГД генератора, отвечающая коэффициенту преобразования энергии  $\eta_0 = 0.05$ ,  $M_0 = 3$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $F_1/F_0 = 1$ .



**Рис. 10.** Параметр МГД взаимодействия, при котором обеспечивается значение коэффициента преобразования энергии  $\eta_0 = 0.05$  для разных значений  $F_1/F_0$ , указанных у кривых, при  $M_0 = 3, \gamma = 1.4$ .

канала. Результаты, представленные на рис. 10, показывают зависимости параметра МГД взаимодействия, отвечающие заданному значению  $\eta_0$ , для каналов, характеризующихся разными степенями раскрытия  $F_1/F_0$ . Из представленных результатов видно, что оптимальный коэффициент нагрузки  $k_{opt}$ , отвечающий минимальному



**Рис. 11.** Оптимальный коэффициент нагрузки в зависимости от коэффициента преобразования энергии при  $M_0 = 3, \gamma = 1.4, F_1/F_0 = 1.25$ .

значению  $S$ , превышает значение 0.5. Параметр МГД взаимодействия при фиксированном значении коэффициента нагрузки уменьшается с увеличением  $F_1/F_0$ . Согласно рис. 11, оптимальное значение коэффициента нагрузки зависит от коэффициента преобразования энергии  $\eta_0$ . При малых значениях  $\eta_0$  величина  $k_{opt}$  близка к 0.5. Возрастание  $\eta_0$  приводит к увеличению оптимального значения коэффициента нагрузки.

Отметим, что использование более сложной функциональной зависимости для  $F(v)$ , например в форме (14), позволяет искать конфигурацию МГД генератора, которая обеспечит заданный коэффициент преобразования энтальпии потока в электроэнергию  $\eta_0$  при меньшем значении параметра МГД взаимодействия  $S$ , чем в рассмотренной модельной задаче.

### Решение системы МГД уравнений, учитывающее изменение теплоемкости потока в МГД канале. Обобщение решения полученного для фарадеевского МГД канала на случай холловского МГД канала

Получим решение системы МГД уравнений для случая, когда теплоемкость  $c_p$  непостоянна, а изменяется в МГД канале. В этом случае второе уравнение системы уравнений (1) записывается следующим образом:

$$\rho v \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + h \right) = -q_s, \quad (21)$$

где энтальпия  $h$  определяется выражением

$$h = h_0 + \int_{T_0}^T c_p dT'.$$

По аналогии с алгоритмом решения системы МГД уравнений, предложенного в случае постоянной теплоемкости, будем полагать, что  $h, c_p$  и  $T$  являются функциями скорости. Запишем уравнение (21) в другой форме, учитывая следующую цепочку преобразований:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + h \right) = \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2}{2} + h \right) \frac{dv}{dx} = \left( v + c_p(v) \frac{dT}{dv} \right) \frac{dv}{dx}.$$

В результате уравнение (21) приводится к следующему виду:

$$\rho v \left( v + c_p(v) \frac{dT}{dv} \right) \frac{dv}{dx} = -q_s. \quad (22)$$

Учитывая, что

$$T = -\frac{p}{R\rho} = \frac{\rho v Z}{R\rho} = \frac{vZ}{R},$$

получим  $dT/dv = (Z + v dZ/dv)/R$ . Подставив это выражение в уравнение (22), получаем следующее уравнение:

$$\rho v \left( v + \frac{\gamma(v)}{\gamma(v) - 1} \left( Z + v \frac{dZ}{dv} \right) \right) \frac{dv}{dx} = -q_s. \quad (23)$$

При получении уравнения (23) использовалось соотношение  $c_p(v)/R = \gamma(v)/(\gamma(v) - 1)$ , где показатель адиабаты также рассматривается как функция скорости течения.

Аналогичным образом уравнение (3) приводится к следующему виду:

$$\rho v \left( 1 + \frac{dZ}{dv} - \frac{Z}{F} \frac{dF}{dv} \right) \frac{dv}{dx} = -\frac{q_g}{kv}. \quad (24)$$

Из системы уравнений (23), (24) нетрудно получить новое уравнение для функции  $Z(v)$ . При этом оказывается, что единственное отличие нового уравнения от уравнения (8) состоит в том, что в новом уравнении показатель адиабаты  $\gamma$  зависит от  $v$ . Нетрудно показать, что решение данного более общего уравнения имеет следующий вид:

$$Z(v) = Z_0 \exp(-\Phi'(v_0, v)) + \int_{v_0}^v \frac{(\gamma(v') - 1)(k - 1)}{\gamma(v') - (\gamma(v') - 1)k} \exp(-\Phi'(v', v)) dv', \quad (25)$$

где

$$\Phi'(v_a, v_b) = \int_{v_a}^{v_b} \frac{\gamma(v'') + (\gamma(v'') - 1)kv''\psi(v'')}{(\gamma(v'') - (\gamma(v'') - 1)k)v''} dv''.$$

Таким образом, получено решение системы МГД уравнений для случая, когда теплоемкость потока изменяется в МГД канале. Очевидно, что при постоянном значении показателя адиабаты решение (25) совпадает с решением (9).

Результаты, полученные в данной статье для фарадеевского МГД канала, несложно обобщить на случай холловского МГД канала. Холловский МГД генератор, согласно [25], характеризуется значениями выходной мощности  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -k_H(1 - k_H)\sigma B^2 v^2 \beta^2 / (1 + \beta^2)$  и силой Лоренца, действующей на поток  $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x = -(1 + k_H \beta^2)\sigma B^2 v / (1 + \beta^2)$ , которые отличаются от соответствующих характеристик для фарадеевского МГД генератора. Здесь  $\beta$  — параметр Холла,  $k_H$  — коэффициент нагрузки холловского МГД генератора. Нетрудно заметить, что для холловского МГД канала справедливо следующее соотношение:

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x = \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})(1 + k_H \beta^2)}{k_H(1 - k_H)\beta^2 v}.$$

Аналогичное соотношение для фарадеевского МГД канала в виде  $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} / (kv)$  использовалось при получении уравнения (3) и соответственно системы уравнений (5). Повторив алгоритм получения системы уравнений (5), несложно показать, что эта система уравнений для холловского МГД канала будет иметь такой же вид, как и для фарадеевского, если вместо коэффициента нагрузки  $k$ , будет использоваться параметр  $K = k_H(1 - k_H)\beta^2 / (1 + k_H \beta^2)$ .

Таким образом, решение (9)–(15), (25), полученное для фарадеевского МГД канала, можно использовать и для холловского, если вместо параметра  $k$  подставить параметр  $K$ . Это также справедливо и для уравнения (20), используемого для поиска оптимальных параметров. Чтобы рассчитать параметр МГД взаимодействия для холловского МГД канала, используя уравнение (19), следует вместо члена  $k(1 - k)$ , стоящего в знаменателе (19), подставить член  $k_H(1 - k_H)\beta^2 / (1 + \beta^2)$ . Необходимость данного изменения становится очевидной, если проследить вывод уравнения (19) начиная с уравнения (16). Таким образом, с использованием модификаций приведенных в данном параграфе, полученное в статье решение системы МГД уравнений может быть использовано для расчета характеристик течения как в фарадеевском, так и в холловском МГД каналах.

## Заключение

Для режимов МГД течения с монотонным изменением скорости потока по длине канала получено аналитическое решение системы МГД уравнений в квазиодномерном приближении. Полученное решение позволяет элементарным образом учесть заданную степень раскрытия МГД канала, в частности, при решении задачи оптимального выбора параметров МГД генератора. Таким образом, данное решение удобно использовать для анализа сложных газодинамических систем, включающих в себя МГД системы, при наличии геометрических ограничений, накладываемых на профиль МГД канала. Полученное решение может быть использовано для расчета характеристик течения как в фарадеевском, так и в холловском МГД каналах.

## Список литературы

- [1] Фрайштадт В.Л., Куранов А.Л., Шейкин Е.Г. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 43–47.
- [2] Kopchenov V.I., Vatazhin A.B., Gouskov O.V. // AIAA Paper 99-4971. 9<sup>th</sup> Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, 1999.
- [3] Головачев Ю.П., Суцких С.Ю. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 2. С. 28–33.
- [4] Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B. // AIAA Paper 2001-0492. 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2001.
- [5] Kuranov A.L., Kuchinsky V.V., Sheikin E.G. // AIAA Paper 2001-2881. 32<sup>nd</sup> AIAA Plasmadynamics and Lasers Conf. and 4<sup>th</sup> Weakly Ionized Gases Workshop. Anaheim, 2001.
- [6] Park C., Mehta U.B., Bogdanoff D.W. // J. Propul. Power. 2001. Vol. 17. N 5. P. 1049–1057.
- [7] Kuranov A.L., Sheikin E.G. // J. Spacecraft Rockets. 2003. Vol. 40. N 2. P. 174–182.
- [8] Park C., Mehta U.B., Bogdanoff D.W. // J. Propul. Power. 2003. Vol. 19. N 4. P. 529–537.
- [9] Gaitonde D. // AIAA Paper 2003-0172. 41<sup>st</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2003.

- [10] *Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B.* // AIAA Paper 2003-3763. 34<sup>th</sup> AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference. Orlando, 2003.
- [11] *Битюрин В.А., Ватажин А.Б., Гуськов О.В., Копчиков В.И.* // ТВТ. 2004. Т. 42. № 5. С. 745–752.
- [12] *Taylor T., Riggins D.W.* // AIAA Paper 2004-0859. 42<sup>nd</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2004.
- [13] *Sheikin E.G.* // AIAA Paper 2005-1336. 43<sup>rd</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2005.
- [14] *Miles R.B., Macheret S.O., Shneider M.N., Steeves C., Murray R.C., Smith T., Zaidi S.H.* // AIAA Paper 2005-0561. 43<sup>th</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2005.
- [15] *Nishibara M., Jiang N., Rich J.W., Lempert W.R., Adamovich I.V.* // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. P. 106–102.
- [16] *Васильева Р.В., Ерофеев А.В., Лапушкина Т.А., Поняев С.А., Бобаев С.В., Ван-Ви Д.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 27–33.
- [17] *Adamovich I., Nishibara M.* // AIAA Paper 2006-1004. 44<sup>th</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2006.
- [18] *Bityurin V.A., Bocharov A.N.* // Fluid Dynamics. 2006. Vol. 41. N 5. P. 843–856.
- [19] *Tang J., Yu D., Bao W.* // AIAA Paper 2006-8101. 14<sup>th</sup> AIAA/AHI Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Canberra, 2006.
- [20] *Sheikin E.G.* // AIAA Paper 2007-1379. 45<sup>th</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2007.
- [21] *Lee C.H., Lu H.* // AIAA Paper 2007-644. 45<sup>th</sup> Aerospace Sci. Meeting and Exhibit. Reno, 2007.
- [22] *Subbarao K., Goss J.D.* // Int. J. Aerospace Engineering. 2009. P. 793–647.
- [23] *Бобаев С.В., Головачев Ю.П., Курбатов Г.А., Менде Н.П., Сахаров В.А., Чернышев А.С., Шмидт А.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 1. С. 36–44.
- [24] *Шейкин Е.Г.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 1–8.
- [25] *Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П.* Сверхзвуковые МГД-генераторы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.