

03;05;11;12

Трибологические свойства режимов сухого, жидкостного и граничного трения

© Я.А. Ляшенко

Сумский государственный университет,
40007 Сумы, Украина
e-mail: nabla04ukr.net

(Поступило в Редакцию 5 августа 2010 г.)

Исследуется пара трения в режиме сухого трения без смазки, гидродинамическом режиме и режиме граничной смазки. Показано, что при сухом трении с ростом частоты внешнего периодического воздействия в зависимости координаты нижнего трущегося блока от времени уменьшается количество гармоник, пока при превышении граничной частоты не наступает полное прилипание поверхностей, после чего они движутся как единое целое. В гидродинамическом случае проанализировано поведение пары трения со смазкой из ньютоновской жидкости, а также псевдопластической и дилатантной неньютоновских жидкостей. Установлено, что псевдопластическая жидкость и граничная смазка в широком диапазоне параметров приводят к прерывистому режиму трения, который является одной из основных причин разрушения трущихся деталей.

Введение

Ввиду сложности физико-химических процессов, протекающих в зоне контакта трущихся тел, происходящие при трении процессы не поддаются описанию с точки зрения классической механики. Общая трибология рассматривает четыре основных вида трения: сухое, при взаимодействии трущихся тел без дополнительных слоев либо смазок; жидкостное — при наличии смазки между телами; смешанное, когда в области контакта присутствуют участки сухого и жидкостного трения; граничное — при толщине смазочного материала менее 10 атомных слоев, либо когда две трущиеся поверхности, разделенные слоем смазки, контактируют друг с другом за счет неровностей, шероховатостей и т.п. Граничное трение часто возникает при трении скольжения [1], поэтому требует детального изучения.

С одной стороны, чрезмерная тонкость смазки в режиме граничного трения не позволяет использовать для описания стандартную гидродинамическую идеологию, а с другой — сложность и разнообразность этого процесса затрудняют построение универсальной микроскопической модели. По этой причине часто используют феноменологические модели, позволяющие объяснить экспериментально наблюдаемые результаты [2–5]. Широкое распространение также получили методы молекулярной динамики [6], которые позволяют получить хорошие результаты, однако в этом случае при описании каждой конкретной экспериментальной ситуации приходится записывать различные системы уравнений и сложно проследить общую тенденцию. Более того, на сегодняшний день компьютерное моделирование не в состоянии описывать долговременные процессы из-за вычислительных ограничений. Феноменологический подход, продемонстрированный в данной работе, позволяет обойти указанные трудности и может помочь связать параметры микроскопических теорий с макроскопиче-

скими измерениями. Следует отметить, что в последние годы проводится большое количество экспериментов по исследованию режима граничного трения [7–10].

В работе [4] предложен подход, учитывающий термодинамическое и сдвиговое плавление граничной смазки. В рамках этого подхода исследовано влияние на систему флуктуаций основных параметров [11–13], а также рассмотрены причины гистерезиса при плавлении смазочного слоя [14]. Однако указанная теория является качественной и позволяет проследить только общие тенденции в поведении системы. В предлагаемой работе исследуется конкретная трибологическая система в режимах сухого, жидкостного и граничного трения. Показано, что режимы сухого и граничного трения имеют схожее поведение, несмотря на принципиально различное описание.

1. Сухое трение

Рассмотрим трибологическую систему, показанную на рис. 1. Здесь две пружины с коэффициентом жесткости K связаны с блоком массы M , находящимся на роликах, трением качения которых в дальнейшем рассмотрении пренебрегаем. На указанном блоке находится второй

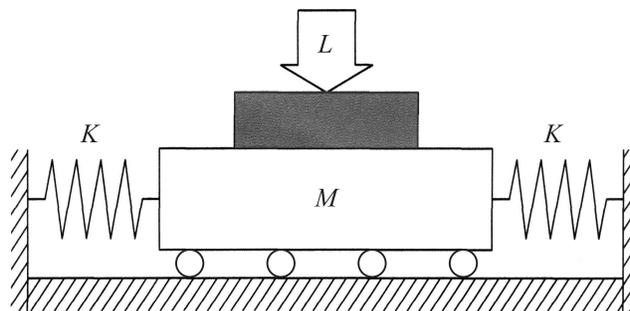


Рис. 1. Схема трибологической системы.

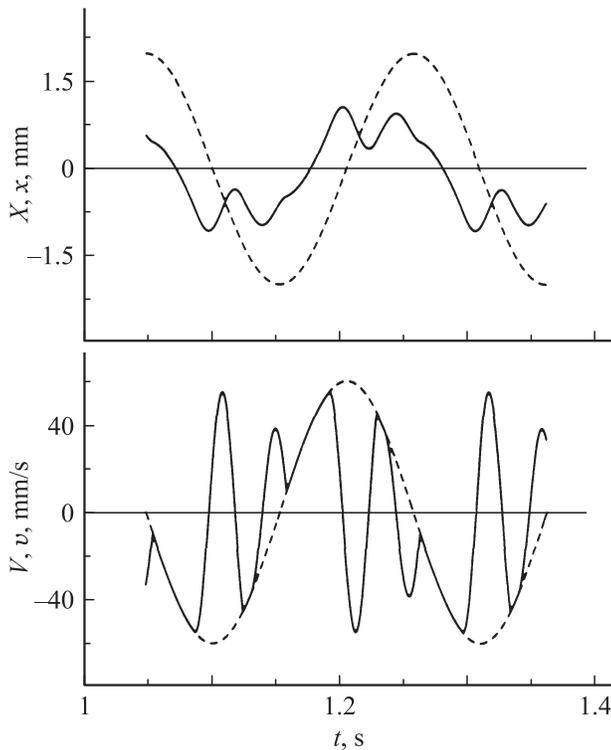


Рис. 2. Зависимости координат X , x и скорости V , v от времени t при параметрах $A = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $\omega = 30$ рад/с, $L = 20$ Н, $M = 0.6$ кг, $K = 7000$ Н/м, $\mu = 0.5$. Штриховыми линиями показаны $X(t)$, $V(t)$, сплошными — $x(t)$, $v(t)$.

блок, к которому приложена нагрузка L , и который приводится в движение за счет внешних сил. При наличии сил взаимодействия между трущимися поверхностями двух блоков при движении верхнего будет двигаться и нижний, причем его траектория будет принципиально зависеть от режима трения. Подобная установка экспериментально исследована в работе [15], где в качестве трущихся поверхностей используется стальная пара трения, а как смазка — парафиновое масло ISO 32, непрерывно подающееся в зону контакта с фиксированной скоростью.

Пусть X , $V = \dot{X}$ — координата и скорость верхнего трущегося блока, x , $v = \dot{x}$ — координата и скорость нижнего. Далее рассматривается случай, в котором верхний блок приводится в движение согласно циклическому закону

$$X = A \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$V = -A\omega \sin(\omega t), \quad (2)$$

где A — амплитуда, ω — циклическая частота. Уравнение движения нижнего блока записывается в виде [15]

$$M\ddot{x} + 2Kx - F = 0, \quad (3)$$

где F — сила трения, благодаря которой осуществляется движение нижнего блока. Так как в данном разделе работы рассматривается режим сухого трения без смазки,

полагаем, что выполняется закон Амонтона [1]:

$$F = \mu L \operatorname{sgn}(V - v), \quad (4)$$

где μ — коэффициент трения. Для учета направления действия силы в (4) введена знаковая функция, определенная стандартным образом:

$$\operatorname{sgn}(V - v) = \begin{cases} 1, & V > v, \\ -1, & V < v. \end{cases} \quad (5)$$

Результат численного решения уравнений (1)–(5) показан на рис. 2. На верхней панели рисунка штриховой линией показана зависимость координаты верхнего трущегося блока $X(t)$ (1), а сплошной — координата нижнего блока $x(t)$. На зависимости $x(t)$ присутствуют дополнительные гармоники, ввиду чего она имеет более сложный вид. На нижней панели рисунка приведены зависимости скорости трущихся блоков от времени. Стоит отметить, что наблюдаются продолжительные моменты времени, в которые эти кривые накладываются, т. е. скорости блоков совпадают. Такие ситуации соответствуют случаям, когда трущиеся блоки „прилипают“ друг к другу, и их относительное перемещение отсутствует. Когда скорости V и v не совпадают, осуществляется режим скольжения.

На рис. 3 дополнительно приведены временные зависимости относительного перемещения блоков и их относительной скорости. Здесь в моменты времени,

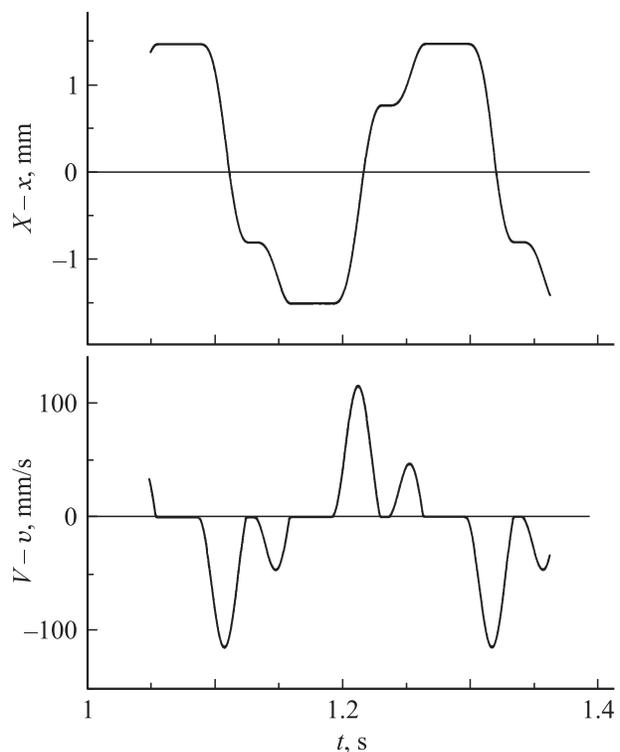


Рис. 3. Зависимости относительного перемещения $X(t) - x(t)$ и относительной скорости $V(t) - v(t)$ трущихся блоков от времени t , соответствующие рис. 2.

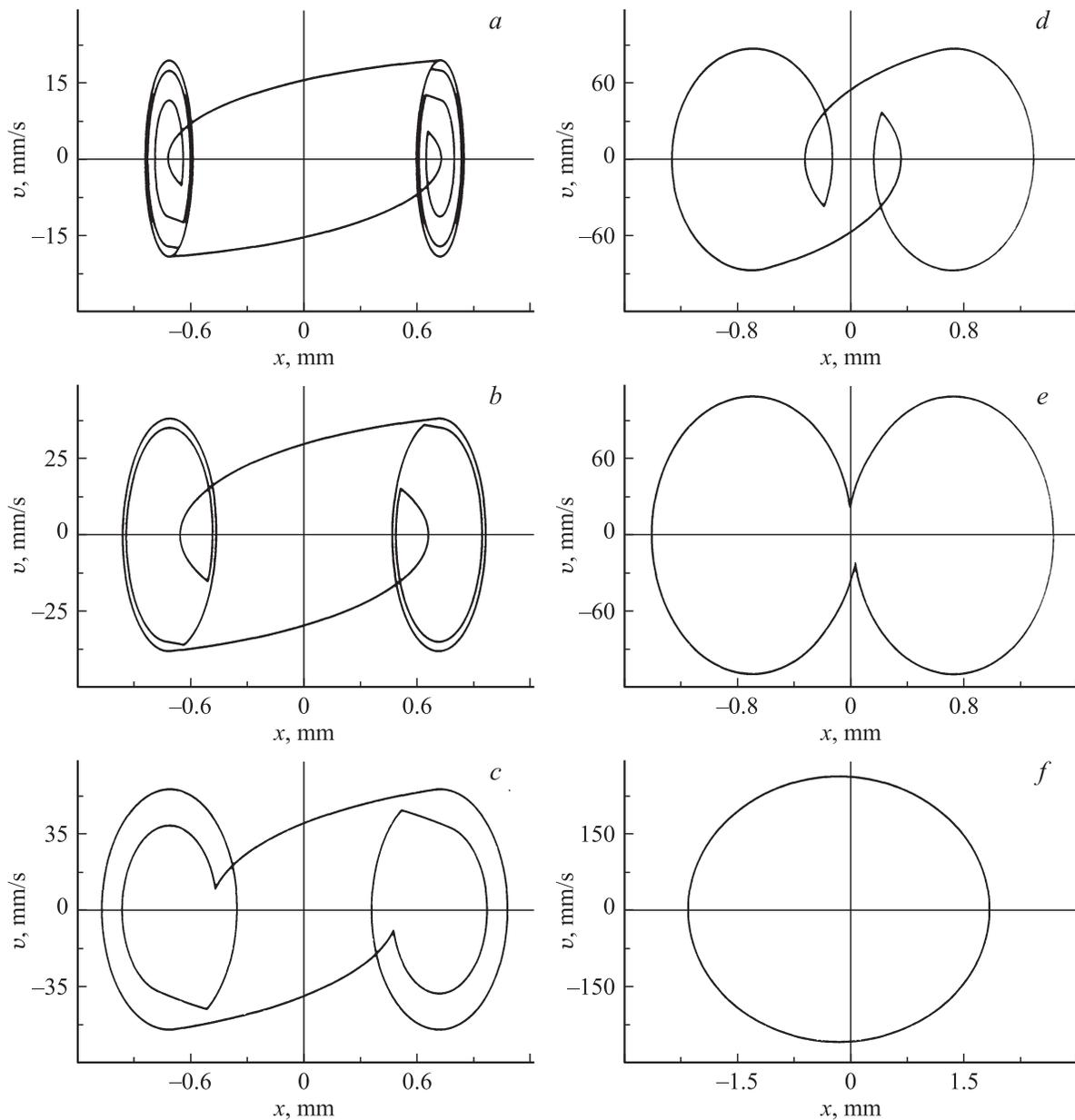


Рис. 4. Фазовые портреты системы $\dot{x}(x)$ при параметрах рис. 2 и частотах $\omega = 10, 20, 30, 50, 80, 130 \text{ rad/s}$ (a–f). С ростом частоты количество гармоник уменьшается.

когда осуществляется прилипание, относительное перемещение $(X - x)$ остается постоянным, а относительная скорость $(V - v)$ равна нулю. Таким образом, реализуется периодический прерывистый режим движения (*stick-slip*), который характерен для сухого трения без смазки при выполнении определенных условий [1]. При выбранных параметрах за один полный период блоки 4 раза „прилипают“ друг к другу — по 2 раза при движении в каждом из направлений, причем полученные зависимости симметричны относительно направления движения. Зависимости на рис. 2 и 3 показаны в стационарном режиме, и параметры системы со временем не изменяются. При расчетах выбирались нулевые начальные значения, и зависимости приводились с момента времени $t = 5T$,

где T — период функции (1). За указанное время устанавливается стационарный режим движения. Зависимости приведены на временном интервале $\Delta t = 1.5T$.

Отметим, что на поведение системы сильное влияние оказывают величина нагрузки на верхний трущийся блок L , а также частота ω . Подробное изучение влияния этих параметров, а также ряда других на режим сухого трения без смазки проведено экспериментально [16], и поэтому не является целью данной работы. Однако для общности приведем стационарные зависимости на фазовой плоскости $\dot{x}(x)$ (либо $v(x)$), которые отсутствуют в [16].

Фазовые портреты системы при параметрах рис. 2 и различных значениях циклической частоты ω представ-

лены на рис. 4. Легко видеть, что с ростом частоты поведение системы упрощается, поскольку уменьшается общее количество гармоник. При значении частоты $\omega = 130 \text{ rad/s}$ поверхности находятся в „прилипшем“ состоянии в продолжении всего времени движения, о чем свидетельствует вид соответствующего фазового портрета. На нем осуществляется периодическое движение по закону (1). Отметим, что третий фазовый портрет построен при значении частоты $\omega = 30 \text{ rad/s}$, что соответствует временным зависимостям, показанным на рис. 2. Также отметим тот факт, что все фазовые портреты симметричны относительно начала координат, кроме последнего, демонстрирующего случай полного „прилипания“ поверхностей. Это связано с тем, что во всех случаях, когда присутствуют моменты проскальзывания, система на начальном этапе эволюционирует и устанавливается стационарный режим с симметричными зависимостями. В последнем случае при $\omega = 130 \text{ rad/s}$ уже в начале движения и все последующее время поверхности находятся в состоянии „прилипания“, что не дает системе выйти на симметричный относительно направления сдвига стационарный режим трения. При этом поведение в любой момент времени зависит от начального положения трущихся блоков (начальных условий в уравнениях), так как это положение с течением времени сохраняется.

2. Жидкостное трение

Если две поверхности, образующие пару трения, разделены слоем смазки толщиной на порядок больше высот микронеровностей, наступает гидродинамический режим. Сила трения в таком жидкостном режиме определяется, согласно закону Ньютона [17]:

$$F = \eta S \frac{V}{h}, \quad (6)$$

где $\eta [\text{Pa} \cdot \text{s}]$ — динамическая вязкость смазочного материала, $S [\text{m}^2]$ — площадь соприкосновения трущихся поверхностей, $h [\text{m}]$ — толщина смазочного слоя, $V [\text{m/s}]$ — скорость течения вязкой смазки. Согласно формуле (6), сила гидродинамического трения не зависит от нагрузки L . Однако от нагрузки существенно зависят толщина смазочного слоя и вязкость смазки. При прочих равных условиях в гидродинамическом режиме сила трения приблизительно на два порядка меньше сил граничного и сухого трения. Из выражения (6) следует, что сила F пропорциональна относительной скорости сдвига трущихся поверхностей, однако эта ситуация выполняется только для ньютоновских жидкостей, вязкость которых η зависит лишь от свойств смазочного материала и его температуры. Влияние различных температурных зависимостей вязкости на режим граничного трения в рамках реологической модели [4] изучено в работе [18].

Вязкость неньютоновской жидкости при ее течении дополнительно зависит от градиента скорости сдвига.

Обычно это неоднородные жидкости, состоящие из крупных молекул, образующих сложные пространственные структуры, например полимерные смазки, широко используемые при исследовании граничного трения [7]. Для скорости деформации смазки используем формулу [17]

$$\dot{\varepsilon} = \frac{V}{h}, \quad (7)$$

где ε — относительная деформация. Тогда выражение (6) можно переписать следующим образом:

$$F = \eta S \dot{\varepsilon}. \quad (8)$$

Неньютоновские жидкости обычно имеют сложные зависимости $\eta(\dot{\varepsilon})$. В частности, вязкость полимерных растворов и расплавов с ростом скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$ обычно уменьшается (так называемые псевдопластические жидкости), а в случае суспензий твердых частиц вязкость с ростом $\dot{\varepsilon}$, наоборот, увеличивается (дилатантные жидкости). Поэтому для качественного анализа используем в (8) простую аппроксимацию [17]

$$\eta = k \dot{\varepsilon}^\gamma, \quad (9)$$

где введен коэффициент пропорциональности $k [\text{Pa} \cdot \text{s}^{\gamma+1}]$, и получим

$$F = k S \dot{\varepsilon}^{\gamma+1} = k S \left(\frac{V}{h}\right)^{\gamma+1}. \quad (10)$$

Отметим, что для псевдопластических жидкостей $\gamma < 0$, дилатантные характеризуются показателем $\gamma > 0$, а в случае ньютоновских жидкостей $\gamma = 0$ (согласно (9), при этом вязкость не зависит от скорости).

Для моделирования используем формулу для силы трения в виде

$$F = m \operatorname{sgn}(V - v) |V - v|^{\gamma+1}, \quad (11)$$

где введены коэффициент пропорциональности

$$m = \frac{k S}{h^{\gamma+1}}, \quad (12)$$

измеряющийся в единицах $\text{Pa} \cdot \text{s}^{\gamma+1} \cdot \text{m}^{1-\gamma}$, а также знаковая функция (5) и относительная скорость трущихся поверхностей $(V - v)$.

На рис. 5 приведены временные зависимости скорости трущихся блоков, полученные в результате совместного численного решения уравнений (2), (3), (5), (11). На рисунке показаны три случая, причем все они рассматриваются при одинаковых параметрах, с различием только в значении коэффициента γ . Это позволяет проанализировать его влияние на поведение трибологической системы. В первом случае (верхняя панель) в качестве смазки выбрана неньютоновская псевдопластическая жидкость ($\gamma = -2/3 < 0$). При выбранных параметрах реализуется режим *stick-slip*. Отметим, что псевдопластические полимерные смазки широко используются при экспериментальном исследовании граничного трения [10,17],

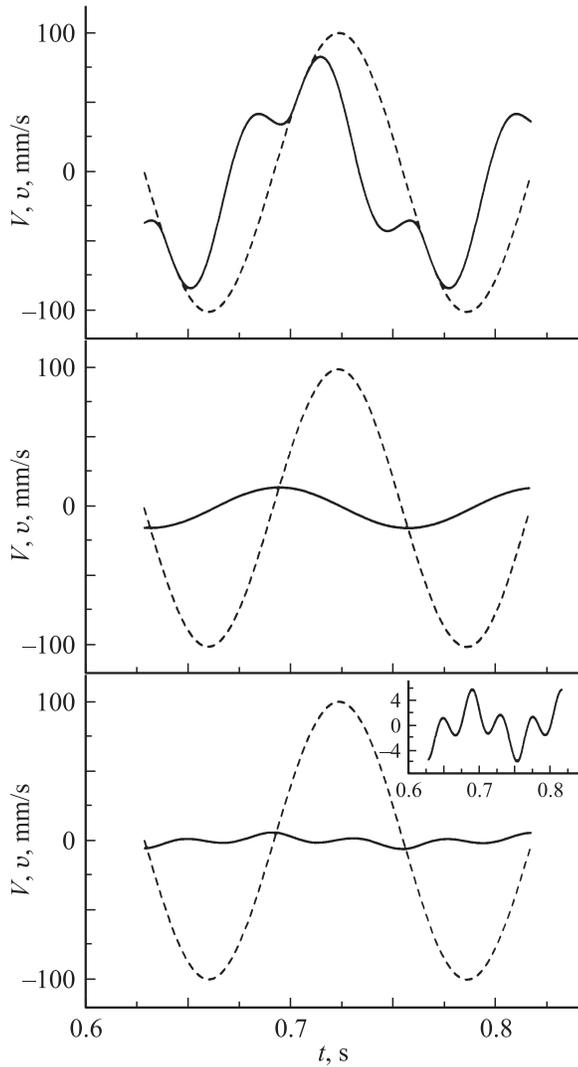


Рис. 5. Зависимости скорости V, v от времени t при параметрах $A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\omega = 50 \text{ rad/s}$, $M = 0.6 \text{ kg}$, $K = 5000 \text{ N/m}$, $m = 25 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{\gamma+1} \cdot \text{m}^{1-\gamma}$. Панели рисунка, расположенные сверху вниз, отвечают значениям $\gamma = -2/3, 0, 2/3$. Штриховыми линиями показана скорость верхнего блока V , сплошной — нижнего v . На вставке нижней панели показана увеличенная зависимость $v(t)$.

и в определенном диапазоне параметров действительно показывают режим *stick-slip* [10]. В случае обычной ньютоновской жидкости (средняя панель рисунка, $\gamma = 0$) устанавливается режим устойчивого скольжения, о чем свидетельствует малое значение скорости v , причем зависимость $v(t)$ изменяется по закону синуса, так же как и $V(t)$, только со сдвигом по фазе. Причина отсутствия дополнительных гармоник в полученной $v(t)$ состоит в линейной зависимости силы трения F (11) от относительной скорости сдвига поверхностей при $\gamma = 0$. И наконец, в последнем рассматриваемом случае (нижняя панель рисунка) как смазка используется дилатантная жидкость ($\gamma = 2/3 > 0$). На вставке к рисунку легко видеть, что зависимость $v(t)$ при этом приобретает

более сложный вид за счет нелинейности (11), однако реализуется жидкостное трение.

3. Граничное трение

В предыдущих разделах статьи проанализированы режимы сухого и гидродинамического трения, рассмотрение которых схожее и различается только зависимостями для определения силы трения F . В случае граничного трения ситуация не настолько проста, поскольку для описания состояния смазки требуется построение отдельной теории. В рамках данной работы используем модель [19], построенную на основе теории фазовых переходов Ландау [20]. Одним из ключевых моментов указанной модели является введение параметра избыточного объема f , возникающего за счет хаотизации структуры твердого тела в процессе плавления. С увеличением f растет плотность дефектов в смазке, и за счет их транспорта под действием приложенных напряжений она переходит в кинетический режим пластического течения (жидкоподобная фаза). Ранее подобный подход был использован для описания процессов интенсивной пластической деформации [21–23].

Приведем кратко основные положения указанной теории, однако при этом опустим учет процессов теплопроводности, пространственной неоднородности, а также энтропийных факторов, что позволяет существенно сократить количество рассматриваемых параметров, не оказывая при этом существенного влияния на основные результаты. Дополнительно проведем учет внешней нагрузки, приложенной к верхнему трущемуся блоку. Этот вопрос в [19] опущен, однако имеет большое прикладное значение.

Сначала записывается зависимость плотности свободной энергии Φ от избыточного объема f в виде

$$\Phi = \Phi_0 - \varphi_0 f + \frac{1}{2} \varphi_1 f^2 - \frac{1}{3} \varphi_2 f^3 + \frac{1}{4} \varphi_3 f^4, \quad (13)$$

где при младших степенях разложения учитывается зависимость от инвариантов упругих деформаций ε_{ij}^e и температуры смазки T :

$$\Phi_0 = \Phi_0^* + \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{ii}^e)^2 + \mu (\varepsilon_{ij}^e)^2, \quad (14)$$

$$\varphi_0 = \varphi_0^* + \frac{1}{2} \bar{\lambda} (\varepsilon_{ii}^e)^2 + \bar{\mu} (\varepsilon_{ij}^e)^2 + \alpha T. \quad (15)$$

Здесь $\varepsilon_{ii}^e, (\varepsilon_{ij}^e)^2$ — первый и второй инварианты тензора деформаций [19,24]:

$$\varepsilon_{ii}^e = \frac{n}{\lambda_{\text{eff}} + \mu_{\text{eff}}}, \quad (16)$$

$$(\varepsilon_{ij}^e)^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tau}{\mu_{\text{eff}}} \right)^2 + (\varepsilon_{ii}^e)^2 \right], \quad (17)$$

где n, τ — нормальная и касательная компоненты напряжений, действующих на смазку со стороны трущихся поверхностей.¹

¹ Сдвиговое напряжение τ определяется из выражения (18) при $i \neq j$, т.е. $\delta_{ij} = 0$. В случае $\mu_{\text{eff}} = 0$ слагаемое τ/μ_{eff} в (17) следует заменять в соответствии с (18) на $2\varepsilon_{ij}^e$

Упругие напряжения определяются [19,25] как:

$$\sigma_{ij}^e = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = 2\mu_{\text{eff}}\varepsilon_{ij}^e + \lambda_{\text{eff}}\varepsilon_{ii}^e\delta_{ij}, \quad (18)$$

где вводятся эффективные упругие параметры²

$$\mu_{\text{eff}} = \mu - \bar{\mu}f, \quad (19)$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda - \bar{\lambda}f, \quad (20)$$

уменьшающиеся с плавлением при возрастании параметра f .

Далее исходя из принципа минимизации потенциала (13) записывается эволюционное уравнение для параметра f в виде уравнения Ландау–Халатникова [20], которое в явном виде приобретает вид [19]

$$\tau_f \frac{\partial f}{\partial t} = \varphi_0 - \varphi_1 f + \varphi_2 f^2 - \varphi_3 f^3 - \frac{n^2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{(\lambda_{\text{eff}} + \mu_{\text{eff}})^2}, \quad (21)$$

где вводится время релаксации τ_f . Появление последнего слагаемого в (21) связано с зависимостью инвариантов (16), (17) от параметра f , и именно оно учитывает влияние внешнего давления.

В [19] показано, что в смазочном слое при сдвиге возникает стационарная упругая деформация

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{(V - v)\tau_e}{h}, \quad (22)$$

где $(V - v)$ — относительная скорость сдвига, а τ_e — максвелловское время релаксации внутренних напряжений.

Сила трения определяется, согласно выражению [19]

$$F = \tau S + m \operatorname{sgn}(V - v)|V - v|^{\gamma+1}, \quad (23)$$

где коэффициент m вычисляется из (12). Отметим, что по сравнению с гидродинамическим режимом (10), (11) в режиме граничной смазки в выражении для силы трения (23) дополнительно появляется упругая составляющая, определяемая первым слагаемым τS . Из выражений (18), (22) следует, что знак этого слагаемого в (23) учитывается автоматически, что не требует введения специальной знаковой функции (5).

Для дальнейшего анализа в соответствии с экспериментальными данными [10] выбираются следующие значения параметров теории [19]: $\Phi_0^* = 20 \text{ J/m}^3$, $\lambda = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\bar{\lambda} = 10^8 \text{ Pa}$, $\mu = 4.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\bar{\mu} = 4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\varphi_0^* = 5 \text{ J/m}^3$, $\varphi_1 = 1100 \text{ J/m}^3$, $\varphi_2 = 2700 \text{ J/m}^3$, $\varphi_3 = 2070 \text{ J/m}^3$, $\alpha = 0.45 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}/\text{m}^3$, $h = 10^{-9} \text{ m}$, $\tau_f = 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\tau_e = 10^{-8} \text{ s}$.

Проанализируем кинетику плавления граничной смазки в рамках трибологической модели, показанной на рис. 1. Для этого необходимо совместно решить уравнения (1)–(3), (5), (15)–(23). Соответствующие временные зависимости координат и скоростей приведены на рис. 6. На рисунке реализуется режим *stick-slip*, характерный для граничного режима трения [10].

² При $f > \mu/\bar{\mu}$ следует полагать $\mu_{\text{eff}} = 0$, а когда $f > \lambda/\bar{\lambda}$, необходимо принимать $\lambda_{\text{eff}} = 0$.

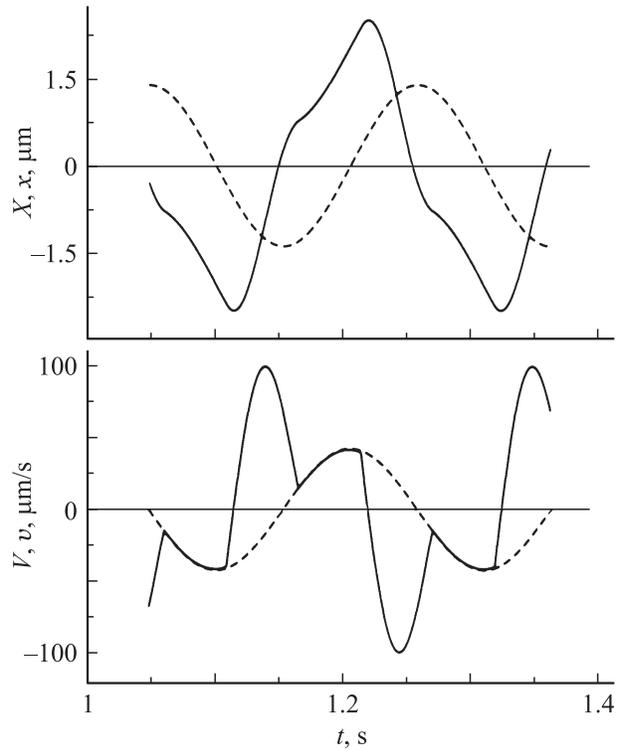


Рис. 6. Зависимости координат X , x и скорости V , v от времени t при параметрах $A = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $\omega = 30 \text{ rad/s}$, $M = 0.7 \text{ kg}$, $K = 1300 \text{ N/m}$, $\gamma = -2/3$, $m = 0.05 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{1/3} \cdot \text{m}^{5/3}$, $S = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, $n = -10^6 \text{ Pa}$, $T = 290 \text{ K}$. Штриховыми линиями на рисунке показаны $X(t)$, $V(t)$, сплошными — $x(t)$, $v(t)$.

Поведение системы в рассматриваемом случае аналогично представленному на рис. 2 для сухого трения без смазки. Отличительной особенностью является то, что в случае граничного трения при выбранных параметрах амплитуда колебаний нижнего трущегося блока больше амплитуды верхнего, который задает движение. Отклик трущейся системы на внешнее воздействие, подобный приведенному на верхней панели рис. 6, получен в работе [2]. Такой его вид в [2] связывается с наличием в отклике слоя смазки третьей гармоники, что также установлено экспериментально [9]. Преимущество ситуации, рассмотренной в данном разделе, перед предыдущими в том, что здесь в модели учитывается влияние температуры смазки и внешней нагрузки на поверхности трения. В частности, в работе [19] проанализировано влияние температуры при сдвиге верхней трущейся поверхности с постоянной скоростью и в области гистерезиса предсказан режим *stick-slip*, полученный в данной работе.

Заключение

Проведенное рассмотрение позволяет описывать эффекты, наблюдаемые при трении двух поверхностей в режимах сухого, жидкостного и граничного трения. Показано, что периодический прерывистый режим *stick-slip* плавления/затвердения смазки может реализоваться

во всех рассматриваемых ситуациях. В частности, в гидродинамическом режиме он в широком диапазоне параметров устанавливается для смазок из неньютоновских жидкостей псевдопластического типа, для которых вязкость уменьшается с ростом градиента скорости. Предложенное рассмотрение позволяет проследить общие тенденции в поведении трущихся систем, работающих в принципиально различных режимах трения.

Список литературы

- [1] *Persson B.N.J.* Sliding friction. Physical principles and applications. NY: Springer-Verlag, 2000. 515 p.
- [2] *Понов В.Л.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. С. 100–110.
- [3] *Carlson J.M., Batista A.A.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4153–4165.
- [4] *Khomenko A.V., Yushchenko O.V.* // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 036 110(6).
- [5] *Filippov A.E., Klafter J., Urbakh M.* // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 135 503(4).
- [6] *Braun O.M., Naumovets A.G.* // Surf. Sci. Rep. 2006. Vol. 60. P. 79–158.
- [7] *Israelachvili J.* // Surf. Sci. Rep. 1992. Vol. 14. P. 109–159.
- [8] *Demirel A.L., Granick S.* // J. Chem. Phys. 1998. Vol. 109. P. 6889–6897.
- [9] *Reiter G., Demirel A.L., Peanasky J., Cai L.L., Granick S.* // J. Chem. Phys. 1994. Vol. 101. P. 2606–2615.
- [10] *Yoshizawa H., Israelachvili J.* // J. Phys. Chem. 1993. Vol. 97. P. 11 300–11 313.
- [11] *Хоменко О.В., Ляшенко Я.О., Борисюк В.М.* // УФЖ. 2009. Т. 54. С. 1142–1151.
- [12] *Хоменко А.В., Ляшенко Я.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. С. 27–33.
- [13] *Khomenko A.V., Lyashenko I.A., Borisyuk V.N.* // Fluct. Noise Lett. 2010. Vol. 9. P. 19–35.
- [14] *Khomenko A.V., Lyashenko I.A.* // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 366. P. 165–173.
- [15] *Yang C.-R., Chiou Y.-C., Lee R.-T.* // Tribol. Int. 1999. Vol. 32. P. 443–453.
- [16] *Yang C.-R., Lee R.-T., Chiou Y.-C.* // Tribol. Int. 1997. Vol. 30. P. 719–731.
- [17] *Luengo G., Israelachvili J., Granick S.* // Wear. 1996. Vol. 200. P. 328–335.
- [18] *Khomenko A.V., Lyashenko I.A.* // Cond. Matt. Phys. 2006. Vol. 9. P. 695–702.
- [19] *Ляшенко Я.А., Хоменко А.В., Метлов Л.С.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. С. 120–126.
- [20] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1995. Ч. 1. 605 с.
- [21] *Метлов Л.С.* // МФиНТ. 2007. Т. 29. С. 335–345.
- [22] *Метлов Л.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2008. Т. 72. С. 1353–1357.
- [23] *Metlov L.S.* // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 051 121(9).
- [24] *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [25] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: URSS, 2003. 264 с.